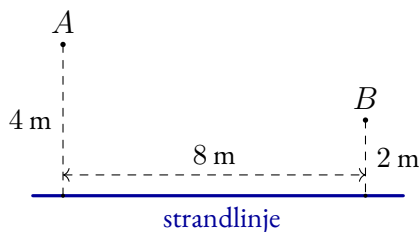


Obs: nedan lösningar är förslag; matematik handlar till stor del om resonemang och förklaringar, och det kan finnas många olika korrekta sätt att förklara något på.

Strandlinjen

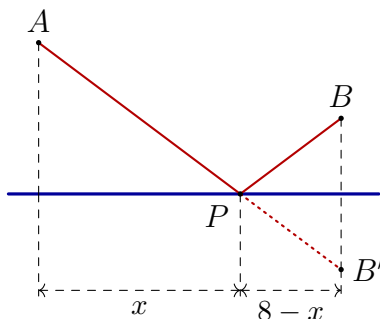
Du står vid en punkt A på stranden, 4 meter från en rak strandlinje. Din hund ligger stilla vid en punkt B , 2 meter från strandlinjen. Längs strandlinjen är avståndet 8 meter mellan punkterna A och B , som i figuren.

Du vill först gå till vattnet och sedan till hunden. Hur lång är den kortaste vägen? Var på strandlinjen ska du gå ner för att vägen ska bli så kort som möjligt?



Strategi: spegla!

Spegla B i strandlinjen till en punkt B' , som ligger 2 meter *under* linjen.



För varje punkt P på strandlinjen är PB lika långt som PB' (spegling ändrar inte längder), så vägen $A \rightarrow P \rightarrow B$ är precis lika lång som vägen $A \rightarrow P \rightarrow B'$. Den senare är kortast när A , P och B' ligger på en rak linje – den kortaste vägen mellan två punkter är en rak linje!

Längden av den raka vägen från A till B' ger Pythagoras sats: den horisontella sträckan är 8 m och den vertikala $4 + 2 = 6$ m, så

$$AB' = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.}$$

Svar: den kortaste vägen är 10 m lång.

Var ska man gå ner till vattnet?

Punkten P är den punkt där den raka linjen från A till B' korsar strandlinjen. De två rätvinkliga trianglarna med hörn i A respektive B' och med ett hörn i P är likformiga (de har samma vinklar vid P). Förhållandet mellan de lodräta sidorna är $4 : 2$, så förhållandet mellan de vågräta sidorna måste vara detsamma:

$$\frac{x}{8-x} = \frac{4}{2} = 2.$$

Alltså är $x = 2(8-x) = 16-2x$, dvs. $3x = 16$.

Svar: gå ner till vattnet $16/3 \approx 5,3$ m från punkten rakt nedanför A (och alltså $8/3 \approx 2,7$ m från punkten rakt nedanför B).

Samma idé förklarar varför en ljusstråle som reflekteras i en spegel har lika stor infallsvinkel som utfallsvinkel: ljuset tar den kortaste vägen.

Myran på lådan

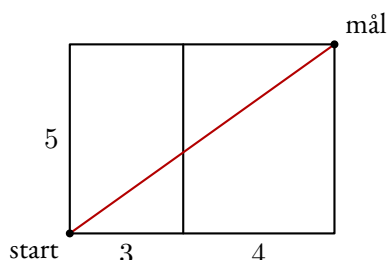
En myra sitter i ett hörn på en låda med måtten $3 \times 4 \times 5$ cm. Den vill gå längs lådans utsida till det motsatta hörnet.

Hur lång är den kortaste vägen?

Strategi: vik upp lådan!

Om myran bara går längs kanterna blir vägen $3 + 4 + 5 = 12$ cm lång, men det går att göra bättre genom att gå snett över sidorna. Den kortaste vägen går över exakt två av lådans sidor.

Tänk dig att vi viker upp de två sidor som myran går över, så att de ligger platt i samma plan. Då blir myrans väg en rak linje över en rektangel – och en rak linje är den kortaste vägen mellan två punkter i planet.



