

Bedömning i matematik – i lärandets och undervisningens tjänst

Maria Nordlund och Astrid Pettersson (red)

MATEMATIKDIDAKTISKA TEXTER
Beprovad erfarenhet och vetenskaplig grund
DEL 7

Bedömning i matematik – i lärandets och undervisningens tjänst

Maria Nordlund och Astrid Pettersson (red)

MATEMATIKDIDAKTISKA TEXTER
Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund
DEL 7

Institutionen för matematikämnets
och naturvetenskapsämnenas didaktik,
Stockholms universitet, 106 91 Stockholm

Grafisk form: Göran Lind
Tryck: Universitetservice US-AB, Stockholm 2019,
uppdaterad digital utgåva 2021

Beställningar: info@prim-gruppen.se
ISBN: 978-91-979516-6-1
ISSN: 1654-0646

Innehåll

1. Bedömning i matematik i lärandets och undervisningens tjänst – en inramning	6
2. Bedömning – varför, vad och hur	10
Bedömningens olika syften	11
Den viktiga vad-frågan...	12
...och sedan kommer hur	12
Allt hänger ihop	13
... och får konsekvenser	14
3. Bedömning som förbättrar lärandet	18
Effektiv feedback	19
Eleverna engageras i sitt lärande – elevmedverkan	22
Undervisningen anpassas till resultaten av bedömningen	26
Bedömningens inflytande på elevernas motivation och självuppfattning	30
Eleverna behöver bedöma sina prestationer för att förstå hur de kan förbättra sig	31
4. Uppgifters potential	36
Öppna uppgifter	37
Undersökande uppgifter	39
Muntliga uppgifter	41
Flervals- och kortsvarsuppgifter	42
Uppgifter med och utan kontext	44
Uppgifter som behandlar samma matematikinnehåll	47
Progression i uppgifter	49
Avslutningsvis	54
5. Bedömning av elevers visade kunskaper	56
Begränsningar och möjligheter	58
Information om elevers visade kunskaper	58
Beskriva, analysera och tolka information	59
Situationer, metoder och anvisningar för bedömning	61
Skriftligt, muntligt eller i handling	63
Beslutsfattande	64
Vem gör bedömningen?	64
Material att använda	65

6. Centralt utarbetade prov	72
Jämförelse mellan prov i de två olika bedömningssystemen	74
Förändringar av funktionerna och syftena med de nationella proven	75
Utveckling och konstruktion av nationella prov i matematik	76
Förändringar i provformat, uppgiftsformat och bedömning över tid	78
De nationella provens möjligheter och begränsningar	82
De framtida nationella proven	83
Material att använda	85
7. Internationella studier	92
Bakgrund	93
Sveriges deltagande i internationella storskaliga mätningar	96
Matematik som ett undersökningsobjekt	96
Resultat och resultatutveckling	97
Mätningarna PISA och TIMSS – skillnader och likheter	99
Om PISA-studien	102
Matematiken i PISA	102
Genomförande av PISA-provet	103
Bedömning i PISA	104
Exempel på en PISA-uppgift med bedömda elevlösningar	105
Enkäter i PISA	109
Är PISA relevant för att mäta aspekter av svenska skolan?	110
Diskussion	112
Inledning till kapitel 8 och 9 om bedömningsstöd	116
8. Kartläggning av nyanlända elevers kunskaper	120
Vad innebär kartläggning av nyanlända elevers kunskaper	121
Från <i>numeracy</i> till numeracitet	122
Kartläggning genom samtal	123
Vardagsspråk och skolspråk	126
Specialpedagogiskt perspektiv	127
9. Bedömningsstöd utifrån autentiska situationer	130
Bakgrund	131
Bedömningsstöd för matematik 1a	131
Kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå	132
Exempel på uppgifter i bedömningsstöden	133
Lärarinformation och bedömning	135
Genomförande och bedömning av elevlösningar	136
Här hittar du materialet	142
Författarpresentationer	144

Bedömning i matematik i lärandets och undervisningens tjänst – en inramning

Maria Nordlund och Astrid Pettersson

INTRESSET FÖR BEDÖMNING har ändrats över tid och professor Gudrun Erickson har uttryckt förändringen med *"Från iskallt till glödhett – eller vidbränt"* (Erickson, 2017, s 6). Då PRIM-gruppen (PRov I Matematik) bildades 1984 var intresset för bedömning ganska svalt i Sverige. Forskning om bedömning var inte särskilt omfattande och genomfördes huvudsakligen vid de institutioner som utarbetade standardprov för grundskolan och centrala prov för gymnasieskolan. Intresset ökade successivt framför allt då formativ bedömning blev populärt. Artiklar och böcker av bland andra Gipps, Black, Wiliam, Murphy och Hattie behandlade framför allt bedömning i formativt syfte. I Sverige blev intresset också stort och Hatties bok *"Visible learning"*, som kom ut 2009, fick stort genomslag på alla nivåer i skolsverige. På senare tid har även de internationella kunskapsmätningarna fått stor uppmärksamhet och då framför allt PISA-undersökningen. År 2007 gav Vetenskapsrådet anslag till en forskarskola i pedagogisk bedömning. Forskarskolan var ett samarbetsprojekt mellan fyra lärosäten med Lärarhögskolan i Stockholm, senare Stockholms universitet, som huvudansvarig. I anslutning till denna forskarskola kunde forskarstuderande från hela landet få möjlighet att bedriva forskning om bedömning. Ett stort antal avhandlingar blev bland annat en följd av forskarskolans verksamhet.

I denna sjunde del av Matematikdidaktiska texter behandlas bedömning. Innehållet präglas mycket av den forskning och verksamhet som bedrivits och bedrivs i PRIM-gruppen vid Stockholms universitet. De centralt utarbetade proven har varit stommen i verksamheten, men även utvärderingar på kommunal nivå har varit omfattande. I dessa kommunala utvärderingar får såväl skolhuvudmän som skollärare en bild av kunskapsläget i matematik i tre av grundskolans årskurser, där den lägst godtagbara nivån fokuseras. Men i PRIM-gruppens verksamhet finns också internationella kunskapsmätningar som PISA och TIMSS och tidigare också nationella utvärderingar i matematik. PRIM-gruppen har inte bara utvecklat bedömningsinstrument i matematik utan också i musik och hem- och konsumentkunskap och också uppgifter i gymnasieskolans olika ämnen, både där de integreras i matematik men också för de enskilda yrkesprogrammets specifika ämnen. Eleverna som har berörts av bedömningsmaterialen spänner från de allra yngsta i förskoleklassen till de äldsta i vuxenutbildningen.

PRIM-gruppens medarbetare har ett brett register av meriter. Många har undervisningserfarenhet på lärarutbildningen, flertalet har erfarenhet av att vara lärare i matematik i grundskola och/eller gymnasieskola, några också som speciallärare eller specialpedagoger. Så gott som alla har medverkat i matematikbiennaler och på matematikdidaktiska konferenser, såväl nationella som internationella. Många har bidragit med artiklar i olika tidskrifter bland annat Nämnamnaren. Redan 2010 gavs den första publikationen om bedömning ut av PRIM-gruppen, *"Bedömning av kunskap – för lärande och undervisning i matematik"*. Den publikation som ges ut nu, 35 år efter det att PRIM-gruppen bildades har titeln *"Bedömning i matematik – i lärandets och undervisningens tjänst"* och vill än tydligare lyfta fram att bedömning kan vara mycket användbar för den enskildes lärande, såväl elevens och lärarens, men också att bedömning är mycket viktig för den undervisning som eleven möter – bedömning kan verkligen vara lärandets och undervisningens tjänare.

Denna bok belyser och diskuterar därför en rad aspekter kring bedömning i matematik och syftet är att lärare, lärarutbildare och lärarstudenter ska inspireras i sitt arbete kring bedömning.

Efter detta inledningskapitel presenterar *Astrid Pettersson* några väsentliga aspekter av bedömning, dess syfte, innehåll och genomförande. Relationen mellan bedömning, kunskap, lärande och undervisning belyses liksom vilka konsekvenser bedömning kan ha. Mycket av det som står i det kapitlet kommer att fördjupas i senare kapitel.

I kapitel 3 fördjupas *Inger Ridderlind* och *Margareta Enoksson* bedömning som förbättrar lärandet. Läsaren får i detta kapitel möta vad effektiv feedback kan vara och vilka frågor som bör ställas för att underlätta konstruktiv reflektion. Därefter ges exempel på återkoppling och reflektioner. En viktig typ av bedömning är självbedömning och i kapitlet presenteras flera verktyg som kan användas för att få ett mer fungerande lärande. En viktig konsekvens för att lärandet ska stimuleras är att undervisningen anpassas till resultatet av bedömningarna, vilket också belyses i kapitlet. Avslutningsvis behandlas bedömningens inflytande på elevernas motivation och självuppfattning.

En situation där eleverna får visa kunskap i matematik är genom att lösa uppgifter. I kapitlet "Uppgifters potential" presenterar och diskuterar *Katarina Kristiansson*, *Inger Ridderlind* och *Margareta Enoksson* olika matematikuppgifter och deras potential för att eleverna ska ges möjlighet att visa kunskap. De tar bland annat upp olika typer av uppgifter som behandlar samma innehåll. De diskuterar också hur man kan se progression i uppgifter.

När eleven visat matematisk kunskap ska den bedömas. I kapitlet "Bedömning av elevers visade kunskaper" beskriver *Astrid Pettersson*, *Katarina Kristiansson*, *Inger Ridderlind* och *Maria Nordlund* bedömningsprocessen samt tar upp bedömningsmetoderna holistisk bedömning och analytisk bedömning. Bedömningsens begränsningar och möjligheter behandlas liksom olika bedömningsmetoder och bedömningsituationer. En process som kan vara komplicerad är att veta vad bedömningsresultat ska användas till och vilka beslut som kan fattas och även detta behandlas i kapitlet.

I kapitlet "Centralt utarbetade prov" behandlar *Astrid Pettersson*, *Margareta Enoksson*, *Niclas Evén*, *Katarina Kristiansson*, *Anette Nydahl* och *Heléne Sandström* de prov som statsmakterna har bestämt ska utvecklas och konstrueras för användning i matematik i såväl grundskola som gymnasieskola. Kapitlet anlägger ett historiskt perspektiv, tar upp syftena med nationella prov och utvärderingar, beskriver kortfattat hur bedömningsinstrumenten konstrueras och vilka möjligheter och begränsningar de har. Ett framtidsperspektiv ges också där bland annat digitaliseringen av proven behandlas.

Det har blivit vanligare med internationella utvärderingar av olika slag. De vanligaste är TIMSS och PISA. *Samuel Sollerman* ger i sitt kapitel en bakgrund och behandlar de två undersökningarna och presenterar likheter och skillnader mellan dem. Kapitlet fokuserar PISA och ger exempel på PISA-uppgifter.

I efterföljande kapitel behandlas olika bedömningsstöd och kartläggningsmaterial. Efter ett inledande kapitel som *Maria Nordlund*, *Erica Aldenius*, *Yvonne Franzon*,

Katarina Kristiansson, Heléne Sandström, Anette Skytt och Niklas Thörn har skrivit följer två exemplifieringar. I ett kapitel behandlar *Maria Nordlund* och *Heléne Sandström* kartläggningsmaterialet för nyanlända elever och i ett annat kapitel behandlar *Niklas Thörn* och *Katarina Kristiansson* två olika bedömningsstöd, ett för gymnasieskolans yrkesprogram och ett för grundläggande vuxenutbildning.

De flesta kapitel avslutas med förslag till diskussioner/aktiviteter. Vår förhoppning är att dessa frågor ska inspirera läsarna att diskutera dessa och andra frågor som läsningen väckt.

I slutet av boken finns en närmare presentation av medverkade författare och två rapportförteckningar. De flesta illustrationerna är gjorda av Jens Ahlbom.

Referenser

Erickson, G. (2017). Från iskalld till glödhet – eller vidbränt...? I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning, "Alla människors möte borde vara så"* Vänbok till Astrid Pettersson. (s. 6–16). Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Pettersson, A., Olofsson, G., Kjellström, K., Ingemansson, I., Hallén, S., Björklund Boistrup, L., Alm, L. (2010). *Bedömning av kunskap: för lärande och undervisning i matematik*. Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet.

Bedömning – varför, vad och hur

Astrid Pettersson

BEDÖMNING PRÄGLAR DET mesta av det vi gör och lär oss, inte minst i skolan och kan betraktas som en ständig följeslagare till undervisning. Bedömning påverkar alla inblandade, inte minst lärare och elever och har från att vara något nästan odiskutabelt lyfts fram mer och mer som ett område som måste problematiseras och diskuteras (Carlsson, Gerrevall & Pettersson, 2016; Gipps, 1994; Lindberg, Eriksson & Pettersson, 2018). Bedömning är en komplicerad process som fordrar särskild kompetens där lärare och elever måste kunna verbalisera och argumentera för sin bedömning. I detta kapitel börjar vi med att beskriva olika syften som bedömning kan ha och vilka konsekvenser de kan få.

Bedömningens olika syften

Bedömning har olika syften och får därför olika konsekvenser. Syftet kan vara bedömning för lärande, så kallad bedömning i formativ mening, och är en utgångspunkt för utveckling och fördjupning av lärande och undervisning. Bedömning i formativ mening består enligt Black & Wiliam (2009) av tre nyckelprocesser; att fastställa var eleven är i sitt lärande, vad hen ska nå och vad som behövs för att komma dit.

Läraren är ansvarig för att designa och implementera en effektiv lärandemiljö och eleven är ansvarig för sitt lärande i denna miljö. I nyckelprocesserna ingår att tydliggöra intentionerna med undervisning och lärande och kriterierna för bedömning, att använda olika metoder för att belysa vad eleven visar för kunskaper samt att ge feedback som för elevers lärande framåt. Feedback är en komplicerad uppgift och enligt Brookhart (2008) innebär det att ge eleverna adekvat information om dennes kunnande i rätt tid och i det sammanhang där den kan göra mest nytta. Det har visat sig att feedback, som är inriktad mot vad eleven konkret har visat för kunskaper i lösandet av en viss uppgift, är mer effektiv för elevens lärande än en mer allmän feedback om elevens visade kunskaper i matematik. Mindre effekt har feedback om den huvudsakligen fokuserar produkten eller det oreflekterade "görandet", till exempel ett fokus enbart på om en uppgift är rätt eller fel (Hattie & Timperley, 2007). Wiliam (2016) menar att om inte feedback förändrar elevens lärande på något sätt har det troligtvis varit slöseri med tid. Genom att *observera* och fråga eleverna medan de är engagerade i olika matematikaktiviteter kan läraren få ovärderlig information om elevernas färdigheter, matematiska resonemang och attityder och därigenom kunna ge adekvat feedback i en "naturlig" situation. Läraren måste dock ha en klar uppfattning om *vad* hen vill bedöma och frågorna måste vara formulerade på ett sätt som gör att svaren ger önskad information (Hodgen & Wiliam, 2006). Om inte eleven kan förstå och ta till sig den feedback som ges är den oanvändbar (Frey, Hattie & Fisher, 2018). Feedback kan inte betraktas som en envägskommunikation utan något som sker mellan lärare och elev eller mellan elever. Elevens arbete, förståelse, förmågor och kunskaper är alla feedback på undervisningen och lärarens kompetens.

Förutom att läraren bedömer måste eleverna kunna bedöma sina kunskaper själva och kunna agera för ett fruktbart fortsatt lärande. Självvärdering, såväl elevens som lärarens, är en viktig del i den formativa processen liksom att undervisningen anpassas till resultaten av bedömningen.

Syftet med en bedömning kan också vara att ge en samlad bild av den kunskap som eleven visat och kan beskrivas som en bedömning i summativ mening. Den bedömningen görs ofta i slutet av en termin eller en kurs för att ge ett omdöme eller ett betyg, till skillnad från bedömning i formativ mening som sker kontinuerligt. De nationella proven, högskoleprovet och de nationella och internationella utvärderingarna är exempel på bedömningar i summativ mening. Det hindrar dock inte att resultatet av en sådan bedömning också kan användas formativt.

Den viktiga vad-frågan...

Oavsett syftet med bedömningen ska den vara relevant och adekvat. Bedömningen ska bygga på den kunskap som visas eller har visats och här ingår en reflektion över vad som bedöms och vad som *inte* bedöms. Bedöms det som är väsentligt att bedöma eller bedöms något annat, exempelvis det enkelt mätbara? I ett medvetet bedömningsarbete ingår att bestämma sig för vad som ska bedömas och vad eleverna ska lära sig samt att låta detta val vara närvarande genom hela bedömningsprocessen (Pettersson, 2013). Bedömning i hela dess bredd inklusive feedback måste planeras och genomföras lika omsorgsfullt som undervisningen (Frey, Hattie & Fisher, 2018).

