Obs: nedan lösningar är förslag*: matematik handlar till stor del om resonemang och förklaringar, och det kan finnas många olika korrekta sätt att förklara något på.*

Talet som upprepar sig

Välj ett tresiffrigt tal och skriv det två gånger efter varandra. Till exempel blir 471 till 471471.

Visa att talet du får alltid är delbart med 7, 11 och 13.

Strategi: skriv om talet med tiopotenser!

Vad händer egentligen när vi skriver 471 två gånger? Det första 471 hamnar tre steg till vänster, vilket betyder att det multipliceras med 1000:

$$471471 = 471 \cdot 1000 + 471 = 471 \cdot 1001.$$

Samma sak gäller för vilket tresiffrigt tal n som helst: det upprepade talet är $1000n + n = 1001n$.

Nu räcker det att titta på talet 1001. Om vi provar att dela med små primtal hittar vi

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Det upprepade talet är alltså $n \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, och en produkt är förstås delbar med var och en av sina faktorer.

Svar: det upprepade talet är $1001n$, och $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Partytrick: be någon välja ett tresiffrigt tal, skriva det två gånger och sedan dela med 7, med 11 och med 13. Det går jämnt ut varje gång, och kvar blir talet man började med.

Omkrets och hypotenusa

En rätvinklig triangel har omkretsen 12 och hypotenusan 5.

Hur stor är triangelns area?

Strategi: räkna på det du vill veta, inte på det du inte vet!

Kalla kateterna a och b. Arean är $ab/2$, så det vi vill veta är produkten ab – vi behöver inte veta a och b var för sig.

Från omkretsen får vi $a+b+5 = 12$, dvs. $a+b = 7$. Från Pythagoras sats får vi $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$.

Nu använder vi kvadreringsregeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Vänsterledet är $7^2 = 49$ och $a^2 + b^2 = 25$, så $2ab = 49 - 25 = 24$, dvs. $ab = 12$.

Svar: arean är $ab/2 = 6$.

(Kateterna råkar vara 3 och 4, men det behövde vi aldrig räkna ut – metoden fungerar lika bra när kateterna inte är heltal.)

Medelhastigheten

Det är 60 km till jobbet. På vägen dit är det köer och du kommer bara upp i medelhastigheten 30 km/h.

Hur fort måste du köra hem för att medelhastigheten för hela resan, dit och tillbaka, ska bli 60 km/h?

Strategi: gå tillbaka till definitionen!

Det är frestande att svara 90 km/h, eftersom $(30 + 90)/2 = 60$. Men medelhastighet är inte medelvärdet av två hastigheter. Medelhastigheten är

$$\text{medelhastighet} = \frac{\text{total sträcka}}{\text{total tid}}.$$

Hela resan är $60 + 60 = 120$ km lång. För att medelhastigheten ska bli 60 km/h måste hela resan ta

$$\frac{120\text{ km}}{60\text{ km/h}} = 2\text{ timmar}.$$

Men resan till jobbet tar redan $60/30 = 2$ timmar! Det finns alltså ingen tid alls kvar till hemresan. Hur fort man än kör hem blir medelhastigheten mindre än 60 km/h.

Med 90 km/h hem, till exempel, tar hemresan 40 minuter, och medelhastigheten blir $120/(2 + 2/3) = 45$ km/h.

Svar: det går inte, oavsett hur fort man kör.

Första sexan

Du kastar en tärning om och om igen tills du får en sexa.

Vilket är mest sannolikt: att det behövs ett jämnt antal kast, eller ett udda antal kast?

Strategi: börja om!

Kalla sannolikheten att det behövs ett udda antal kast för p. Då är sannolikheten för ett jämnt antal kast $1 - p$.

Tänk nu på det första kastet. Med sannolikhet $1/6$ blir det en sexa direkt, och då blev antalet kast udda (ett kast). Med sannolikhet $5/6$ blir det ingen sexa, och då börjar vi om från början – fast med en skillnad: ett kast är redan gjort, så det som var udda är nu jämnt och tvärtom. Alltså är sannolikheten för ett jämnt antal kast lika med sannolikheten att första kastet misslyckas, gånger sannolikheten att resten tar ett udda antal kast:

$$1 - p = \tfrac{5}{6}\, p.$$

Det ger $p\,(1 + \frac{5}{6}) = 1$, dvs. $p = 6/11$.

Man kan också räkna direkt: sannolikheten att första sexan kommer i kast nummer k är $(5/6)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$, och summan över udda k är en geometrisk serie:

$$\tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{25}{36} + \left(\tfrac{25}{36}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1/6}{1 - 25/36} = \frac{6}{11}.$$

Svar: ett udda antal kast är mest sannolikt. Sannolikheten är $6/11$, mot $5/11$ för ett jämnt antal.

Att udda vinner är inte så konstigt: det mest sannolika enskilda antalet kast är 1, och det är udda.

Skiftande ödlor

På en ö finns 4 röda, 5 blå och 6 gula ödlor. När två ödlor med olika färg möts byter båda färg till den tredje färgen. Till exempel blir en röd och en blå ödla båda gula.

Kan alla ödlor någon gång få samma färg?

Strategi: leta efter något som inte ändras!

När man ska visa att något är *omöjligt* kan man inte prova alla möjligheter – det finns oändligt många sätt för ödlorna att mötas. I stället letar vi efter en egenskap som bevaras vid varje möte, en så kallad *invariant*, och som vi inte har i slutläget.

Låt R, B och G vara antalet röda, blå och gula ödlor. Vid ett möte mellan en röd och en blå ödla ändras antalen så här:

$$R \to R-1, \qquad B \to B-1, \qquad G \to G+2.$$

Nyckeln är att titta på resterna vid division med 3. Att minska med 1 ger samma rest som att öka med 2 (eftersom -1 och 2 skiljer sig åt med 3). Alltså ökar *alla tre* resterna med 2 vid ett möte – och samma sak gäller för de andra typerna av möten.

Om två av antalen har olika rest vid division med 3 före ett möte, så har de alltså olika rest även efteråt. Det är vår invariant: skillnaden mellan två av antalen ändras aldrig, om man räknar med rest vid division med 3.

Från början är $(R, B, G) = (4, 5, 6)$ med resterna $(1, 2, 0)$: alla tre är olika. Om alla ödlor någon gång hade samma färg, till exempel gula, skulle vi ha $(R, B, G) = (0, 0, 15)$ med resterna $(0, 0, 0)$. Där är två av resterna lika, vilket är omöjligt.

Svar: nej, det kan de aldrig.

Vad händer om det från början finns 4 röda, 4 blå och 6 gula ödlor? Då har två av antalen samma rest, och invarianten stoppar inte längre. Kan du hitta en följd av möten som gör alla ödlor gula?