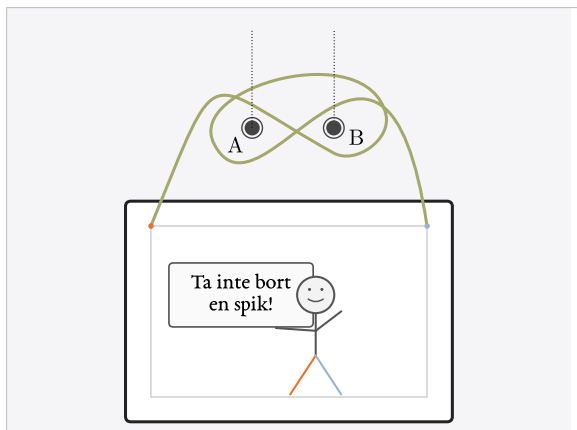
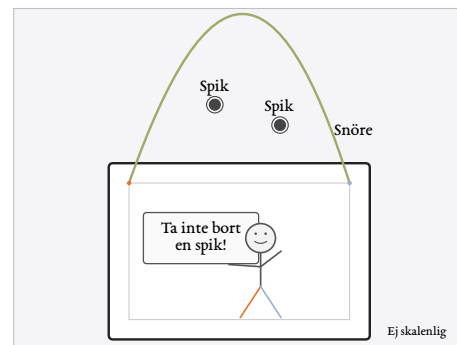


# Allt eller inget-tavlan

Du har en tavla med ett långt snöre fastsatt i de två övre hörnen, och två spikar. Hur kan du hänga upp tavlan på väggen med hjälp av snöret och spikarna så att den hänger stadigt när båda spikarna sitter kvar, men faller om man tar bort någon av spikarna — oavsett vilken?



Till vänster har vi ritat en lösning (det finns flera olika). Men hur kan man hitta lösningar? Att prova sig fram är alltid en bra strategi för att förstå sig på problem. Finns det för detta problem någon systematik? Javisst – man kan faktiskt omvandla detta problem till *algebra*! Här nedan beskriver vi hur.

Låt oss kalla den vänstra spiken  $A$  och den högra  $B$ . Vi föreställer oss två vertikala streck rakt upp från spikarna. Följ nu snöret från tavlans vänstra hörn till dess högra hörn. Varje gång snöret korsar  $A$ -strecket skriver vi  $A$ , med en pil som visar korsningens riktning, och likadant för  $B$ -strecket. En given upphängning

av tavlan ger oss då ett 'ord' i symbolerna  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{B}$ ; t.ex. ger lösningen ovan ordet

$$\hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{B}.$$

Sådana ord har några räkneregler: två motsatta korsningar i rad över samma spik tar ut varandra. T.ex. kan ett delord  $\hat{A}\hat{A}$  strykas, för om snöret går till höger över  $A$  och sedan direkt tillbaka så är det som att inget har skett.

Varför ger ordet ovan en lösning till problemet? För det första 'kollapsar' ordet inte till ingenting (som t.ex. ordet  $\hat{A}\hat{A}\hat{B}\hat{B}$  gör), vilket betyder att snöret verkligen hänger på spikarna. För det andra, om man tar bort spik  $B$ , då försvinnar alla  $B$ -delar från ordet:

$$\text{om } B \text{ tas bort: } \hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{B} \mapsto \hat{A}\hat{A} \mapsto \text{inget},$$

vilket betyder att tavlan faller! På samma sätt faller tavlan om  $A$  tas bort:

$$\text{om } A \text{ tas bort: } \hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{B} \mapsto \hat{B}\hat{B} \mapsto \text{inget}.$$

Alltså uppfylls kraven! Kan du genom att skriva ned andra sådana här ord hitta andra lösningar?

För den nyfikna: man kan skriva  $\hat{X} = +X$  och  $\hat{X} = -X$  och räknereglerna motsvarar  $+X - X = 0$  och  $-X + X = 0$ . Upphängningen ovan är då  $+A - B - A + B$ . Om  $B$  tas bort, dvs.  $B = 0$ , så blir ordet  $+A - A = 0$ , och liknande om  $A$  tas bort. Men se upp:  $X + Y$  och  $Y + X$  är inte samma sak i allmänhet!