Det innehåll som väljs ut för bedömning är dock endast ett stickprov av den kunskap som kan förekomma och som är relevant. Det går inte att bedöma allt som en person kan och bedömningen är alltid begränsad till innehåll och form. Nuttall (1987) menar att all bedömning baseras på ett urval av beteenden (exempelvis visad kunskap) och vid bedömningen väger man samman de olika underlagen och skapar en sammanfattande bild av elevens visade kunskap utifrån dessa. Men att göra ett stickprov av det som ska bedömas innebär att någon ska avgöra vad som ska bedömas och vad som inte ska bedömas. Det är framför allt två saker som kan störa bedömningskvaliteten. En är att det som bedöms är irrelevant, en annan är att det som bedöms är relevant, men att det inte täcker allt det som ska bedömas. Det är därför inte representativt. Är det till exempel en viktig aspekt av matematisk kompetens att kunna använda och kommunicera matematik i olika situationer, men det som bedöms koncentrerar sig enbart på den kunskap som krävs för att lösa uppgifter där endast ett svar är rätt, är troligtvis bedömningen relevant men inte representativ eftersom inte alla angelägna aspekter av matematisk kompetens bedöms (Pettersson, 2018a). Urval av innehåll för bedömning ger också en signal om vad som är viktigt att kunna. Såväl lärares undervisning som elevers lärande påverkas av vad som bedöms (Gipps, 1994).

...och sedan kommer hur

Nästa fråga som måste besvaras är hur vi bedömer elevernas visade kunskap och då är det viktigt att påminna sig om att det är bara den visade kunskapen som kan bedömas. Hur ska vi få eleverna att visa ett brett spektrum av kunskap i matematik? När eleverna visar kunskap i matematik, hur ska vi bedöma den? Nästa steg är att analysera och tolka den visade kunskapen, och att sedan dokumentera den och till sist att kommunicera den.

En viktig komponent är bedömningssituationen. En bedömningssituation kan vara ett problem som presenteras för eleverna, en diskussion eller en annan aktivitet i klassrummet, en fråga eller något annat som lockar fram elevernas reflektioner och svar.

Bedömningsprocessen innebär flera steg oavsett om det är en bedömning i formativ eller summativ mening som avses. Innehåll och form för bedömningen måste väljas, elevens arbete med uppgiften/problemet måste observeras, beskrivas, analyseras och tolkas och därefter dokumenteras för att när det gäller bedömning i formativ mening sedan avgöra vilket gensvar eleven ska få och hur eleven och läraren ska gå vidare. Vid betygssättning eller vid bedömning huruvida en elev har uppfyllt kunskapskravet eller ej måste en jämförelse mellan elevens visade kunskap och kunskapskrav och kriterier göras.

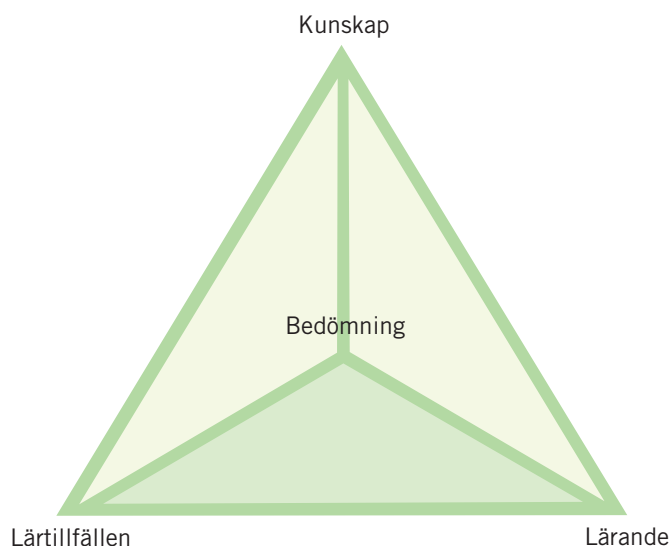
En del i processen för att beskriva elevens visade kunskap och kunskapsutveckling på ett allsidigt sätt är att analysera hur eleven har arbetat och löst olika uppgifter vid olika tillfällen. Lämpliga frågor kan då vara:

- Har eleven försökt lösa/arbota med uppgiften?
- På vilka sätt har eleven förstått uppgiften?
- På vilka sätt har eleven löst/arbetat med uppgiften?
- Vilken kunskap har eleven behärskat vid sitt arbete med uppgiften?
- Vilken kunskap har eleven inte behärskat vid sitt arbete med uppgiften?
- Vilka analyser och slutsatser har eleven dragit av resultaten?

Sedan vidtar uppgiften för bedömaren att sammanställa en analys av elevens visade kunskap genom svaren på ovanstående frågor. Oavsett om bedömningen är formativ eller summativ måste bedömaren ha en strategi eller en metod för hur respektive elevs visade kunskap ska bedömas. Informationen som kommer fram vid bedömningen måste sedan dokumenteras och kommuniceras till alla berörda för att lämpliga åtgärder ska kunna vidtas. En viktig del för läraren i bedömningsprocessen är att ge elever gensvar och att ta emot gensvar av elever. Det kan bidra till att både lärandeprocessen och undervisningsprocessen blir mer konstruktiv.

Allt hänger ihop

För att bedömning ska kunna ha möjlighet att vara ett kraftfullt verktyg för lärandet måste bedömning ses i ett sammanhang. Det sammanhanget illustreras med nedanstående figur (Pettersson, 2010) och är uppbyggt av relationer mellan kunskap, bedömning, lärande och lärtillfällen. Lärtillfällen är i ett skolsammanhang oftast lika med undervisning.



Bedömning av kunskap och för lärande i matematik är fokus (det skulle kunna vara bedömning av attityder eller något annat). Kanten bedömning och kunskap illustrerar en summerande bedömning av kunskap och för en sådan bedömning behövs bara denna kant. Det finns då inget intresse för hur eleven har lärt sig eller i vilka situationer som hen har lärt sig utan det är bara kunskap visad vid ett visst tillfälle som tas i beaktande.

En bedömning för lärande tar hänsyn till alla inbördes relationer mellan kunskap, bedömning, lärande och lärtillfällen (undervisning). Den innefattar också återkoppling både till elevers visade kunskaper och till undervisning. Det är en bedömning som sker kontinuerligt och som ska utveckla och förbättra såväl lärande som undervisning. Utgångspunkten är det valda kunskapsinnehållet och ett urval av detta. Utifrån resultatet av bedömningen av den lärandes (elevens) visade kunskap påverkas såväl det fortsatta kunskapsinnehållet för undervisningen (lärtillfällena) och undervisningsmetoderna och elevens strategier samt också den bedömning som senare kommer att ske. Frågorna är i detta fall många som kan ställas. Här ges några exempel. Varför visas den kunskap som visas? Visas den kunskap som jag som lärare förväntade skulle visas? Får jag verkligen visa min kunskap som elev? Hur planerar jag som lärare min undervisning utifrån resultatet av bedömningen och de mål som ska nås? Får eleverna möjlighet att allsidigt visa kunskap i matematik? Hur planerar jag som elev mitt lärande utifrån mitt resultat och utifrån de mål som jag vill/ska uppnå?

... och får konsekvenser

All bedömning får konsekvenser och det på många olika nivåer, på nationell, kommunal, skol-, klass- och individnivå. Resultat från bedömningar som internationella och nationella undersökningar kan få konsekvenser på styrdokument och resursför-

delning och på den allmänna debatten om skolan (Pettersson, 2018b). Inledningsvis skrev vi att bedömning är en ständig följeslagare till undervisning. Det innebär att bedömning får konsekvenser för bland annat undervisningens innehåll och form, men också för den enskilde eleven.

Vad kan då bedömning innebära för den enskilde? Konsekvenserna av bedömning kan illustreras med följande figur (Pettersson, 2007):



En bedömning som stödjer och stimulerar lärandet innebär att elevens visade kunskap analyseras och värderas så att eleven utvecklas i sitt lärande och känner tilltro till sin egen förmåga (jag kan, vill, vågar). I stället för en bedömning som leder till en dom och kanske till ett fördömande (jag kan inte, vill inte, vågar inte).

Bedömning har ofta förknippats med prov och betyg och då för många haft en negativ klang. Bedömning kan upplevas som en dom, ett fördömande och som en återvändsgränd för vidare lärande. Om bedömning används konstruktivt kan den innebära en kraftig utvecklingspotential för lärande. Det är viktigt att vi också reflekterar kring hur vi som lärare och våra elever ser på bedömning. Erickson (2017) liknar en negativ inställning till bedömning med ett tandläkarbesök

"det måste göras, men det är inget man går och tänker på med glädje och förväntan, och den absoluta förhoppningen är att det går fort, att det inte händer för ofta och framförallt inte gör ont" (s 9)

En effektiv lärandemiljö utmärks av stor flexibilitet både vad gäller undervisning och bedömning. En konsekvens av detta är att även de sätt man bedömer på och de instrument man använder sig av utmärks av stor flexibilitet. Det är viktigt att eleverna ställs i olika situationer så att de får visa sin matematiska kompetens på olika sätt, muntligt, skriftligt och i handling. Kapitel 4 kommer bland annat att handla om det.

Förslag till diskussioner/aktiviteter

1. Analysera en situation med hjälp av figuren som visar relationen mellan kunskap, bedömning, lärande och lärtillfällen.
2. Vilket arbetssätt/förhållningssätt riskerar att eleverna får inställningen ”Jag kan inte, jag vill inte, jag vågar inte”?
3. Hur och med vad kan ni arbeta för att eleverna ska få inställningen ”Jag kan, jag vill, jag vågar”?

Referenser

- Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*. 21, 5–31.
- Brookhart, S.M. (2008). *How to get effective feedback to your students*. Alexandria VA: ASCD.
- Carlsson, C-G., Gerrevall, P. & Pettersson, A. (2016). *Bedömning av yrkesrelaterat kunnande*. Stockholm: Liber.
- Erickson, G., (2017). Från iskallt till glödhet – eller vidbränt...? I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning, "Alla människors möte borde vara så"* Vänbok till Astrid Pettersson. (s. 6–16). Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Frey, N., Hattie, J. & Fisher, D. (2018). *Developing Assessment-capable visible learners. Grades K-12. Maximizing skill, will, and thrill*. California: Corwin Literacy.
- Gipps, C. (1994). *Beyond testing: Towards a theory of educational assessment*. London: Falmer/Routledge.
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of feedback. *Review of Educational Research*. 77(1); 81–112.
- Hodgen, J. & Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box. Assessment for learning in the mathematics classroom*. London: Department of Education Professional Studies. Kings College.
- Lindberg, V., Eriksson, I. & Pettersson, A. (red). (2018). *Lärares bedömningsarbete. Förutsättningar villkor och agens*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Nuttall, D. (1987). The validity of assessment. *European Journal of psychology of Education*. 11, 109–118.
- Pettersson, A. (2007). Pedagogisk bedömning – bedömning för lärande. I M. Olofsson. (red). *Bedömning, flerspråkighet och lärande. Symposium 2006*. (s. 11–20). Stockholm: HLS Förlag.
- Pettersson, A. (2010). Bedömning av kunskap för lärande och undervisning. I S. Eklund (red). *Bedömning för lärande – en grund för ökat kunnande*. (s. 6–18). Stockholm: Stiftelsen SAF i samarbete med Lärarförbundet.
- Pettersson, A. (2013). Bedömning – varför, vad och varthän? I L. Lindström, V. Lindberg & A. Pettersson (red). *Pedagogisk bedömning. Om att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap*. (s. 31–42). Stockholm: Liber.

Pettersson, A. (2018a). *Vad bedöms och vad bedöms inte?* www.skolverket.se/kompetens-och-fortbildning/lorare/bedomning-och-betyg/artiklar-1.267071

Pettersson, A. (2018b). Vad kan lärare ha för nytta av internationella studier? I V. Lindberg, I. Eriksson, & A. Pettersson, (red). *Lärares bedömningsarbete. Förutsättningar villkor och agens.* (s. 149–171). Stockholm: Natur och Kultur.

Wiliam, D. (2016). The secret of effective feedback. *Educational Leadership*, april 2016, 10–15.

Bedömning som förbättrar lärandet

Inger Ridderlind och Margareta Enoksson

BEDÖMNING BETRAKTAS I detta kapitel som en del av undervisningen och kan vara ett sätt att förbättra lärandet. Bedömning kan ses som en process där lärare samlar in information och värderar elevers visade kunskaper. Informationen kan utgöra grunden för olika typer av ställningstaganden, till exempel planering av undervisning eller återkoppling till eleven (se kapitel 5). I detta kapitel är utgångspunkten för bedömning som förbättrar lärandet fem nyckelfaktorer, vilka är resultatet av en inventering av forskning om bedömning i klassrummet. Inventeringen är sammanställd av Assessment Reform Group (1999) och bygger i huvudsak på Black och Williams arbeten (1998 a, b).

Slutsatsen är att bedömning som förbättrar lärandet utmärks av

- effektiv feedback
- att eleverna engageras i sitt lärande
- att undervisningen anpassas till resultatet av bedömningen
- att bedömningens inflytande på motivation och självuppfattning erkänns, eftersom båda har avgörande betydelse för lärandet samt
- att eleverna behöver bedöma sina prestationer för att förstå hur de ska förbättra dem.

Detta kapitel utgår från och belyser några aspekter av respektive nyckelfaktor.

Effektiv feedback

En viktig del i den formativa bedömningen är feedback. Feedback används i det svenska språket både som återkoppling och gensvar. I detta kapitel används begreppen synonymt och alla tre orden kommer att användas. Återkoppling kommer efter någon form av bedömning av elevens prestation. Återkopplingen kan vara muntlig och ges kontinuerligt i undervisningen eller skriftlig efter en inlämnad uppgift. Den enklaste formen av återkoppling kan vara en kort muntlig bekräftelse från läraren till eleven om att arbetet med en ny färdighet är på rätt väg. Återkoppling har en viktig funktion i lärandeprocessen (Gipps, 2012). För att stödja lärandet ska återkopplingen vara framåtblickande och ta sin utgångspunkt i den bedömning som gjorts av elevernas visade prestationer. Det handlar också om hur eleven tolkar den återkoppling som ges. Eleven behöver ses som en aktiv deltagare som medverkar i sin lärandeprocess.

All återkoppling har inte positiva effekter (Hattie & Timperley, 2007; Shute, 2008). En återkoppling riktad mot den personliga nivån kan ha negativa konsekvenser och fungerar sämre för lärandet än ingen återkoppling alls. Det är viktigt att rikta återkopplingen mot elevens lösning av uppgiften, det matematiska innehållet, processen eller metakognitionen, inte mot personen eller jaget. Återkoppling eller gensvar till eleven ska blicka framåt och leda kunskapsutvecklingen vidare och bör bestå av följande delar.

- Vilken kunskap har eleven hittills visat?
- Hur står sig elevens visade kunskap i förhållande till kunskapsmålen i matematik?
- Vad ska eleven och läraren inrikta sig på för elevernas fortsatta lärande?

(Pettersson m.fl., 2010, s.61)

Några kvistiga frågor

Det finns ett antal frågor en lärare behöver reflektera över i arbetet med återkoppling till eleverna. Att arbeta med återkoppling och till exempel skriva gensvar tar en stor del av lärarens arbetstid. Läraren bör tänka igenom till vilka uppgifter och i vilka situationer som återkopplingen ger mest positiv effekt på kunskapsutvecklingen.

- När ska eleven få återkoppling?
Är det till exempel en ny färdighet som en yngre elev tränar in behöver återkopplingen troligtvis komma snabbare än om det är en äldre elev som lämnar in till exempel ett projektarbete.
- Hur ska återkopplingen formuleras?
Återkoppling i form av en fråga så att eleven får hjälp med nästa steg i lärandet är mer gynnsamt för lärandet än att ge en fullständig lösning av uppgiften (Hattie & Timperley, 2007). Textmängden i ett skriftligt gensvar behöver anpassas till elevens ålder och inte vara alltför omfattande. Syftet med ett gensvar är att eleven ska ta till sig gensvaret och bli medveten om att matematikkunskaper alltid kan utvecklas. En återkoppling med betyg och poäng medför att eleverna fokuserar betyget eller poängen och inte innehållet i kommentarerna (Butler, 1987). Alla elever oavsett prestationsnivå behöver konstruktiv återkoppling, men återkopplingen kan vara svårare att formulera när det är svårt att identifiera nästa steg.
- Förstår eleven återkopplingen?
I en muntlig återkoppling kan det vara lättare för läraren att uppfatta om eleven har förstått återkopplingen. Att formulera återkoppling på matematiskt innehåll är svårare än att ge återkoppling på form, till exempel dra raka streck med linjal. I ett brittiskt aktionsforskningsprojekt (Black, Harrison, Lee, Marshall & Wiliam, 2003) arbetade lärarna med återkoppling. Vid projektets början skrev lärarna kommentarer som ”Bra arbete, du har försökt hårt”. Återkopplingen syftade till att uppmuntra eleven men den gav inte eleven vägledning vidare i arbetet. Efterhand utvecklades lärarnas återkopplingar på det genomförda arbetet och vägen framåt i kunskapsutvecklingen. Utvecklingen av återkoppling från läraren gav också resultat för eleverna.
- Får eleverna tid att ta till sig återkopplingen och arbeta med det gensvar som de har fått? I svenskämnet har lärare arbetat med processkrivning under många år, men i matematik har traditionen inte varit lika utbredd vid arbete med uppgifter. Vilka möjligheter får eleverna att fortsätta att arbeta med matematikuppgifter efter ett gensvar?
- Vem ska ge återkopplingen?
I klassrummet finns det möjligheter att använda kamraterna som resurser för att ge återkoppling till varandra (kamratbedömning). En grupp lärare som arbetade i en forskningscirkel om gensvar kom fram till följande slutsatser.