Vilka två sidor myran går över spelar roll. Det finns tre olika sätt att vika upp, och de ger rektanglar med sidorna 5 och $3 + 4$, sidorna 4 och $3 + 5$, eller sidorna 3 och $4 + 5$. Diagonalerna blir enligt Pythagoras sats

$$\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}, \quad \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

och

$$\sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}.$$

Den kortaste är $\sqrt{74}$: myran ska korsa den kant som är 5 cm lång.

Svar: den kortaste vägen är $\sqrt{74} \approx 8,6$ cm.

Lägg märke till att det lönar sig att korsa den *längsta* kanten. Kan du förklara varför det alltid blir så, för vilken låda som helst?

Kvadraternas siffror

Ett tal n kallas ett *kvadrattal* om det kan skrivas som $n = k^2$ för något heltal k .

Finns det några kvadrattal som slutar på siffran 8?

Vilka siffror kan förekomma som sista siffra hos ett kvadrattal?

Vilka siffror kan förekomma som *första* siffra hos ett kvadrattal?

Strategi: sista siffran beror bara på sista siffran!

När man multiplicerar två tal bestäms den sista siffran i produkten helt av de sista siffrorna i faktorerna. (Tänk på hur man ställer upp en multiplikation: alla andra siffror bidrar bara med tiotal, hundratal och så vidare.) Alltså bestäms sista siffran i k^2 av sista siffran i k , och det räcker att testa tio fall:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9,$$

$$4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad 6^2 = 36,$$

$$7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81.$$

De sista siffrorna här är 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Siffran 8 finns inte med, så inget kvadrattal slutar på 8. Detsamma gäller 2, 3 och 7.

Den första siffran är en helt annan historia: den beror på hela talet k , inte bara på en siffra. Här får vi i stället leta efter exempel. Kvadrattalen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 börjar på 1, 4, 9, 1, 2, 3, 4, 6, 8, och lite längre fram hittar vi $23^2 = 529$ och $27^2 = 729$.

Svar: nej, inget kvadrattal slutar på 8. De möjliga sista siffrorna är 0, 1, 4, 5, 6 och 9. Som första siffra kan däremot alla siffror 1–9 förekomma.

Att sista siffran i ett kvadrattal bara kan vara 0, 1, 4, 5, 6 eller 9 är ett snabbt sätt att se att till exempel 2 026 873 inte är ett kvadrattal. Kan du hitta ett liknande test med de två sista siffrorna?

Sten, sax, påse

Tre personer spelar sten-sax-påse. Alla väljer slumpmässigt och oberoende av varandra.

Hur stor är sannolikheten att det finns exakt en vinnare?

Strategi: räkna utfallen!

Varje person har tre val, så det finns $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ möjliga utfall, och alla är lika sannolika. Det räcker alltså att räkna hur många av dem som ger exakt en vinnare.

För att exakt en person ska vinna måste den personen slå båda de andra, och det går bara om de andra två har valt samma sak. Ett sådant utfall bestäms av tre val: vem som vinner (3 sätt), vad vinnaren väljer (3 sätt) och – när det är bestämt – vad de andra två måste välja (1 sätt). Det ger $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ utfall.

Sannolikheten är därför $9/27 = 1/3$.

Som kontroll kan vi sortera alla 27 utfall: i 3 har alla valt samma sak och i 6 har alla valt olika saker (oavgjort i båda fallen), i 9 finns exakt en vinnare, och i 9 finns exakt en förlorare (två har valt samma sak och den tredje förlorar mot dem). Mycket riktigt är $3 + 6 + 9 + 9 = 27$.

Svar: sannolikheten är $1/3$.

Vad händer med fyra spelare? Då är sannolikheten för exakt en vinnare $4 \cdot 3/3^4 = 12/81 = 4/27$, och med många spelare blir det nästan alltid oavgjort.