Det tar tid att arbeta med gensvar på ett konstruktivt sätt så att det blir meningsfullt såväl för lärare som för elever. Lärare och elev måste få kunskap om gensvar och vara flexibla och beredda att göra om och göra på annorlunda sätt.../ Att bara be eleverna att ge två beröm och en önskan om förbättring gav bara ytliga gensvar. (Pettersson, 2011, s 14).

För att få en bättre grund för vad och hur eleven ska förbättra arbetade lärarna med diskussioner om kvaliteter, vad som utmärker ett bra arbete. Genom att arbeta med gensvar kan eleven få en känsla för olika kvaliteter, kan lättare se vad som är bra och vad som behöver förbättras, ändras eller läggas till i sitt eget arbete. Lärarna i forskningscirkeln menar också att eleverna tar emot ett gensvar från en kamrat på ett bättre sätt än av en lärare. Det kan handla om att eleverna är i en mer jämlik situation och "talar samma språk".

Exempel på återkoppling

Att skriva en återkoppling som främjar lärande är inte enkelt. Green (2014) har undersökt vad som händer när gymnasieelever ges en formativ återkoppling i matematik. Hennes slutsats är att hälften av eleverna upplevde återkopplingen som användbar men den andra hälften läste återkopplingen utan att reflektera eller använda den.

I ett arbete med gensvar fick eleverna i en högstadielklass arbeta med följande uppgift.

Borcellos pizzeria säljer runda pizzor i två olika storlekar men med samma tjocklek. De stora pizzorna har en radie som är 20 % större än de små pizzornas radie. De stora pizzorna är 25 % dyrare. Vilken pizza bör man köpa om man vill ha så mycket pizza som möjligt för pengarna?

© Skolverket¹

Så här löste en elev uppgiften:



Om den lillas radie är 100 så kommer den storas radie att bli 120, eftersom 20% av 100 är 20. $100 + 20 = 120$.

Om den lillas pris är 100 kr så kommer den storas pris bli 125.

Man tjänar alltså på att köpa den lilla pizzan.

Läraren gav skriftliga gensvar till elevernas arbeten. Till detta elevarbete skrev läraren: Din lösning är lätt att följa. Du gör ett resonemang om radie, men det är arean på pizzan som man "äter". Vilken slutsats kan du dra utifrån nya beräkningar?

¹ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2009

Elevarbete efter gensvar:


$$1 \cdot 1 \cdot \pi \approx 3,14 \text{ cm}^2$$
$$1,2 \cdot 1,2 \cdot \pi \approx 4,52 \text{ cm}^2$$

Om vi antar att den lilla pizzans pris är 20 kr
så blir den stora pizzans pris 25 kr eftersom 25% av 20 är 5.

Lilla pizzan: arean: $3,14 \text{ cm}^2$ och pris: 20 kr $\frac{3,14}{20} \approx 0,16 \text{ cm}^2/\text{kr}$

Stora pizzan: arean: $4,52 \text{ cm}^2$ och pris: 25 kr $\frac{4,52}{25} \approx 0,18 \text{ cm}^2/\text{kr}$

Om man köper den stora pizzan får man mer för varje krona.

Efter gensvaret beräknade eleven arean per krona på de båda pizzorna. Slutsatsen är nu korrekt och underbyggd med beräkningar. Flera elever i gruppen fick ett liknande gensvar då de utgick från diameter istället för area i sina lösningar. Eleverna tog fasta på gensvaren de fick och många valde en aritmetisk lösningsmetod.

Shute (2008) har utifrån en rad forskningsartiklar sammanfattat råd som utmärker återkoppling som är gynnsam för lärandet. Återkoppling kommer efter en elevs försök att lösa en uppgift.

1. Fokus i återkopplingen ska vara på elevens arbete, inte personen. Ge inte återkoppling som hotar självförtroendet och var försiktig med beröm.
2. Undvik poäng/betyg i samband med återkopplingen så att elever inte kan jämföra sig med varandra.
3. Tydliggör mål och hur eleven ska arbeta vidare. Var specifik och tydlig med innehållet och ta hänsyn till elevens ålder.
4. Återkopplingen ska inte vara för omfattande. Eleven ska kunna läsa den och agera på innehållet. Ändra fokus från prestation till lärande.

Eleverna engageras i sitt lärande – elevmedverkan

Ett centralt budskap i den moderna bedömningsforskningen är att möjliggöra för eleverna att engagera sig i sitt lärande och involveras i bedömningen för att bättre kunna följa sin kunskapsutveckling och bli ägare av sitt lärande (Wiliam, 2010). Det finns många olika metoder för att engagera eleverna i lärandet, till exempel genom att främja metakognition och reflektion av arbete. Det kan vara att fråga eleverna vad syftet var med en aktivitet eller be dem formulera ett lärandemål efter lektionens slut. "Vad ska du kunna efter denna laboration? Vad var syftet med det vi undersökte?"

Självbedömning

Elevers förmåga att återkoppla till sitt lärande är ett viktigt steg på väg mot att bli en elev som själv kan styra sin lärandeprocess. Processer som innebär att eleven själv reglerar lärandet genom att formulera mål, understödja inre processer som motivation, kontroll och beteende för att nå dessa mål faller inom begreppet '*self-regulate learning*', självreglerat lärande. Forskningen visar att självreglering och akademisk framgång är nära kopplat till varandra (Andrade, 2010). För att utveckla eleverna till att följa sin egen kunskapsutveckling, bli mer delaktiga och reglera sin lärandeprocess kan läraren använda en rad olika metoder.

I MiMa-projektet, Min egen Matematik, användes många olika metoder för att stödja eleverna att reglera sin lärandeprocess och följa sin kunskapsutveckling. I projektet arbetade lärare tillsammans med PRIM-gruppen (www.su.se/primgruppen) för att göra eleverna mer medvetna om sitt lärande och sitt matematiska kunnande samt öka intresset för matematik. De metoder som lärarna använde var framförallt att synliggöra målen för lärandet och att aktivera eleverna i bedömningsprocessen. För att öka elevernas delaktighet

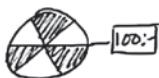
- används värderingsscheman eller elevens självbedömning
- bedömer eleverna sina arbeten eller prov
- konstruerar eleverna uppgifter
- reflekterar eleverna kring frågor och utvärderar till exempel arbetsområden
- skapar eleven sin elevbok.

Elevbok – skriva för att lära

Det finns många olika sätt att använda skrivandet som en del i lärandeprocessen i matematik. Det kan vara i form av en loggbok som används för alla ämnen eller i form av en elevbok med inriktning matematik. I MiMa-projektet användes elevbok för att skriva förklaringar, tankar, ord, begrepp och regler som en hjälp vid lärandet. De äldre eleverna bestämmer själva vad och hur mycket de vill skriva och det är elevens egna formuleringar som är det centrala. Det handlar inte om att skriva av från en powerpoint eller tavlan, utan att själv skriva med sina egna ord och förklara ett begrepp. För yngre elever kan läraren stödja skrivandet genom att hjälpa eleverna med centrala begrepp som de kan skriva om, till exempel dubbelt.

De äldre eleverna, i MiMa-projektet, använde elevbok under hela sin högstadietid (Ridderlind, 2014). Att använda elevboken över flera år ger eleverna möjlighet att gå tillbaka och läsa vad de tidigare har skrivit inom ett arbetsområde och lägga till nya kunskaper eller revidera. Boken kan vara i form av lösa blad i en pärm där det är lätt att ändra och revidera eller i en tom anteckningsbok där strukturen är viktig då det annars kan vara svårt att hitta. Boken är ett stöd i lärandet och det är först när eleven själv formulerar en förklaring som förståelse skapas. Detta uttrycker ett flertal elever. Det blir effektivt för elevens lärande att läsa sina formuleringar. Om eleven behöver gå tillbaka till ett gammalt arbetsområde är det mycket lättare att läsa den egna förklaringen än att läsa en förklaring i en lärobok. Elevboken kan användas som stöd i klassrumsarbetet och som stöd vid arbete i hemmet, då det kanske inte finns någon att fråga. För flerspråkiga elever finns möjlighet att skriva ord och

begrepp både på modersmålet och det kunskapsrelaterade språket i matematik. Det finns också möjlighet att använda elevbok för ett begränsat arbetsområde som till exempel geometri där det finns många ord att förklara som hörn, sida, kant, volym, area med mera.



Hur många procent dyrare?
 Prisskillnad: 20 :- $\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 25\%$

Hur många procent billigare?
 Prisskillnad: 20 :- $\frac{20}{100} = 20\%$

MOMS

En vara kostar med moms 200 kr.
 Momsen är 25%. Vad kostar varan utan moms.

• x = varans pris utan moms
 $x \cdot 1,25 = 200$
 $x = 160$

Svar: Den kostar 160 kr utan moms

Om man lägger till 25% på någonting måste man ta bort 20% för att få tillbaka priset från början. Det kan man göra genom att ta $\cdot 0,8$. Formeln för att veta vad man ska ta för att få tillbaka talet som var från början när det handlar om 25% och 20% är $1,25 \cdot 0,8 = 1$

Utdrag ur elevbok i årskurs 8. Eleven har skrivit förklaringar om hur procent kan beräknas utifrån olika frågeställningar.

Aktionsforskning

I Linköping och Norrköping har ett aktionsforskningsprojekt genomförts där elever använde skrivandet för att utveckla självreglerande processer (Björklund Boistrup, Samuelsson, Dahlsjö & Ingelshed, 2013). Det handlar om hur eleven söker hjälp, håller uppsikt, håller fokus och ingriper i matematikundervisningen. Läraren har det övergripande ansvaret för att utveckla elevernas självreglering och en rad olika metoder användes i projektet. Lärarna ställde enkla frågor efter en lektion, till exempel

- Har du några frågor efter lektionen?
- Vad behöver du lära dig mer om?
- Hur kan du göra?
- När?

(Björklund Boistrup m.fl., 2013, s. 33)

För att bli delaktig behöver eleverna själva bestämma över vilka uppgifter de ska arbeta med. För läraren kan det vara en organisatorisk fråga att kunna erbjuda uppgifter av olika svårighetsgrad. Eleverna kan då välja lämpliga uppgifter utifrån behov. Delaktigheten handlar också om elevernas reflektioner om arbetsformer, förväntningar på undervisning eller lärarens förklaringar.

När eleverna resonerar om hur de ska bli delaktiga ställer de sig oftast indirekt följande frågor

- Vilka (förändrade) strategier, hur, ska jag göra för att lärandet ska gå bättre?
- Vilka åtgärder önskar jag att läraren ska göra?

(Björklund Boistrup m.fl., 2013, s. 37)

Projektet visade att lärarrollen förändrades och elevernas engagemang i matematikundervisningen ökade.

En samlad forskning (Andrade, 2010; Ridderlind, 2014; Stiggins, 2010; Wiliam, 2010) visar att det finns samband mellan elevers förmåga till att bli aktiva i sin kunskapsutveckling, självreglerande processer och elevernas prestationer. Det viktiga i arbetet med att engagera eleverna i sin läroprocess är att lärarna själva är medvetna, aktiva och använder de sätt och de strategier som passar läraren och elevgruppen bäst.

Klassrumsdiskussioner

För att få elever att medverka i lärandet har diskussionerna i klassrummet betydelse. En effektiv klassrumsdiskussion kännetecknas av att missuppfattningar blir synliga och att centrala matematiska idéer blir belysta för att utveckla elevernas begreppsliga förmåga. Diskussionerna ska vägleda arbetsprocessen i klassrummet (Gipps, 2012). För att engagera eleverna i sitt lärande är klassrumsklimatet viktigt. I ett engelskt projekt (Black m.fl., 2003) användes olika metoder i klassrummet för att förändra frågorna och ge större utrymme för fler elever att svara. Lärarna i projektet utökade väntetiden (tiden från att läraren ställer frågor tills någon svarar) vilket medförde att fler elever blev engagerade i frågorna. En annan modell utgår ifrån att eleven först får tänka själv, sedan diskutera i par för att slutligen diskutera i helklass (Ensam Par Alla – EPA).

Det finns olika metoder lärare kan använda för att öka delaktigheten i diskussionerna. Istället för att använda traditionell handuppräckning, det vill säga att den elev som anser sig kunna svaret räcker upp handen, kan läraren slumpmässigt välja ut elever som ska svara på frågan (Wiliam, 2011). Läraren kan använda digitala verktyg, ha lappar eller glasspinnar med elevernas namn. Den elev vars namn dras får svara. Eleverna blir snabbt vana vid att allas röster och synpunkter är viktiga. Metoden är delvis omstridd men syftet är att motverka att elever med stigande ålder tystnar i klassrumsdiskussionerna.

Ett annat sätt att aktivera alla elever är att använda miniwhiteboards. I början av en lektion kan eleverna till exempel skriva ner något begrepp de minns från föregående lektion. Läraren får då snabbt en återblick och kan skapa en utgångspunkt

för lektionen. Miniwhiteboards kan användas för att utvärdera eller skatta om eleverna har uppfattat och förstått en förklaring eller en genomgång. Eleverna kan arbeta med en uppgift enskilt eller i par och sedan skriva lösningen på mini-whiteboarden. Den kan ersätta handuppräknings, istället för att en elev svarar kan alla enkelt få redovisa sina svar. Det eleven skriver kommer inte att sparas och det gör arbetssättet till ett friare verktyg. Det som skrivs behöver inte vara helt perfekt utan ett sätt att sätta ord på tankar. Det finns även digitala verktyg som kan användas istället för miniwhiteboards. Att skapa ett tryggt klassrumsklimat är en del av lärares yrkesprofession och varje lärare måste utforma sina strategier för att skapa detta klimat.

De formativa inslagen i klassrumspraktiken kan variera och resultaten från de engelska projekten (Hodgen & Wiliam, 2006) visar grunder för lärandet

- Börja där eleven befinner sig.
- Eleven måste vara aktiv.
- Eleven måste samtala om sina uppfattningar i matematik.
- Eleven måste förstå syftet med det som ska läras.
- Återkopplingen ska visa eleven hur hen kan förbättra sina prestationer.

Återkopplingen från lärare till elev fungerar bara formativt om eleven får möjlighet att agera och använda återkopplingen för att förbättra lärandet (se kapitel 2).

Undervisningen anpassas till resultaten av bedömningen

Hattie (2009) betonar att det allra viktigaste för lärare är att kunna se undervisningen med elevernas ögon. Det handlar om att lärare söker eller är öppna för återkoppling från eleverna om vad de vet, kan, förstår, var de gör fel, missuppfattar med mera. En sådan återkoppling till läraren gör lärandet synligt och möjliggör i sin tur en återkoppling till eleverna som innebär en process där återkoppling och undervisning vävs samman. Den återkoppling lärare får från elever utgör en kraftfull faktor för att förbättra elevernas resultat. Genom observationer, bedömningar, diskussioner i klassen får läraren en bild av hur eleverna resonerar, vad de kan och vad de behöver utveckla. Läraren använder sedan denna återkoppling för att förändra undervisningen. Både lärare och skolledare behöver kontinuerligt fråga sig om undervisningen är verkningsfull, och i så fall för vilka elever och i vilken utsträckning?

Det första och viktigaste att göra för lärare när de planerar lektioner är att samarbeta med andra lärare i planeringsfasen och då använda sig av erfarenheter från sina tidigare lektioner. Det gäller att fokusera det som har fungerat bra för klasser och enskilda elever och basera planeringen utifrån det. Den största effekten på elevernas lärande uppstår när läraren lär av sin egen undervisning och när eleverna utvecklas till att själva reglera lärandet. Lärare behöver veta var eleverna befinner sig kunskapsmässigt och vad som är utmanande för dem.

Läraren kan kontinuerligt reflektera över frågorna

- Vilken grund har jag för att säkerställa kvaliteten på min undervisning och för att den ska ge resultat?
- Hur behandlas didaktiska frågor i det kollegiala samarbetet? Hur säkerställs kvaliteten?
- Engageras eleverna i en gynnsam lärandeprocess eller hålls de bara sysselsatta?
- Är fokus enbart den matematiska kunskapsutvecklingen eller används strategier och metoder för att utveckla självreglerat lärande?

De bästa förutsättningarna för lärande finns i de klassrum där man får göra misstag. Det är där undervisning och lärande frodas. Det måste finnas en hög grad av tillit mellan elever och lärare och mellan elever för att det ska fungera. Det måste vara tillåtet att säga att man inte förstår utan att få kommentarer av andra elever eller ignoreras av läraren (Enoksson, 2014). Om eleverna känner sig otrygga när bedömning sker kan det hos eleven finnas en rädsla för att läraren gör noteringar som senare kommer att leda till ett lägre betyg. Det kan medföra att eleverna blir tysta, inte vågar fråga eller vara delaktiga i diskussioner. Det är viktigt att skapa ett tillåtande klassrumsklimat där det är accepterat att inte kunna och där klassrummet är en arena för lärande.

Dokumentation

För att kunna anpassa undervisningen till resultatet av bedömningen behöver läraren sammanställa, analysera och dokumentera. Dokumentation fyller flera funktioner. Den ska synliggöra elevens kunskapsutveckling över tid, ge återkoppling till läraren för reflektion och planering av undervisning. Dokumentationen kan också utgöra den informella bedömningen när kunskaper ska sammanställas och summeras, till exempel inför ett utvecklingssamtal. Den är också viktig och utgör en stabilitet vid lärarbyten och skolbyten. I detta avsnitt beskrivs ett exempel på dokumentation i syfte att förbättra undervisning och följa elevens kunskapsutveckling.

På Skolverkets webbsida finns ett planerings- och bedömningsstöd, Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9. Stödet är knutet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) och har tagits fram av PRIM-gruppen. Syftet med materialet är att stödja och strukturera lärarens kontinuerliga bedömning av elevernas kunskapsutveckling samt ge en möjlighet för eleven att vara delaktig i sin kunskapsutveckling.

En utgångspunkt är att bedömning är en del av undervisningen och lärandeprocessen. Redan i planeringsfasen av ett nytt arbetsområde startar bedömningsarbetet. Vad är möjligt att analysera och bedöma under de veckor som läraren planerar för? Det webb-baserade materialet tar hänsyn till matematikinnehållet (centralt innehåll) som finns i arbetsområdet och förmågorna som undervisningen ska utveckla. Med hjälp av materialet skapar läraren en lärardokumentation. Lärardokumentationen består av bedömningsmatriser som kan anpassas till varje arbetsområde. I den kontinuerliga bedömningen av elevers kunskaper kan läraren göra noteringar utifrån olika situationer. Den visade kunskapen kan, förutom under matematiklektionerna, även visas under lek, rutinsituationer under skoldagen, i arbete med andra skolämnen, tematiskt eller i

Lärdokumentation

FYRHÖRNINGAR – OMKRETS OCH AREA, ÅRSKURS 5

Geometri

Klass/namn:

Datum:

Bedömning av svar		På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/Enkelt	Högt nivå
Problemlösning	I vilken grad eleven kan tolka muntlig och skriftlig information med matematiskt innehåll		Läser enkla geometriska problem med fyrhörningar, längd (bland omkrets) och area	
	I vilken grad eleven kan beskriva sitt tillvägagångssätt vid problemlösning med hjälp av matematikens uttrycksformer		Beskriver tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerande sätt	
	Kvaliteten på de strategier och metoder som eleven väljer		Väljer godtagbara strategier och metoder vid problemlösning	
Begrepp	Hur väl eleven tolkar resultat och drar slutsatser			
	I vilken grad eleven bedömer rimligheten i ett resultat			
	Hur väl eleven använder olika begrepp		Känner igen fyrhörningar även om de är vridna 45 grader.	
Metoder	Kvaliteten på elevens beskrivningar av olika matematiska begrepp och hur eleven då använder olika uttrycksformer		Jämför och namnger kvadrat, rektangel, romb och parallelogram	
	I vilken grad eleven visar kunskap om relationer och samband mellan olika matematiska begrepp		Beskriver fyrhörningar godtagbart utifrån egenskaper och använder några relevanta ord som höm och parallella sidor osv.	
			Beskriver fyrhörningars vinklar med orden rät, spetsig och trubbig	
			Vet vad som menas med area och omkrets	
			Använder för det mesta lämpliga enheter för area och omkrets	
Metoder	Hur väl metoden är anpassad till uppgiften/situationen		Använder någon godtagbar metod för att uppskatta, jämföra och bestämma omkretsen och arean hos fyrhörningar	
	Hur väl eleven genomför metoder och beräkningar		Beräknar arean på kvadrater och rektanglar med tillfredsställande resultat	
	Hur utvecklingsbara elevens metoder är		Använder miniatyrare	
Metoder	Hur väl eleven hanterar olika hjälpmedel			

Bilden är ett utdrag från Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9 och visar ett exempel på en Lärdokumentation för arbetsområdet "Fyrhörningar – omkrets och area" årskurs 5.

ämnesövergripande arbete. Utifrån noteringarna kan läraren göra en analys och föra in analysen i lärardokumentation på elevnivå eller klassnivå.

Till materialet hör olika typer av självbedömningar. Det finns öppna frågor som eleven kan besvara, vilket kan ge en god vägledning för att läraren ska få en uppfattning om elevens syn på sitt matematiklärande. Detta kan ge ett underlag för lärarens planering av undervisning.

Till materialet hör också underlag för att skapa självbedömningar med ett specifikt matematikinnehåll.

Säker Jag kan
Ganska säker Jag behöver öva lite mer
Osäker Jag behöver lära mig

Bedöm dina kunskaper om fyrhörningar, omkrets och area	Säker	Ganska säker	Osäker
Berätta för en kamrat hur jag har löst en uppgift	☐	☐	☐
Lyssna på en kamrats förklaring om hur den har löst en uppgift	☐	☐	☐
Redovisa mina uppgifter skriftligt så någon annan förstår vad jag menar	☐	☐	☐
Känna igen och namnge fyrhörningar, t.ex. ringa in alla fyrhörningar och namnge den blå och den gula	☐	☐	☐
    	☐	☐	☐
Beskriva en fyrhörning och använd ord som hörn, spetsig vinkel, parallella sidor t.ex. beskriva en romb	☐	☐	☐
	☐	☐	☐
Beskriva vad som menas med omkrets och area t.ex. beskriv eller visa vad som är omkrets och area i figuren	☐	☐	☐
	☐	☐	☐

Bilden är ett utdrag från Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9 och visar exempel på några påståenden för självbedömning. Den har koppling till lärarens dokumentation.

En självbedömning kan användas vid inledningen av ett arbetsområde, under arbetsområdet och mot slutet av ett arbetsområde. Självbedömningen ger information både till läraren och eleven. Läraren får syn på elevens tankar om vad hen behöver ytterligare undervisning om. Eleven kan reflektera över vad hen behöver arbeta mer med. I senare årskurser kan eleven använda samma dokumentationsblankett som läraren för att dokumentera sin kunskap. En självbedömning kan också tydliggöra för eleven matematikinnehållet inom ett område.

Läraren behöver bestämma när och hur ofta noteringar i lärardokumentationen ska göras. Det kan till exempel vara vid veckans slut eller vid bedömning av olika arbetsuppgifter eller en planerad bedömningssituation. Även om läraren har utformat en planering

för en lärardokumentation är det viktigt att kunna ”fånga kunskaper i flykten” och göra noteringar så att det inte bara blir den planerade bedömningen som dokumenteras.

Bedömningens inflytande på elevernas motivation och självuppfattning

Bedömning kan ha ett stort inflytande på elevers motivation och hur elever uppfattar sin förmåga att lära matematik. När eleven använder resultaten av bedömningen för att sätta rimliga förväntningar på sig själv får det inverkan på elevens lärandeprocess (Stiggins, 2008). Bedömningarna i klassrummet måste syfta till att hjälpa eleverna att synliggöra de framsteg och den utveckling som varje enskild elev gör över tid.

För elever som visar låga prestationer är det mycket viktigt att målen som eleven ska uppnå är rimliga utifrån elevens kunskapsnivå. För högt ställda mål kan medföra att eleven hamnar i en negativ spiral och ger upp lärandet. Elevernas tidigare erfarenheter av bedömning kan påverka synen på förmågan att lära. Det blir viktigt att visa på de framsteg eleverna gör, även om de är små.

Det finns en koppling mellan elevers prestationer och lärares förmåga att utveckla klassrumsbedömningar av hög kvalitet för att stödja elevers lärande (Stiggins, 2010).

En del är att använda bedömning som både motiverar och stödjer lärandet. Läraren behöver skapa en bedömning som visar på elevens prestation och föra en diskussion om resultaten. Klassrumsbedömningarna måste användas för att utveckla undervisningen och det är först när resultatet av bedömningen leder till ett bättre lärande som den formativa funktionen uppfylls. Eleverna behöver engageras i bedömning och utveckla bedömarkompetens.

Eleven tolkar återkopplingar, provresultat och skriftliga omdömen med mera och allt får konsekvenser för elevens självuppfattning. Det är inte bara den planerade bedömningen som påverkar eleven utan även samtalet i klassrummet kan få konsekvenser för hur eleven uppfattar sin förmåga att lära matematik.

Bedömningen har effekt på hur aktiva eleverna kan vara i matematikundervisningen. Björklund Boistrup (2010) visar i sin avhandling att då lärare kommunicerar återkoppling som beröm eller missnöje erbjuds eleven mindre möjligheter att bli aktiv i sitt lärande. Hon har studerat kommunikationen mellan lärare och elever. I sin studie fann hon olika diskurser där hon namnger en som ”Gör det fort och gör det rätt”. Det kan till exempel handla om huruvida svaret på en uppgift stämmer med facit eller inte och elevens tankar, resonemang och synpunkter efterfrågas sällan. En annan ytterlighet är ”Vad som helst duger”, där fokus är trivsel och det är inte så viktigt att eleven svarar korrekt eller att missuppfattningar avslöjas. I diskurserna ”Öppenhet med matematik” och ”Resonemang tar tid” är det fokus på matematiska processer, där eleverna ges möjlighet till engagemang och lärande i matematik i större utsträckning. Lärarna i studien anser att det är viktigt att de är medvetna om att deras eget agerande påverkar elevernas engagemang och lärande. När lärare ska hjälpa elever att förbättra sina resultat behöver de samtidigt reflektera över sitt sätt att bedöma, och då kan de fyra diskurserna vara ett bra underlag för reflektion.

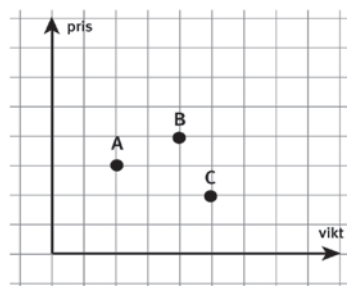
Klassrumsbedömningen är central då den är en ständig följeslagare till undervisning. Läraren behöver kontinuerligt utvärdera undervisningen och göra fortlöpande

bedömningar och analysera varför till exempel inte alla elever är aktiva i en undervisningsaktivitet. Att göra anpassningar av undervisningen under arbetsprocessens gång och få återkoppling från eleverna är väsentligt.

Elevernas motivation och självuppfattning kan utvärderas på olika sätt. Hur uppfattar eleverna ett arbetssätt, en klassrumsdiskussion, hur har lektionstiden använts, vad har de lärt sig under en eller flera lektioner, det matematiska innehållet med mera? Att uppfatta sin förmåga att lära sig matematik som utvecklingsbar och ha uthållighet i både medgång och motgång har betydelse för kunskapsutvecklingen. Ett sätt att snabbt organisera återkopplingen från elever till lärare är att använda *exit tickets* eller *exit notes*. De kan användas i början eller i slutet av en lektion och vara en konkret fråga till eleverna. Det kan också vara en uppgift som snabbt kan lösas av eleverna. Har undervisningen behandlat proportionalitet kan eleverna få följande fråga som exit ticket.

Diagrammet visar vikt och pris på tre godispåsar.

- Vilken påse kostar minst?
- Sätt en ny punkt i diagrammet som visar en godispåse som väger mindre än B, men som har samma pris per hektogram.



© Skolverket²

Läraren kan utvärdera hur väl undervisningen fungerar, om något behöver repeteras eller om undervisningen bör ta en ny inriktning. Det är ett stöd för läraren att kunna fånga upp elevers olika attityder, motivation och förståelse som underlag för det fortsatta planeringsarbetet. Istället för papperslappar kan digitala verktyg användas. Alla elever ges möjlighet att svara och undervisningen utgår ifrån elevernas behov vilket kan medföra att eleverna blir mer engagerade. Alla elevers lärande blir lika viktigt, vilket är en stor vinst. Att läraren läser vad varje elev har skrivit skapar känslan av att varje individs bidrag är viktigt. I undervisningen nästkommande lektion har läraren möjlighet att lyfta goda exempel, återkoppla och uppmärksamma missuppfattningar.

Eleverna behöver bedöma sina prestationer för att förstå hur de kan förbättra sig

För att göra eleven medveten om sin kunskapsutveckling behöver eleven själv kunna avgöra om ett lärandemål är uppnått och veta hur hen ska planera det fortsatta arbetet. Eleven behöver också veta vad en kvalitet i kunnandet innebär. Genom att göra eleverna delaktiga i bedömningsprocessen får de möjlighet att själva reflektera över kvaliteter, missuppfattningar och på olika sätt använda information från bedömningen. I MiMa-projektet konstruerade eleverna själva

² Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2009

uppgifter för att visa på olika kvalitativa nivåer. Eleverna fick säga varför uppgiften var lätt respektive svår och de äldre eleverna fick motivera varför en uppgift prövar högre kunskaper än E. De löste varandras uppgifter och i diskussionerna fick de möjlighet att jämföra olika lösningar.

Eleverna bedömde även sina prestationer på prov själva. Eleverna kallade det för att "rätta provet". Syftet är att låta eleverna reflektera över vad de kan respektive inte kan. Läraren bedömer elevernas prestationer på provet men gör inga anteckningar i elevernas lösningar, utan fyller i en blankett där resultatet antecknas för varje uppgift (Pettersson m.fl., 2010). Eleverna får sedan bedömningsanvisningar med eventuella lösningsförslag och en blankett där de fyller i sin poäng, samt kommenterar "varför jag inte ger min egen lösning full poäng". Elevens bedömning jämförs sedan med lärarens bedömning där de båda bedömningarna oftast stämmer väl överens, men det förekommer att eleven har varit "hårdare" i sin bedömning. I projektet blev diskussionerna under bedömningsarbetet värdefulla, men också upptäckter gjordes om att elevens egna förklaring inte är så tydlig. Flera elever ansåg att fel på en uppgift kunde betraktas som en del i lärandeprocessen och det viktiga var att en missuppfattning klargjordes, inte hur stor poängsumman blev på provet.

I samband med proven har eleverna också reflekterat över vad de känner sig nöjda med inom arbetsområdet, men också vad de behöver lära sig och ta igen. Att kontinuerligt få utvärdera sin arbetsinsats och följa lärandet är en viktig del för att bli delaktig i kunskapsutvecklingen, att lärandet är en aktiv process som inte kan göras av någon annan. Att reflektera över något som har varit bra kan stärka självförtroendet och medvetandegöra elevernas styrkor respektive utvecklingsområden.

Lärare behöver vara aktiva för att få eleverna att reflektera över sin kunskapsutveckling. Att ställa riktade frågor till eleverna användes i MiMa-projektet på lite olika sätt. I början av ett kunskapsområde fungerar frågorna som en "startlogg", i mitten av ett område kan eleven stanna upp och reflektera "vad har jag lärt mig och vad har jag kvar att lära?". Det kan också vara frågor efter ett arbetsområde, "vilka erfarenheter tar jag med mig till nästa arbetsområde?".

Bearbetning efter avsnittet tal och räkning

1. Nämn någon uppgift du känner dig nöjd med och motivera

varför. Sv: Jag känner mig nöjd med alla förutom 9an.
Men jag känner mig extra nöjd med 7an, jag tog ut fakta och läste uppgiften några gånger för att förstå. Jag antecknade och gjorde sedan en gissning på provet för att få fram svaret.

2. Hade du användning av elevboken? Motivera ditt svar.

Jag kanske hade användning av elevboken någon gång.
Men annars så kollade jag bara i den för att se att jag var 100% säker med mitt svar.

3. Nämn något som du inte är nöjd med på provet. Berätta också

varför du inte är nöjd. Jag är inte nöjd med 9. Jag känner att jag kunde bättre än så. Jag ångrar att jag inte lärt mer tid på den uppgiften.

Utvärdering gjord av elev årskurs 8.

Fler frågor att reflektera över kan vara

- Är det något du måste ta igen, lära dig? Jämför med målen.
- Hur ska du lära dig detta? Vem, vad kan hjälpa dig? Hur visar du att du kan?
- Vad ska du tänka på, vad gäller arbetssätt, inför nästa arbetsområde?

Gymnasieeleverna reflekterade på likartat sätt som eleverna i grundskolan, men istället för elevbok utformade de ett formelblad efter ett arbetsområde. Eleverna fick använda sitt formelblad vid provtillfället och det bifogades med elevens arbete med provet. Eleverna kallar det för prov med "fusklapp". Informationen som finns på elevens formelblad tillsammans med provresultat ger mycket information till läraren som kan användas i formativt syfte när ett nytt arbetsområde ska planeras.

Jönsson (2010) skriver om problematiken kring att bedöma det man själv gjort. Att ge sig själv feedback är svårt. Upplever en elev svårigheter med att bedöma sitt eget arbete blir nästa steg, att utveckla det man gjort, ännu svårare. Det är lättare att identifiera styrkor och utvecklingsområden i det som någon annan har gjort då man inte är personligt engagerad i uppgiften. Genom att bedöma varandras lösningar på uppgifter kan eleverna få syn på brister och kvaliteter i det de själva har gjort. Kamratbedömning kan därför vara ett steg på väg till självbedömning (Jönsson, 2010).

Bedömning är en svår och komplex aktivitet som fordrar både kunskaper och erfarenheter. Det är viktigt att man som lärare tillåter sig själv att utveckla bedömningsmetoder, pröva olika bedömningssituationer, växla mellan informell och formell bedömning, ge återkoppling på olika sätt och tillåta sig själv att göra misstag som sedan leder till förändring och utveckling. Även elever behöver få tid att lära om sitt eget lärande, göra misstag, få stöttning och utvecklas vidare.

Förslag till diskussioner

1. Hur kan effektiv feedback skapas? Vilka möjligheter finns och vilka ställningstaganden måste göras?
2. Hur engageras eleverna i sitt lärande? Vilka erfarenheter finns idag och vad kan utvecklas?
3. Hur anpassas undervisningen utifrån resultat av bedömning? Hur kan till exempel resultaten från de nationella proven i matematik användas för att anpassa och utveckla undervisningen?
4. Hur hanteras motivation och självuppfattning i samband med bedömning?
5. På vilket sätt engageras eleverna i att bedöma sina prestationer? Vilka utvecklingsmöjligheter finns?

Referenser

- Andrade, H. L. (2010). Students as the definitive source of formative assessment. I H. L. Andrade & G. J. Cizek (red). *Handbook of formative assessment* (s. 90–105). Abingdon and New York: Routledge.
- Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multimodal social semiotic study*. Doktorsavhandling. Stockholm: Stockholms universitet.
- Björklund Boistrup, L., Samuelsson, J., Dahlsjö, M. & Ingelshed, L. (2013). *Elever som skriver och ingriper: Aktionsforskning om bedömning i matematik*. Linköpings universitet.
- Black, P. & Wiliam, D. (1998a). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7–73.
- Black, P. & Wiliam, D. (1998b). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, 80(2), 139–148.
- Black, P., Harrison, C., Lee, C. & Marshall, B. (2003). *Assessment for Learning: Putting it into practice*. Maidenhead, UK: Open University Press.
- Butler, R (1987). Task-involving and ego-involving properties of evaluation: effect of different feedback conditions on motivational perception, interest and performance, *Journal of Educational Psychology*, 79(4), 474–482.
- Enoksson, M. (2014). *Innehåll i behov av särskilt stöd: erfarenheter från lesson/learningstudies i matematik*. Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Gipps, C.V. (2012). *Beyond testing: towards a theory of educational assessment*. (Classic ed.) London: Routledge.
- Green, J. (2014). *Elevers användande av formativ återkoppling i matematik*. Licentiatuppsats. Linköping: Linköpings universitet, 2014.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1): 81–112.
- Hodgen, J. & Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box. Assessment for learning in the mathematics classroom*. London: Department of Education Professional Studies. Kings College.
- Jönsson, A. (2010). *Lärande bedömning*. Malmö: Gleerups.
- Pettersson, A. (2011). *Inledning i Gensvar för lärande: Rapport med utvecklingsartiklar från en forskningscirkel*. (2011). Stockholm: Utbildningsförvaltningen Stockholm stad.
- Pettersson, A., Olofsson, G., Kjellström, K., Ingemansson, I., Hallén, S., Björklund Boistrup, L. & Alm, L. (2010). *Bedömning av kunskap: för lärande och undervisning i matematik*. Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Ridderlind, I. (2014). *Elevperspektiv på bedömning för lärande*. Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Shute, V. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*, 78, 153–189.
- Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklass och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Stiggins, R. (2008). *Student-Involved Assessment for Learning*. New Jersey: Pearson Education Inc.

Stiggins, R. (2010). Essential formative competences for teachers and school leaders. I H. L. Andrade & G. J. Cizek (red). *Handbook of formative assessment* (s. 90–105). Abingdon and New York: Routledge.

Wiliam, D. (2010). An integrative summary of the research litterature and implications for a new theory of formative assessment. I H. L. Andrade & G. J. Cizek (red). *Handbook of formative assessment* (s. 90–105). Abingdon and New York: Routledge.

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington, USA: Solution Tree Tress.

Uppgifters potential

Katarina Kristiansson, Inger Ridderlind och Margareta Enoksson

EN STOR DEL av elevers arbete med matematik är att lösa uppgifter. För att utveckla kunskaper i matematik är det därför av stor vikt att välja uppgifter omsorgsfullt. Olika uppgifter ger elever olika möjligheter till lärande. Det finns uppgifter som kräver engagemang i olika matematiska begrepp, stimulerar elever till tänkande och möjliggör kopplingar till andra begrepp. Elever behöver också undersöka processer och relationer. Andra uppgifter kan utveckla elevernas metoder och vara mer av rutinkaraktär. Oavsett syfte är det bra om uppgifterna leder till att elever utvecklar grundläggande matematiska idéer och fördjupad begreppsförståelse (Stein & Smith, 1998).

Olika typer av uppgifter har olika bedömningspotential gällande vad som är möjligt att bedöma. Att bedöma om eleverna exempelvis har förmåga att föra resonemang och kommunicera matematik kan göras då eleverna löser öppna eller undersökande uppgifter. Det viktiga är att uppgifterna är värdefulla utifrån sitt matematiska innehåll och inbjudande så att eleverna får visa vad de kan (Hattie m.fl., 2017).

I detta kapitel presenteras några olika typer av matematikuppgifter och uppgifternas potential för lärande och bedömning beskrivs. Lärarens uppdrag är, förutom att undervisa eller designa lärande, att följa och utvärdera elevernas kunskapsutveckling. Läraren behöver reflektera över vilken roll uppgiften spelar för att främja eleverna i kunskapsutvecklingen, både utifrån matematikinnehåll och förmågor som ska utvecklas. Hur ska uppgiften redovisas? Vad kan den avslöja om elevernas kunnande? Är det lämpligt att använda hjälpmedel eller digitala verktyg i arbetet med uppgiften? En uppgift som passar i en undervisningssituation behöver inte nödvändigtvis passa i en bedömningssituation (Newton, 2007). En varierad undervisning med olika typer av uppgifter kräver också en bedömning som ligger i linje med styrdokumentet och det som har behandlats i undervisningen. Uppgifter kan kategoriseras på olika sätt utifrån uppgiftstyper. I kapitlet behandlas några olika uppgiftstyper, men även andra aspekter av arbetet med matematikuppgifter.

I kapitlet behandlas följande:

- Öppna uppgifter
- Undersökande uppgifter
- Muntliga uppgifter
- Flervals- och kortsvarsuppgifter
- Uppgifter med och utan kontext
- Uppgifter som behandlar samma matematikinnehåll
- Progression i uppgifter

Öppna uppgifter

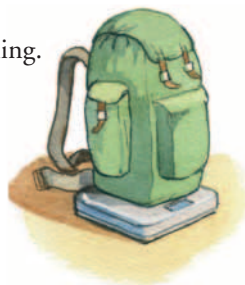
Uppgifter som kan leda till flera möjliga lösningar och svar brukar kallas för öppna uppgifter. En öppen uppgift kan avslöja hur långt eleverna har kommit i sin kunskapsutveckling och passar bra i klassrumsarbetet. Uppgifterna kan ge möjlighet att göra undersökningar med laborativa inslag, göra egna antaganden och använda begrepp från olika matematiska områden. Öppenheten leder bort från fokus på rätt

och fel och det kan upplevas positivt av eleverna. Om elever aldrig har mött öppna uppgifter kan de dock känna sig osäkra på hur de ska ta sig an uppgiften. Det är därför viktigt att de får möta en variation av uppgifter för att få möjlighet att använda hela sitt matematiska kunnande (Hodgen & van den Heuvel-Panhuizen, 2014). I öppna uppgifter kan eleverna få redogöra för sina antaganden, kommunicera och resonera. Läraren ges möjlighet att lära sig mer om varje elevs kunnande genom att följa hur eleverna arbetar med uppgifterna. En öppen uppgift kräver ofta tolkning av uppgiftsformulering, erfarenheter från vardagen och matematiska kunskaper.

Du ska vandra i fjällen och ha en ryggsäck med packning.

Om du ska orka gå hela dagarna får packningen väga maximalt 12 kg.

Vad ska du ta med dig på vandringen?



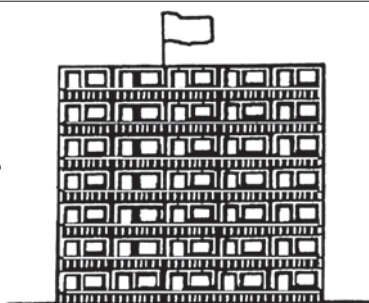
© PRIM-gruppen¹

Hur många vanliga pepparkakor kan ni baka av en halv liter pepparkaksdeg?



© PRIM-gruppen²

Hur stor är flaggan?



© Hodgen & van den Heuvel-Panhuizen³

¹ Uppgiften hämtad från PRIM-gruppens uppgiftsbok

² Uppgiften hämtad från PRIM-gruppens uppgiftsbok

³ Fri översättning av uppgift från artikel av Hodgen och van den Heuvel-Panhuizen (2014)

Vad erbjuds eleverna att visa för kunskap i den öppna uppgiften om flaggan? Den första delen är tolkningen, är det verklighetens flagga eller flaggan på bilden? Hur ska svaret formuleras, som en area med enhet eller som en andel av husets storlek? Tolkar eleverna frågan som "Hur stor är flaggan på huset i verkligheten?" ges de möjligheter att göra antaganden om längd och bredd med till exempel en dörr som referens. Förutom beräkning kan de visa kunskap om lämplig enhet för area. En viktig del med uppgiften är att det inte finns något rätt eller fel svar. Svaret är beroende av de antaganden som eleverna gör och hur rimliga dessa är samt hur resonemangen förs. Denna uppgift jämförs med en sluten flervalsuppgift i en artikel av Hodgen och van den Heuvel-Panhuizen (2014, s 30). I den slutna uppgiften visas hur area beräknas för en rektangel och i svarsalternativen finns enheten med. Det betyder att det enda som den slutna uppgiften prövar är areaberäkning. Den öppna flagguppgiften har i motsats till den slutna en rik potential att förse läraren med information om elevernas tolkning, antaganden, erfarenheter och matematiska kunskaper.

I en jämförelse med läroplanens formulering om skolans uppdrag (Skolverket, 2018) behöver undervisningen ge eleverna möjlighet att arbeta med olika typer av utmanande uppgifter.

Skolan ska stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende samt deras vilja att pröva och omsätta idéer i handling och lösa problem.

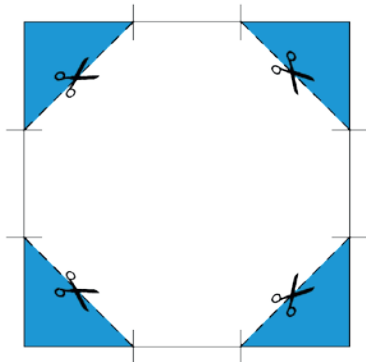
(Lgr 11 reviderad 2018, s 7)

Undersökande uppgifter

Uppgifter av undersökande karaktär kan pröva elevernas förmåga att tolka, systematisera, föra resonemang, generalisera och dra slutsatser. Elevernas tankegångar, ställningstaganden och hur väl eleverna driver en process framåt med matematiska argument kan visas genom lösning av undersökande uppgifter. Det är viktigt att eleverna får använda resultat från tidigare lösningar för att utveckla sin förmåga att lösa andra problem (Suurtamm, m.fl., 2016). I undersökande uppgifter ges eleverna möjlighet att använda matematikens språk, symboler och uttrycksformer samt strukturera redovisningen.

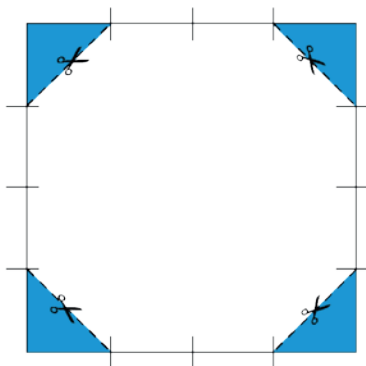
Undersökande uppgifter är ofta i en kontext och kan omfatta flera olika matematiska områden. Nedan visas ett exempel på en undersökande uppgift, "Klippta kvadrater".

Klippta kvadrater



En kvadrats sidor delas i tre *lika stora* delar. Hörnen klipps bort (se figur).

- Hur stor del av kvadratens area klipps bort?



En kvadrats sidor delas i fyra *lika stora* delar. Hörnen klipps bort (se figur).

- Hur stor del av kvadratens area klipps då bort?

- Undersök hur stor del av en kvadrats area som klipps bort om man delar kvadratens sidor i fem, sex eller fler *lika stora* delar.
- Använd din undersökning och skriv en formel som anger hur stor del av en kvadrats area som klipps bort om kvadratens sidor delas i n *lika stora* delar.
- Visa att din formel stämmer för *alla* antal indelningar av en kvadrats sidor.

©Skolverket⁴

För att påbörja lösning av uppgiften behöver eleverna ha grundläggande kunskaper om bråk och area. Uppgiften kan lösas genom att rita bilder, ansätta värden på kvadratens sida eller direkt arbeta med bråk. De två följande deluppgifterna ger eleverna möjlighet att upptäcka ett mönster. I deluppgift två finns fortfarande bilden som stöd, medan i deluppgift tre behöver eleverna själva ta ställning till hur undersökningen ska fortsätta. Uppgiften avslutas med den generella formeln för mönstret och eleverna ska visa att formeln stämmer för alla indelningar av en kvadrats sidor. Uppgiften startar i ett konkret specifikt fall till att undersöka flera olika fall för att kunna komma fram till en generell formel som även ska bevisas.

⁴ Uppgiften hämtad från nationella provet matematik 1abc, ht 2015

Undersökningen fungerar i grundskolan, men där kan inte eleverna förväntas genomföra ett bevis för att formeln stämmer för alla indelningar.

När en undersökande uppgift ska användas i en bedömningssituation är det viktigt att eleverna ges möjlighet att visa olika kvalitativa nivåer. Uppgiften bör starta på en lägre nivå så att alla elever kommer igång med den och därefter stegras nivån. För att sammanställa ett bedömningsunderlag för en undersökande uppgift kan en analytisk bedömning användas. I kapitel 5, som handlar om bedömning av elevers visade kunskaper, finns en uppgiftsspecifik bedömningsmatris till uppgiften Klippta kvadrater.

Muntliga uppgifter

Muntliga uppgifter kännetecknas bland annat av att de är delvis öppna, kombinerar handling och diskussion, kan vara laborativa undersökningar som leder till slutsatser och saknar ofta en given metod. Problemlösning i grupp kan också vara lämpligt om uppgiften inbjuder till att eleverna får visa sina kunskaper i diskussioner. Om uppgiften ska ges i grupp är det viktigt att det finns möjligheter för alla elever att vara delaktiga och komma till tals.

Syftet med muntliga uppgifter är att eleverna ska få möjlighet att muntligt förklara och argumentera för sina tankegångar samt att de kan få ta del av andras resonemang. I en muntlig situation kan eleverna ges möjlighet att komma längre i sin kunskapsutveckling genom återkoppling och frågor från andra. Eleverna får sätta ord på sina tankegångar, beskriva och förklara så att andra kan följa med. Det skulle kunna liknas vid att arbeta i den proximala zonen, (Vygotskij, 2005). För att en undervisningssituation där eleverna diskuterar och hjälper varandra framåt ska fungera behöver eleverna veta hur man hjälper en kamrat. De behöver vara medvetna om att syftet inte är att de själva snabbt ska hitta rätt svar på uppgiften (Drath & Löfvall, 2014).

Eleverna ska också få möjlighet att tillsammans komma överens om en redovisning och redogöra och argumentera för den. Elevers arbete med muntliga uppgifter kan ge läraren respektive eleverna kompletterande information om elevernas förtjänster och utvecklingsområden i matematik. PRIM-gruppens erfarenhet av muntliga uppgifter i bedömningssituationer är att uppgifterna inte får ha en alltför svår matematisk ingång. För att alla elever ska komma igång och prata matematik är det en fördel om eleverna till exempel får utgå från konkreta material, rita eller peka för att skapa ett större engagemang.

En varierad undervisning kräver en varierad utvärdering och bedömning av matematikkunskaper (Pettersen, 2008). Vissa elever har lättare att uttrycka sig muntligt än skriftligt och den muntliga bedömningen är därför viktig för allsidigheten.

En muntlig uppgift kan ge läraren följande underlag till bedömning

- Vilket matematiskt kunnande, om till exempel olika begrepp, visar eleverna?
- Hur väl argumenterar eleverna för sina tankar?
- Hur väl använder eleverna ett matematiskt språk?
- I vilken grad visar eleverna tilltro till det egna tänkandet?
- Hur delaktiga är eleverna i diskussionen?
- Hur följer och bemöter eleverna kamraters resonemang?

En viktig roll för läraren i muntliga situationer är att skapa frågor som kan ställas för att utmana elevernas kunskaper och stödja eleverna, och inte lotsa eller ge dem ett svar.

Exempel på muntliga uppgifter finns i de frisläppta nationella proven på PRIM-gruppens hemsida samt som ett bedömningsstöd på Skolverkets hemsida.

Flervals- och kortsvarsuppgifter

En flervalsuppgift kräver inte mycket redovisning. Eleverna uppmanas att välja ett eller flera svarsalternativ. Svaret går snabbt att bedöma men kan samtidigt avslöja till exempel elevernas taluppfattning eller metodsäkerhet. De svarsalternativ som ges till uppgiften är utvecklade utifrån vanliga felsvar som elevlösningar vid utprovningar har visat.

Vilket av följande tal är det bästa närmevärdet till $25,6 \cdot 0,45$?

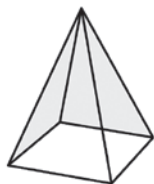
Ringa in ditt svar.

0,115 1,15 11,5 115 1150

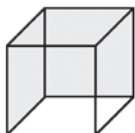
© Skolverket⁵



figur 1



figur 2



figur 3



figur 4

Vilken figur stämmer med följande beskrivning?
"Figuren har 12 kanter och 8 hörn."

© Skolverket⁶

⁵ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2013

⁶ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 6, 2014

I en flervalsuppgift finns risken att eleverna gissar sig till korrekt svar. Den kan minimeras genom att ställa frågan ”Vilket eller vilka alternativ är korrekt/korrekt?”. En annan möjlighet är att låta eleverna välja och sedan motivera sitt val.

De två kortaste sidorna i en rätvinklig triangel har längderna $\sqrt{3}$ och 2.
Låt v vara den minsta vinkeln i triangeln. Vilket värde har $\sin v$?
Ringa in ditt svar och motivera i rutan.

$$\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\sqrt{\frac{4}{7}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}$$

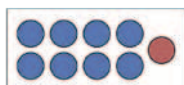
$$\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{4}{5}}$$

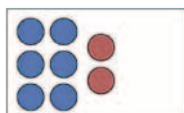
© Skolverket⁷

Andra svarsformat på flervalsuppgifter kan vara uppgifter där olika alternativ ska paras ihop.

Dra streck mellan den bild och det uttryck som passar ihop.
En bild blir över.



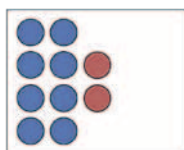
$$2 \cdot 3 + 2$$



$$3 \cdot 2 + 1$$



$$4 \cdot 2 + 1$$



© Skolverket⁸

⁷ Uppgiften hämtad från nationella provet matematik 1c, ht 2012

⁸ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 3, 2012

Uppgifter med fasta svarsalternativ kan användas både i undervisning och i bedömning. I undervisningen kan läraren ställa frågor i början eller i slutet av en lektion för att snabbt få en överblick av elevernas kunskaper. Detta kan användas i den kontinuerliga planeringen av undervisningen. Ett prov med flervalsuppgifter eller kortsvar går ofta enkelt och snabbt att bedöma samt sammanställa resultatet av. Har eleverna löst uppgifterna digitalt kan det göras automatiskt. Läraren får både en snabb överblick av vilka uppgifter eleverna i klassen ännu inte behärskar och samtidigt den enskilda elevens resultat. En aspekt vid användandet av flervalsuppgifter med fasta svarsformat är att endast en begränsad del av det matematiska kunnandet provas. Vid utvärdering av mer sammansatt kunskap krävs oftast andra redovisningsformat (Cunningham, 1998; Korp, 2011).

Kortsvarsuppgifter är också uppgifter som ger läraren en snabb överblick över en elevgrupps kunskaper. Eleverna uppmanas att endast lämna ett svar i form av till exempel ett tal, uttryck eller en enhet. Uppgifterna kan prova olika matematiska områden eller ett specifikt område som taluppfattning. Eleverna ges också möjlighet att visa olika förmågor, men det är främst vilka metoder som eleverna behärskar och kunskaper om olika begrepp som provas.

Uppgiften $5 \cdot _ = 4 \cdot _$ kan fungera som en uppgift där elevernas kunskap om begrepp avses att provas, nämligen likhetstecknet som symbol för en relation mellan två led. Uppgiften har oändligt många korrekta lösningar. Då eleverna väljer att sätta in talen 4 respektive 5 visar de kunskap om kommutativa lagen vid multiplikation. För alla andra lösningar gäller att talen i luckorna bör ha förhållandet 4 : 5, och uppgiften är därför lämplig också när proportionalitet diskuteras. Uppgiften kan också passa i samband med övning av tabellkunskap.

Fördelen med flervals- och kortsvarsuppgifter är att läraren på kort tid får en bild över elevernas kunnande, exempelvis om de kan utföra grundläggande matematiska beräkningar med huvudräkning. Flervalsuppgifter kan vara inbjudande och när de skapas är det viktigt att eleverna utmanas i sitt tänkande. I ett formativt syfte behöver läraren information om elevernas kunskaper och flervals- och kortsvarsuppgifter ger en begränsad kompletterande information, men de är inte tidskrävande att bedöma.

Hattie m.fl. (2017) delar in uppgifter som förekommer i olika kategorier. De skriver att eleverna behöver få möta uppgifter som låter dem utforska och lösa problem för att utmana sitt tänkande. Öppna uppgifter och muntliga uppgifter är exempel på uppgifter som inbjuder till detta. Flervals- och kortsvarsuppgifter begränsar ofta elevernas möjligheter att visa sina kunskaper och risken är att läraren inte får gedigen information om elevernas kunnande om endast sådana uppgifter används för utvärdering av kunskap.

Uppgifter med och utan kontext

Att lösa uppgifter med en kontext kan ibland liknas vid problemlösning. Alla textuppgifter kan dock inte betraktas som problemlösningssuppgifter, eftersom eleverna i många uppgifter kan använda rutinartade metoder. Det som är problemlösning för en yngre elev kan vara en rutinuppgift för en äldre elev. PRIM-gruppens analyser av

elevlösningar visar att uppgifter med en kontext, som är begriplig för eleverna, löser eleverna i högre grad jämfört med om de ingående talen i uppgiften är utan kontext (Pettersson m.fl., 2010).

En motorcykel kör 18 km på 15 min.
Beräkna motorcykelns medelfart i km/h

© Skolverket⁹

Beräkna
 $\frac{18}{0,25} =$

I analyser av elevlösningar kan en lösningsproportion beräknas. För denna uppgift med kontext är lösningsproportionen betydligt högre jämfört med den utan kontext. När eleverna ska beräkna medelfart kan de välja lösningsstrategi och använda olika uttrycksformer som till exempel att rita bild, göra tabell eller använda multiplikation istället för division. Uppgiften utan kontext är svår då kvoten blir större än täljaren och eleverna behöver ha kunskap om innehållsdivision. En känd missuppfattning hos elever är att svaret vid en division alltid blir mindre än täljaren (McIntosh, 2008). Samtidigt är kontexten att köra motorcykel en vuxenaktivitet och svår för vissa elever att relatera till. Även om det finns en kontext behöver kontexten alltså inte hjälpa eleverna att lösa uppgiften (Boaler, 1993).

I vissa textuppgifter provas elevernas förståelse för räknesätten. Det handlar om att känna igen och välja det räknesätt som är lämpligast att använda.

Ett rep som är 98 meter långt går av i två delar. En del är 34 meter.
Hur lång är den andra delen?

© Skolverket¹⁰

I uppgiften med repet är syftet att eleverna ska känna igen en situation för subtraktion när helheten och en del är känd.

Leo delar upp sina fotbollskort i 4 pärmar.
Det blir 78 kort i varje pärm.
Hur många kort har han?
Visa hur du löser uppgiften.



© Skolverket¹¹

⁹ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2004

¹⁰ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 3, 2013

¹¹ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 6, 2015

Uppgiften med fotbollskorten leder till en multiplikation, men det finns elever som tolkar att ordet *delar* är synonymt med räknesättet division och dividerar därför 78 med 4.

De ord som används i matematikuppgifter kan ibland ge fel signaler. Ordet *fler* ger ibland signalen addition och ordet *yngre* kan leda till subtraktion. Det är viktigt att eleverna förstår helheten i uppgiften och inte bara ”rycker ut” ett ord (signalord) som förknippas med ett räknesätt (Malmer, 1999).

Elevernas förmåga att välja lämpligt räknesätt kan också provas med en flervalsuppgift.

Godiset i en affär kostar 6,90 kr/hg. Du ska räkna ut hur mycket godis du får för 20 kr.

Vilken av följande uträkningar väljer du?

Ringa in ditt svar.

$$20 + 6,90$$

$$\frac{20}{6,90}$$

$$20 \cdot 6,90$$

$$20 - 6,90$$

$$\frac{6,90}{20}$$

© Skolverket¹²

Elevernas kunskaper om de matematiska symbolerna och räknesätten kan provas i uppgifter där eleverna själva får bestämma innebörden av symbolerna. En uppgift för elever kan vara att ge en kontext till en beräkning.

Skriv en räknehändelse som passar till $\frac{12}{4} = 3$

eller för äldre elever

Beskriv en vardagshändelse som leder till följande beräkning $\frac{14,5}{0,5} = 29$

Genom texten och frågeformuleringen kan eleverna visa kunskap om täljaren, nämnaren och kvotens innebörd samt delnings- eller innehållsdivision. Analyser av elevers arbete med uppgiften $\frac{12}{4} = 3$ visar att elever ibland vänder på nämnare och kvot i sina räknehändelser eller beskriver en multiplikation. Analyser av uppgiften $\frac{14,5}{0,5} = 29$ visar liknande resultat, men svårigheten i uppgiften handlar om att hitta en meningsfull innehållsdivision där många elever försöker med delningsdivision som inte stämmer.

¹² Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2011

Uppgifter som behandlar samma matematikinnehåll

Ett visst matematiskt innehåll kan prövas med olika typer av uppgifter. Nedan ges ett exempel på hur uppgifter med ekvationslösning kan prövas på olika sätt. Till ett och samma matematikinnehåll, i detta fall metoder för ekvationslösning, visas tre typer av uppgifter.

Bestäm värdet på x i ekvationen: $3x - 2(5 - x) = 2x + 5$

Lös ekvationen: $3x - 2(5 - x) = 2x + 5$
Redovisa din lösning.

Oskar, Krister och Fredrik har alla löst samma ekvation.
Bara en lösning är korrekt.

Oskar	Krister	Fredrik
$3x - 2(5 - x) = 2x + 5$	$3x - 2(5 - x) = 2x + 5$	$3x - 2(5 - x) = 2x + 5$
$3x - 10 + x = 2x + 5$	$3x - 10 + 2x = 2x + 5$	$3x - 10 - 2x = 2x + 5$
$2x = 15$	$3x = 15$	$3x = 15$
$x = 7,5$	$x = 5$	$x = 5$

a) Vem har löst ekvationen korrekt?

Svar: _____

b) Vilka fel finns i de andra två lösningarna?

©Skolverket¹³

Uppgifternas formulering ger eleverna möjlighet att visa olika kunskaper. Endast svar efterfrågas i den första uppgiften, den andra kräver en redovisning och i den tredje ska eleverna analysera och resonera kring givna lösningar av ekvationen. I den första uppgiften kan vi, om eleverna svarar korrekt, anta att de har en metod för ekvationslösning. Det är möjligt att eleverna har prövat sig fram, men då svaret är 5 och det finns x på tre ställen i ekvationen bjuder uppgiften inte in till prövning. Den andra uppgiften ger möjlighet att analysera elevernas lösningar och vilka procedurer som har använts och hur dessa kommuniceras. Den tredje uppgiften utgår från två vanliga fel som elever gör när de löser ekvationen. Det ena är att eleverna inte behärskar multiplikation vid parentes med två termer. De multiplicerar i detta fall endast den första termen, se Oskars elevlösning. Det andra är ett teckenfel vid multiplikation med negativa faktorer, se Fredriks elevlösning. För att lösa uppgiften behöver eleverna analysera de tre lösningarna. Eleverna ges möjlighet att föra matematiska resonemang men även möjlighet att visa sina procedurer.

¹³ Uppgiften hämtad från nationella provet matematik 1abc, vt 2014

Men ekvationer kan också prövas på flera andra sätt. Exempel på detta är när eleverna själva ska formulera ett problem som kan lösas med en given ekvation.

Skriv text till en uppgift som kan lösas med hjälp av ekvationen $x + (x + 5) = 25$

Ytterligare exempel på detta är när eleverna löser problem genom ekvationslösning.

Maria sålde glass i en kiosk under midsommarfirandet. Hon sålde strutar för 18 kr och bägare för 15 kr. Totalt sålde hon 350 glassar och fick in 6 000 kr. Hur många glassar av varje sort sålde Maria?



© Skolverket¹⁴

Problemet går att lösa utan ekvationer, till exempel med prövning eller med ett generellt aritmetiskt resonemang. I lösningen kan eleverna utgå ifrån att alla glassar åtminstone kostar 15 kronor. Då har Maria sålt för $15 \cdot 350 = 5\,250$ kr. Hon fick in 6 000 kr och $6\,000 - 5\,250 = 750$ kr. De 750 kronorna kommer från strutarna som är 3 kronor dyrare än bägarna. Antal strutar är då $750/3 = 250$ st. Antalet bägare är $350 - 250 = 100$ st.

¹⁴ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2012

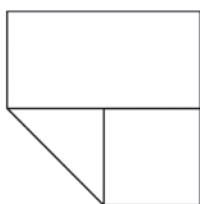
Progression i uppgifter

Lärandet kan ses som att lära känna ett landskap. Till en början har man en ganska diffus uppfattning om landskapet och dess olika delar, men efterhand kan man urskilja allt fler delar och hur de är sammanbundna (Hirst, 1974). Med en djupare kunskap om matematiska begrepp ökar också elevernas förmåga att använda olika begrepp, relatera dem till varandra och finna samband mellan dem.

En utveckling av de matematiska begreppen area och omkrets kan synliggöras genom några olika uppgifter där det som avses att prövas i uppgiften blir mer omfångsrikt och komplext.

Nova och Troj vill ha en matta som de ska lägga på golvet i kojans. De har fått 3 mattbitar. De provar på olika sätt.

Novas sätt



Trojs sätt



- a) Vilken mening stämmer med bilderna? Sätt ett kryss.

Novas matta tar störst plats på golvet, alltså har störst area.

☐

Trojs matta tar störst plats på golvet, alltså har störst area.

☐

Båda mattorna tar lika stor plats, alltså har lika stor area.

☐

- b) Förklara hur du vet det.

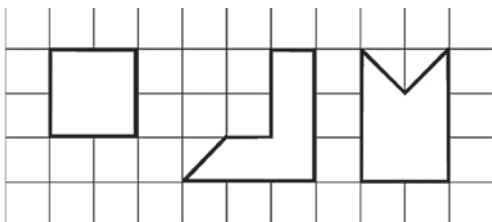
© Skolverket¹⁵

¹⁵ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 3, 2010

Hjälp Nova och Troj att lösa uppgiften:

Vilken figur tar störst plats, alltså har störst area?

a) Sätt ett kryss i figuren.



b) Hur vet du att den tar störst plats, alltså har störst area?



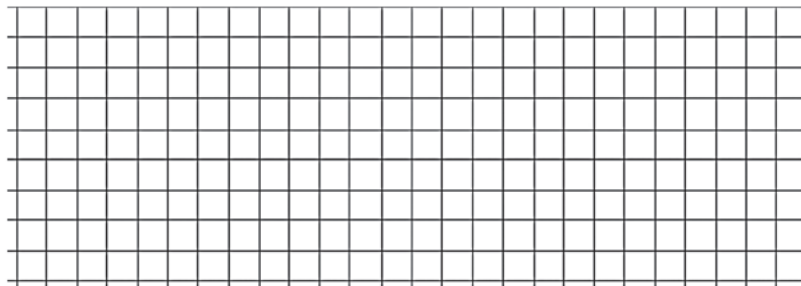
© Skolverket¹⁶

I dessa uppgifter provas främst kunskaper om area. Eleverna kan, i den första uppgiften, upptäcka genom en direkt jämförelse att areorna är lika stora. De behöver uppfatta att arean är området av de sammanlagda figurerna. Areakonservationen provas genom att de geometriska figurerna kan flyttas utan att arean förändras (Löwing, 2011). En vanlig missuppfattning är att Trojs matta har störst area därför att den breder ut sig och har störst omkrets.

I den andra uppgiften har areorna kopplats till ett rutnät och det ger eleverna möjlighet att mäta area genom att räkna antalet rutor. Även denna uppgift kan avslöja missuppfattningen mellan area och omkrets. Det framkommer när eleverna förklarar hur de har löst uppgiften, om de räknar rutorna runt om eller inuti.

¹⁶ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 3, 2010

a) Rita en rektangel med omkretsen 12 cm.



b) Hur stor area har din rektangel?

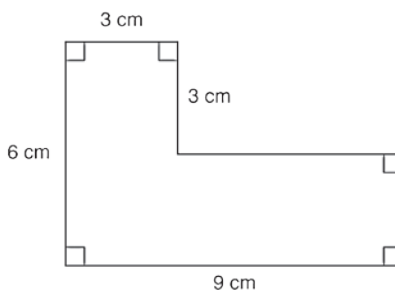
Visa hur du löser uppgiften.

© Skolverket¹⁷

Eleverna ska i denna uppgift veta vad en rektangel är och uppgiften ger möjlighet att se om de visar kunskap om både area och omkrets. Uppgiften har en grad av öppenhet då eleverna själva ges möjlighet att välja utseende på rektangeln och de får stöd i det rutnät som finns utritat. Eleverna kan också visa kunskap om att en kvadrat är en rektangel. Utifrån rektangeln kan eleverna använda rutor (1 cm^2) för att mäta area eller beräkna arean med ”längd gånger bredd”. De kan också visa kunskap om enhet för area.

Beräkna arean av figuren.

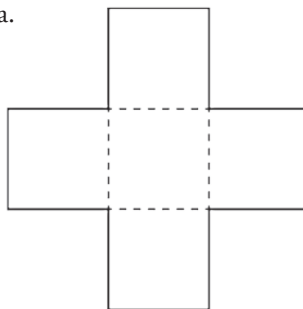
Visa hur du löser uppgiften.



Figuren i uppgiften är sammansatt. Det finns möjligheter att dela upp figuren på olika sätt eller beräkna en stor rektangel ($9 \cdot 6$) och sedan subtrahera med en mindre rektangel ($6 \cdot 3$). Eleverna kan också använda en annan metod genom att dela in figuren i kvadratcentimetersrutor och räkna hur många rutor det är. Eftersom måtten anges på sidorna kan elever ledas att tro att det är omkretsen som ska beräknas.

¹⁷ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 6, 2014

Figuren består av 5 kvadrater med lika stor area.
Hela figurens area är 405 cm^2 .
Bestäm omkretsen av hela figuren.



© Skolverket¹⁸

I uppgiften ska eleverna starta i area för att bestämma en längd och därefter beräkna en omkrets. Det finns flera steg i uppgiften, där första steget är att beräkna arean av en liten kvadrat ($405/5$). För att effektivt bestämma längden på en liten kvadrats sida måste eleverna vara förtrogna med multiplikation eller med att använda kvadratroten. Det går också att gissa och pröva sig fram men det är inte lika effektivt. När väl sidans längd är bestämd ska omkretsen beräknas. En missuppfattning är att beräkna omkretsen av alla små kvadrater och sedan addera dem.

När olja från fartyg läcker ut i havet bildas en tunn hinna på vattnet som i genomsnitt har tjockleken $0,002 \text{ mm}$. Ett fartyg läcker ut 6 m^3 olja.
Hur många kvadratkilometer täcker oljan?

© Skolverket¹⁹

I uppgiften ges längdenhet samt volymenhet och svaret ska ges i areeenhet. Svårigheten i uppgiften ligger i att tjockleken uttrycks i tusendels millimeter, volymen är kubikmeter och svaret ska vara i kvadratkilometer. Eleverna måste behärska enhetsbyte med flera enheter samt hantera stora och små tal. Uppgiften kräver också att de är säkra på sambanden mellan storheter, då arean ges när volym divideras med längd.

¹⁸ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2008

¹⁹ Uppgiften hämtad från nationella provet årskurs 9, 2013

Ett tomt akvarium i form av ett rätblock har följande innermått:
1,0 m långt och 4,0 dm brett.



- a) Hur högt upp når vattnet om man häller i 10 liter?
- b) Ett annat tomt akvarium är hälften så långt och hälften så brett.
Om man häller i 10 liter vatten även i detta akvarium påstår Peter att vattnet kommer att nå dubbelt så högt upp.
Är det sant? Motivera ditt svar.

© Skolverket²⁰

Även i denna uppgift provas sambanden mellan storheter, där höjden bestäms genom att volymen divideras med en basarea. Den kräver lösningar i flera steg, då basarean inte är given och volymenheten är i liter. I b-uppgiften förändras förutsättningar där längdskalan är 1 : 2 men basarean blir bara en fjärdedel så stor. I påståendet kan eleverna ledas in i att tro att basarean är hälften så stor. Kunskap om relation mellan längdsskala och areaskala krävs eller beräkningar på nytt. Möjlighet finns att lösa uppgiften genom ett resonemang utifrån formeln för rätblockets volym. Uppgiften skulle kunna utvecklas genom att lägga till en fråga om det alltid är så att vattnet når dubbelt så högt när längd och bredd på kärlet halveras.

Tabellen visar ett sätt att se på progressionen i uppgifterna i geometri.

Från att göra direkta jämförelser	→	mäta en storhet
Från att mäta en storhet	→	beräkna en storhet
Från att göra beräkningar med given enhet	→	att själv välja lämplig enhet
Från att använda en enhet	→	använda flera enheter med enhetsbyten
Från att beräkna med en storhet	→	att beräkna med flera storheter
Från att göra beräkningar i ett steg	→	beräkningar i flera steg
Bedöma rimlighet och göra enkla värderingar	→	bedöma rimlighet, begränsningar och generaliserbarhet

²⁰ Uppgiften hämtad från nationella provet matematik 1a, vt 2012

Kunskapsutvecklingen om area och volym fortsätter i gymnasieskolans högre kurser. Där kan eleverna lösa problem som handlar om största och minsta möjliga area eller volym utifrån givna förutsättningar. Eleverna som fortsätter att läsa mer matematik möter också integralbegreppet och ges fler verktyg för att beräkna area och volym.

Avslutningsvis

I detta kapitel har en avgränsning gjorts till några olika uppgiftstyper. Det finns fler typer av uppgifter och många möjligheter till variation. Uppgifter kan också förändras på olika sätt. En sluten uppgift kan öppnas upp, en flervalsuppgift kan ändras och användas utan alternativ. Uppgifter kan anpassas till elever genom val av till exempel talområde.

I val av uppgifter för olika sammanhang finns det frågor att fundera över och diskutera. Nedan finns ett urval av frågor till detta.

Förslag till diskussioner/aktiviteter

1. Vilka förmågor kan utvecklas i arbetet med uppgiften?
2. Vilken grad av öppenhet har de uppgifter som eleverna arbetar med?
3. I vilket sammanhang passar uppgiften bäst, i undervisning/lärande eller bedömning?
4. Vilka matematiska begrepp och vilka kopplingar till andra begrepp ges eleverna möjlighet att utveckla genom arbetet med uppgiften?
5. Visar uppgiften hur långt eleverna kommit i sin begreppsutveckling?
6. Vilka eventuella missuppfattningar kan uppgiften avslöja?
7. Passar uppgiften bäst att lösas i en muntlig eller i en skriftlig situation?
8. Är uppgiften mest lämpad att lösas enskilt, i par eller grupp?
9. Är uppgiften mest lämpad att lösas med papper och penna eller digitalt?
10. Hur ser uppgifter ut som är lämpliga i flera årskurser?
11. När och hur vet du att en uppgift är lämplig?

Referenser

- Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"? *For the learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.
- Cunningham, G. (1998). Assessment in the classroom: Constructing and interpreting tests. *Australian journal of teacher education*, 23(1), 40–55.
- Drath, B. & Löfwall, S. (2014). Vår syn på matematikkunnskap och matematikundervisning. I K. Wallby, U. Dahlberg, O. Helenius, J. Häggström & A. Wallby (red). *Matematikundervisning i praktiken*. (s. 10–22). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Hattie, J., Fisher, D. & Frey, N. (2017). *Framgångsrik undervisning i matematik: en praktisk handbok*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Hirst, P.H. (1974). *Knowledge and the curriculum: a collection of philosophical papers*. London: Routledge.
- Hodgen, J. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Improving assessment in School mathematics. I P. Andrews & T. Rowlands (red). *Masterclass in mathematics Education. international perspectives on teaching and learning* (s. 27–38). London: Bloomsbury.
- Korp, H. (2011). *Kunskapsbedömning: vad, hur och varför? [kunskapsöversikt]*. Stockholm: Skolverket.
- Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri: matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Malmer, G. (1999). *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM). Göteborgs universitet.
- Newton, P. (2007). Clarifying the purposes of educational assessment. *Assessment in Education*, 14(2), 149–170.
- Pettersen, R. C. (2008). *Kvalitetslärande i högre utbildning: introduktion till problem- och praktikbaserad didaktik*. Stockholm: Studentlitteratur.
- Pettersson, A., Olofsson, G., Kjellström, K., Ingemansson, I., Hallén, S., Björklund Boistrup, L. & Alm, L. (2010). *Bedömning av kunskap: för lärande och undervisning i matematik*. Stockholm: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Skolverket. (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: Reviderad 2018*. Stockholm: Skolverket.
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268–275.
- Suurtamm, C., Thompson, D.R., Young Kim, R., Diaz Moreno, L., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. & Vos, P. (2016). *Assessment in Mathematics Education*. Schweiz: Springer Open.
- Vygotskij, L. (2005). *Tänkande och språk*. Enskede: TPB.

Bedömning av elevers visade kunskaper

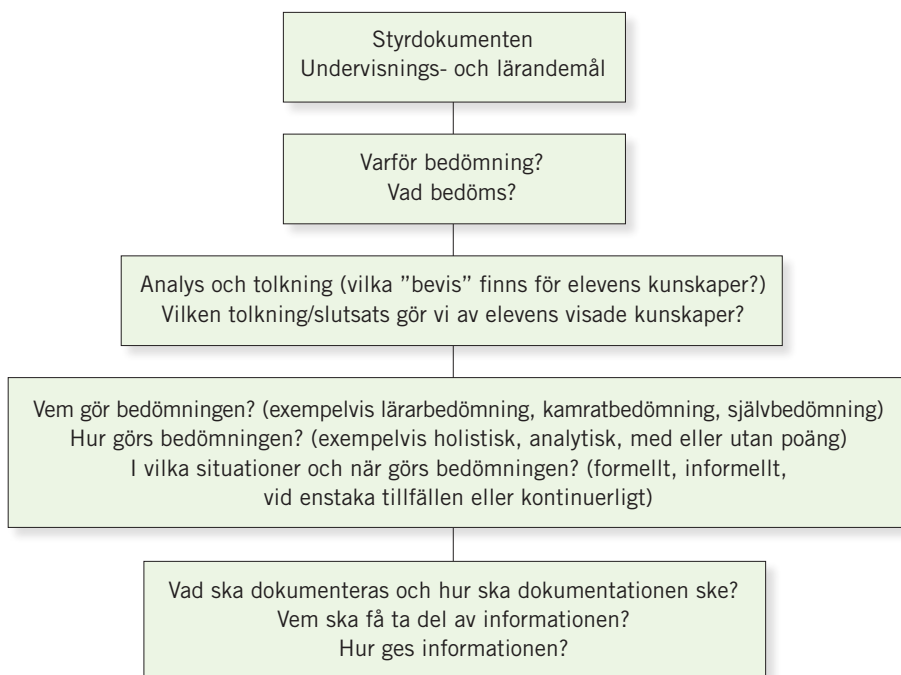
Astrid Pettersson, Katarina Kristiansson,
Inger Ridderlind och Maria Nordlund

BEDÖMNING AV KUNSKAPER har ett klart signalvärde. Bedömning signalerar vad som är viktigt att veta. Om bedömningen fokuserar elevens svar, kan elever få signalen att det viktigaste är att få rätt svar när de löser uppgifter i matematik. Fokuserar däremot bedömningen hur elever har resonerat och argumenterat för att komma fram till en lösning, kan elever få signalen att matematiska resonemang är viktiga. För läraren är det därför centralt att vara medveten om vad som bedöms och vad som inte bedöms, så att inte bara det som är lätt att bedöma bedöms. Vi måste bedöma den kunskap som eleverna bör utveckla. För eleverna är det viktigt att det som bedöms också undervisas om. Både styrdokumentet och forskningen visar att bedömningen måste vara allsidig, vilket innebär att bedömningen görs på ett varierat sätt, bland annat genom att läraren använder olika bedömningsmetoder och olika bedömningssituationer.

Bedömningsprocessen innebär att samla in information om visade kunskaper, beskriva och analysera samt tolka dessa och sedan fatta beslut. Beslutet kan innebära att läraren bestämmer sig för vilken återkoppling som den enskilde eleven eller gruppen elever bör ha, men den kan också innebära vad jag som lärare måste förändra i min undervisning (se kapitel 3). Ett annat beslut kan vara att värdera informationen och sedan sätta ett betyg.

Det som är viktigt är orsaken till bedömningen, varför ska den göras? Ska bedömningen göras för att främst få ett underlag till att förbättra elevers lärande och lärarens undervisning? Är orsaken betygssättning eller att ge eleven och dennes föräldrar ett omdöme om elevens sammantagna kunskaper? Och hur ska bedömningen användas? Sedan kommer den viktiga frågan, vad ska bedömas? Därefter ska uppgifter och frågor konstrueras, formuleras och användas så att eleverna har möjlighet att visa vad de kan.

Bedömningsprocessen kan illustreras med följande figur



I detta kapitel behandlas några av dessa steg. Övriga steg behandlas i andra kapitel och då främst i kapitel 2, 3 och 4.

Begränsningar och möjligheter

Det som ska styra all undervisning och bedömning i skolan är läroplan, kursplan/ ämnesplan och kunskapskrav. Både grundskolans och gymnasieskolans läroplaner (Skolverket, 2011; 2018) framhåller att läraren utifrån kunskapskraven allsidigt ska utvärdera varje elevs kunskapsutveckling och vid betygssättningen utnyttja all tillgänglig information om elevens kunskaper i förhållande till kunskapskraven samt göra en allsidig bedömning av dessa kunskaper.

Vidare står att betyget uttrycker i vilken grad den enskilde eleven har uppfyllt de kunskapskrav som finns för respektive ämne. Som stöd för betygssättningen finns ämnesspecifika kunskapskrav för olika betygssteg.

Styrdokumentet ger ramar och inriktning för bedömningen. En begränsning är naturligtvis den tid som står till förfogande för lärare och elever när det gäller bedömning. Vad gör vi med den tid som vi har till vårt förfogande? Hur ska vi effektivt använda den tid som finns? Tiden är en viktig aspekt som måste analyseras och som måste tas ställning till. Vilka prioriteringar gör vi? En annan aspekt som också är viktig att analysera är vilka begränsningar och möjligheter ger de bedömningsmetoder som används för att eleverna ska få visa sina kunskaper.

Information om elevers visade kunskaper

Hur ska jag som lärare kunna få information om vad eleverna kan? Och vilka är de kunskaper, som eleverna visar, som jag måste ha information om? Vi tar den sista frågan först.

En av lärares viktigaste uppgifter är att välja matematikinnehåll som ska behandlas i undervisningen, förmågor som undervisningen ska utveckla samt hur och vad som ska bedömas. I läroplanerna, kursplanerna/ämnesplanerna får vi stöd genom de beskrivna förmågorna och det centrala innehållet. Bedömningen måste spegla det som står i läroplanerna och kursplanerna/ämnesplanerna och när det gäller betygssättningen även det som står i kunskapskraven. I läroplanen för grundskolan står bland annat att ”Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola ... kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet” (Skolverket, 2018, s 11). För gymnasieskolan är motsvarande formulering ”... tillägnar sig goda kunskaper i de kurser som ingår i elevens studieväg och kan använda dessa kunskaper för vidare studier och i samhällsliv, arbetsliv och vardagsliv” (Skolverket, 2011, s 9). Bägge formuleringarna har en tonvikt på användningen av kunskaper i olika sammanhang.

Men allt som behandlas i skolan i matematik kan naturligtvis inte bedömas för varje elev. En prioritering måste göras, både av innehåll och former för bedömningen. Det måste göras ett urval av innehåll som ska bedömas. Ett urval av innehåll som både ska vara relevant och representativt. Validitet är ett begrepp som används i dessa

sammanhang. En mer allmän definition på validitet är att ”bedömningen ska pröva det bedömningen avser att pröva”. Validiteten har med innehållet att göra. När det gäller relevansen är det viktigt att det som utifrån styrdokumentet är väsentligt att eleverna ska kunna är det som också bedöms. Både kvantiteter (hur mycket eleven kan) och kvaliteter (hur väl eleven kan det) i elevens kunskande ska bedömas. Men det måste finnas en balans mellan kvantitet och kvalitet i bedömningarna. Black och Wiliam (1998a,b) menar att det finns en tendens hos lärare att det snarare är kvantitet som bedöms än kvalitet och att lärare riktar större uppmärksamhet mot poängsättning och betygssättning än mot att ge eleven råd om hur hen kan förbättra sitt lärande. Den allsidiga bedömningen ska spegla både det centrala innehållet och förmågorna samt relateras till kunskapskraven. Om bedömningen bara behandlar några av kunskapsområdena och några av förmågorna kan bedömningen vara relevant. Men det som bedöms måste också vara representativt vilket innebär att den sammantagna bedömningen måste representera samtliga kunskapsområden och förmågor.

Det ställs alltså två krav för att bedömningen ska ha tillfredställande validitet, bedömningen ska både vara relevant och representativ. Det är en förutsättning för att de tolkningar och slutsatser som dras ska ha hög validitet.

Vid kunskapsbedömningar ska vi få veta vad eleven kan och det kan vi bara få om eleven visar sina kunskaper för oss. Vi kan därför aldrig säga om en elev att hen inte kan, vi kan bara säga att hen inte har visat sin kunskap. Kärnfrågan är hur vi ska förvissa oss om att eleven visar sina kunskaper. Wiliam (1992) pekar på faktorer som gör att eleven inte visar sina kunskaper även om eleven kan. Det kan exempelvis vara att eleven inte har förstått uppgiften eller frågan eller att eleven av någon anledning inte vill visa sina kunskaper.

Beskriva, analysera och tolka information

Eleverna kan arbeta med uppgifter på många olika sätt. Den elev som har kommit fram till korrekta resultat kan ha använt olika strategier och metoder, exempelvis sådana som är beroende av sitt sammanhang eller mer generella. Den elev som har kommit fram till ett felaktigt resultat kan ha gjort fel som är mer tillfälliga, det vill säga de förekommer inte systematiskt utan är av mer slumpmässig karaktär, exempelvis enklare räknefel. Det finns dock fel som är mer systematiska, och som uppträder praktiskt taget konsekvent i elevens olika arbeten.

Exempel på frågor som läraren kan ställa till elevens arbete för att samla information:

- Vad visar eleven för kunskaper?
- Vilket kunnande visar eleven i sitt arbete med uppgiften?
- Vilka förmågor har eleven visat och vilket centralt innehåll har förmågorna tillämpats på?
- Använder eleven relevanta metoder och strategier?
- Använder eleven generella lösningsmetoder eller är de mer begränsade?
- Vilka förtjänster och brister finns i elevarbetet?
- Vilket matematiskt språk använder eleven?
- Vilket resultat har elevens lösning kommit fram till?
- Vilka kvaliteter har elevarbetet?

Forskning (bland annat Pettersson, 1990; 1994) har visat att elever som uppvisar höga resultat i matematik

- Använder mer generella metoder
- Gör fler matematiskt kvalificerade lösningar
- Gör inte allvarliga fel, det vill säga det ligger inte stora förståelsebrister bakom deras felaktiga lösningar
- Försöker lösa alla uppgifter.

Elever som uppvisar låga resultat har i större utsträckning än övriga

- Brister i begreppsförståelse
- Felaktiga och/eller invecklade lösningsstrategier
- Brister i taluppfattning, exempelvis svårt att handskas med små och stora tal
- Svårigheter med att generalisera sina strategier.

Dessutom visar det sig att elever som uppvisar låga resultat i större utsträckning inte fullföljer sina lösningar och försöker inte alltid lösa eller svara på alla uppgifter samt lämnar inte alltid lösningar till sina svar.

Vid analys av elevlösningar är det därför viktigt att inte bara konstatera om eleven har kommit fram till ett korrekt eller felaktigt resultat utan också på vilket sätt eleven har fått sitt resultat.

Elevernas visade kunskaper ska bedömas och därefter ska eleverna få reda på resultatet av bedömningen. Ett första steg är att bara beskriva den lösning/arbete som eleven har gjort utan värderingar. Nästa steg är att analysera lösningen och tolka den. Watson (2003) befärar att bedömning enbart blir en teknikalitet, att lärare bara kontrollerar om eleven har nått ett enkelt formulerat mål och att det sker på ett enkelt mätbart sätt. Detta görs istället för att också använda mer komplicerade bedömningsmetoder så att även det som är väsentligt att bedöma också bedöms. Teknikaliteter menar hon bara ska vara en del i hela bedömningsprocessen. Det bästa är att analysera och tolka elevens visade kunskaper ordentligt och att sedan använda informationen från dessa för att professionellt och kontinuerligt använda det för att utveckla undervisningen och lärandet.

Sedan följer tolkningen, som oftast relateras till kunskapskrav eller kriterier. I vilken utsträckning har eleven uppfyllt målen, kunskapskraven eller kriterierna? I vilken utsträckning har eleven uppfyllt förväntningarna? I analys- och framförallt i tolkningsprocessen är validiteten viktig. Ligger min analys och tolkning i linje med det som ska bedömas, eller har jag bedömt något annat och riskerar därmed att dra slutsatser som inte är relevanta?

Situationer, metoder och anvisningar för bedömning

Bedömning kan ske i olika situationer som kan delas in i formell och informell bedömning. Formell bedömning är en bedömning som eleverna vet om i förväg och som ofta sker för hela klassen eller gruppen, exempelvis i samband med att ett undervisningsområde avslutas. De nationella proven är ett annat exempel på formell bedömning. Den formella bedömningen fokuserar ofta elevernas prestationer. Informell bedömning fokuserar ofta lärande och sker mer kontinuerligt i samband med undervisningen och olika klassrumsaktiviteter när läraren ställer frågor och lyssnar in elevernas diskussioner, resonemang och svar (se kapitel 3).

I de olika bedömningssituationerna kan olika typer av bedömningsmetoder användas. Ett sätt att dela in metoderna är utifrån på vilket sätt elevlösningen betraktas, holistiskt eller analytiskt. Den holistiska bedömningsmetoden fokuserar helheten medan den analytiska tar de olika delarna i beaktande. Bägge dessa metoder kan användas såväl för bedömning i summativ som formativ mening (se kapitel 2).

Den holistiska bedömningen innebär att helheten bedöms och ett sammanfattande omdöme kan ges,

- som exempelvis ej godtagbart, godtagbart, väl, mycket väl.

Den holistiska bedömningen kan också relatera till elevens lösning

- som exempelvis utmärkt lösning, godtagbar lösning med inga allvarliga fel, acceptabel lösning men med något allvarligt fel och flera enklare fel, ej genomförd lösning men med godtagbar ansats, ingen lösning.

Begränsningen med en holistisk bedömning är att det kan vara svårt att få en mer detaljerad information om en lösnings förtjänster och brister.

En lösning kan också bedömas ur olika aspekter och då kallas bedömningen för analytisk. Bedömningen kan exempelvis ske utifrån aspekterna metod, genomförande och redovisning, eller strategi, matematiskt språk, kreativitet, tydlighet och begriplighet, eller utifrån andra aspekter som läraren är särskilt intresserad av att få information om. Elevens lösning bedöms sedan utifrån vilken kvalitet elevlösningen visar i de olika aspekterna, från lägre kvalitet till högre kvalitet.

Den analytiska metoden kan ge större möjligheter att få en mer detaljerad information om en lösnings brister och förtjänster.

Oavsett om bedömningsmetoden är holistisk eller analytisk kan anvisningen till den vara generell eller uppgiftsspecifik. En generell bedömningsanvisning kan tillämpas på flera olika uppgifter. Är den holistisk och generell grundar sig bedömningen på ett allmänt intryck av helheten i flera uppgifter. Är den däremot holistisk och uppgiftsspecifik relateras bedömningen till ett allmänt intryck av lösningen av en specifik uppgift.

Är bedömningsmetoden analytisk med en generell bedömningsanvisning grundar den sig på olika aspekter på flera uppgifters lösningar, men är den däremot analytisk med uppgiftsspecifik bedömningsanvisning är bedömningen relaterad till en specifik uppgift. Ett exempel på en analytisk bedömning med uppgiftsspecifik anvisning i form av en bedömningsmatris finns i bilaga 1. Den bedömningsmatrisen är utvecklad för gymnasieskolans prov till uppgiften Klippta kvadrater (se kapitel 4). I bilaga 2 ges exempel på en analytisk bedömningssätt med en generell bedömningsanvisning, som presenteras i form av en matris som använts inom ett projekt som handlade om matematik i yrkesämnen (MyrA). Det var ett samverkansprojekt mellan matematik och yrkesämnen och mellan PRIM-gruppen och Växjö universitet. Matrisen är relativt detaljerad och begreppet kompetenser användes istället för förmågor.

För att få en mer övergripande bedömning kan den holistiska metoden vara givande. Den holistiska bedömningen kan vara snabbare att utveckla och använda jämfört med den analytiska. En nackdel med den holistiska metoden är, som tidigare nämnts, att det kan vara svårt att få en mer detaljerad information om en elevs kunskaper. Omdömena är ofta allmänt formulerade, antingen som ett helhetsintryck av elevernas visade kunskaper eller på lösningsnivå. I bilaga 3 till detta kapitel finns två uppgifter från kapitel 4. Till båda uppgifterna finns uppgiftsspecifika bedömningsanvisningar, en utan poäng och en med poäng.

En vanlig konkretisering av den analytiska metoden är bedömningsmatrisen. Fördelen med en matris är att aspekterna tydliggörs liksom kunskapskvaliteterna. Men även den analytiska metoden har sina nackdelar. Vad händer om de aspekter som valts inte täcker in all den information som behövs för att göra en relevant bedömning? Vad händer om bedömningsmatrisen blir för styrande även för undervisningen så att viktiga aktiviteter glöms bort? En kommentar från en lärare var att hen inte "fick in" en av sina högrepresterande elevers prestationer i bedömningsmatrisen. Det kan tyda på att matrisen blir alltför standardiserad och inte kan fånga in elevernas prestationer på ett allsidigt sätt.

En annan viktig fråga är om bedömningsmatrisen ska innehålla poäng eller ej. I kapitel 9 ges exempel på bedömningsmatriser som inte innehåller poäng. Vad händer med bedömningen om kunskaperna kvantifieras? Risker är även då att vi går miste om kvaliteter och detaljer i elevernas kunskaper.

Varje matris innehåller aspekter (exempelvis olika förmågor), förklaringar till aspekterna, kvalitetsnivåer och beskrivningar av de olika nivåerna. Ett exempel på hur en analytisk bedömning kan struktureras i form av en bedömningsmatris visas här.

Kvalitet/Aspekt	Aspekt 1: Metod	Aspekt 2: Matematiskt språk	Aspekt 3: Redovisning
Högre			
Lägre			

Matriser kan användas såväl i formativt som summativt syfte och finns till exempel i de nationella proven (www.su.se/primgruppen). Matrisen kan användas för att följa och stödja en elevs kunskapsutveckling. Innehållet i matrisen kan skifta och den kan med fördel användas av eleven själv. En fördel med matrisen är att både elever och lärare kan se progressionen i kunskapskvaliteter.

Skriftligt, muntligt eller i handling

Elever kan visa sina kunskaper i matematik på olika sätt: skriftligt, muntligt och i handling. Eleverna ska få visa vad de kan och vilket sätt att visa ger bäst förutsättningar för det? Det beror naturligtvis på vad som ska bedömas och hur eleven bäst kan visa sina kunskaper. Matematik har varit och är ett ämne där det har varit och är vanligt att eleverna får visa sina kunskaper skriftligt. Vilka elever gynnar det? Naturligtvis elever som har förmågan att formulera sig och visa sina lösningar skriftligt. För de elever som upplever att det är svårt att redovisa skriftligt kan det vara bättre att de får visa sina kunskaper genom att muntligt förklara och beskriva hur de har löst en uppgift eller att de får använda något material för att visa sina resonemang. Fördelen när bedömningen sker muntligt och i handling är att läraren kan ställa frågor under tiden så att eleven får förtydliga och fördjupa sitt resonemang.

Det är viktigt att se skillnad på en prestation som ska bedömas och en som inte ska bedömas. Alla diskussioner i och om matematik som sker i matematikklassrummet blir inte och ska inte vara föremål för bedömning av enskilda elevers visade kunskaper. Det är däremot viktigt att eleverna får klart för sig när deras prestationer utsätts för bedömning såväl i formativ som summativ mening.

Vid bedömning av elevernas prestationer som sker vid uppgifter som ska redovisas muntligt ingår att eleven uttrycker sig begripligt och att hen använder ett korrekt och relevant matematiskt språk. Det kan också ingå att ta del av andras argument och att kunna argumentera för sina egna ställningstaganden.

Redovisningsformerna kan organiseras på olika sätt beroende på bland annat de kunskaper som ska bedömas. Ett samtal mellan en elev och läraren kan vara upplagt så att läraren ställer relevanta frågor som besvaras av eleven och som eventuellt också diskuteras. Andra former är när eleven presenterar ett avsnitt eller en lösning för hela klassen eller bara för läraren. Men bedömningen kan också ske i en gruppdiskussion mellan elever. Eleverna för ett samtal eller löser och diskuterar problem tillsammans i grupp. Läraren har rollen som samtalsledare. I en annan situation kanske läraren i stället leder ett förhör med hela klassen eller delar av klassen, där läraren på förhand har bestämt vilka frågor som ska besvaras (Sollerman, 2016, 2017).

Den bedömning som görs ska ha hög validitet, det vill säga vara relevant och representativ. Men bedömningen måste också vara tillförlitlig. Bedömningen får inte vara slumpmässig och variera mellan olika bedömare av samma elevprestation. Den får heller inte variera för samma bedömare beroende på när och var bedömningen av en elevprestation görs. Ett annat namn för tillförlitligheten är reliabilitet. Undersökningar har visat att matematiklärare gör reliabla bedömningar när det gäller uppgifter som eleverna har redovisat skriftligt (Olofsson, 2006; PRIM-gruppen, 2007; Lind Pantzare, 2018). Däremot är bedömningar vad gäller muntliga prestationer inte lika reliabla (Sollerman, 2016, 2017). Forskning visar att ju mer strukturerad och detaljerad en bedömningsanvisning är, desto högre är sannolikheten att två olika bedömare kommer till samma resultat (Brown, 1992; Shavelson m. fl. 1992, PRIM-gruppen, 2007). Sambedömning kan stärka tillförlitligheten genom att två eller flera lärare bedömer samma elevprestation (Sollerman, 2017).

Beslutsfattande

När analys, tolkning och bedömning är gjord ska läraren även avgöra vilka slutsatser som kan dras. I formativ mening kan analysen, tolkningen och bedömningen av elevernas visade kunskaper bara göra nytta för elevens lärande om läraren diskuterar den med eleven och eleven har användning för den. Det kan göras på olika sätt och i olika omfattning. Återkoppling betyder att matematikkunskaper fokuseras, att eleven får bekräftelse på vad hen har visat för kunskap, och fel och brister kan uppmärksammas. Men i återkopplingen ligger också att hjälpa eleven att komma vidare i sitt matematiklärande (se kapitel 3). Det som också är viktigt att ta reda på är hur eleven tolkar den återkoppling som ges (Black & Wiliam, 1998a, Hattie & Timperley 2007; Sadler 1989, 1998). I bedömning i formativ mening är det därför viktigt att eleven betraktas som aktiv i sin egen lärandeprocess och som deltagare i bedömningen.

Men analysen, tolkningen och bedömningen kan också användas i summativ mening, som underlag för betygssättning (bedömning utifrån kunskapskravet i årskurs 3) eller inför ett utvecklingssamtal. Då handlar det om att summera var eleven är nu för att se vad eleven behöver utveckla.

Enligt styrdokumentet är det viktigt att elevernas kunskaper bedöms på ett likvärdigt sätt oavsett skola. Det är därför viktigt att lärare diskuterar och analyserar hur de bedömer elevernas kunskaper utifrån kunskapskraven. För dessa diskussioner kan lärare tillsammans analysera elevlösningar som visar på olika kvalitativa nivåer.

Vem gör bedömningen?

Vem ska då bedöma elevens kunskaper? Det vanligaste är att det är en lärare som gör det och det är naturligtvis nödvändigt när betyg ska sättas, som är en myndighetsutövning. Men för bedömning i formativ mening är även eleven själv och dennes kamrater viktiga aktörer vid bedömning. Eleverna ska enligt styrdokumentet utveckla förmågan att själva bedöma sina resultat.

En viktig erfarenhet från lärare som låtit elever medverka vid bedömning, antingen med självbedömning eller kamratbedömning, är att eleverna måste få tid att lära sig hur det går till. Risken är annars att eleverna bedömer sina egna kunskaper och sina kamraters på ett mycket ytligt sätt som inte leder lärandet framåt (Lundgren, 2017; Lundgren & Pettersson, 2012). I kapitel 3 behandlas såväl självbedömning som kamratbedömning.

Material att använda

Material som är relaterade till detta kapitel, det vill säga uppgifter, elevarbeten och bedömningar, finns på Skolverkets hemsida (www.skolverket.se) och på PRIM-gruppens hemsida (www.su.se/primgruppen). Här vill vi särskilt lyfta fram MiMa-projektet, som var ett projekt vars syfte var att eleverna ska bli mer medvetna om sitt lärande och sitt matematiska kunnande och därigenom öka sitt intresse för matematik (se kapitel 3).

Förslag till diskussioner/aktiviteter

1. När anser du/ni att holistisk respektive analytisk bedömning är mest lämpligt att använda?
2. Vilka kunskapsområden och förmågor är viktigast att bedöma? Hur gör ni det?
3. Vilka är de största skillnaderna i ert arbete med summativ respektive formativ bedömning?
4. Välj ut ett område som du/ni är särskilt intresserad av att ta reda på vad eleverna kan inom detta område. Skapa en uppgiftsspecifik bedömningsmatris. Vilka olika aspekter är relevanta? Hur beskriver ni dem? Vilka olika nivåer är relevanta? Hur beskriver ni dem?
5. Gör samma sak som i 4) men låt eleverna vara med och konstruera matrisen. Vilken erfarenhet gör ni av elevernas deltagande?
6. På vilka olika sätt får eleverna vara delaktiga i bedömningen av sina egna och kamraters visade kunskaper?
7. Ge exempel på uppgifter som lämpar sig bäst för elever att redovisa skriftligt, muntligt respektive i handling?

Referenser

- Black, P. & Wiliam, D. (1998a). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education; Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7–71.
- Black, P. & Wiliam, D. (1998b). *Inside the black box: Raising Standards through classroom assessment*. London: Kings College of Education.
- Brown, M. (1992). Elaborate nonsense? The muddled tale of Standard Assessment Tasks in Mathematics at KS 3. I C. Gipps (red). *Developing Assessment for National Curriculum*. Buckingham, London: ULIE/Kogan Page.
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112.
- Lind Pantzare, A. (2018). *Dimensions of validity. Studies of the Swedish national tests in mathematics*. Doktorsavhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Lundgren, P. (2017). Ett gensvar till Astrid från lärarna som var med i forskningscirkeln "Gensvar för lärande". I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning. Alla människors möte borde vara så*. Vänbok till Astrid Pettersson. (s. 74–79). Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Lundgren, P. & Pettersson, A. (2012). Lärare och forskare i samverkan – en forskningscirkel om gensvar och hur den utvecklats. I S. Eklund (red). *Forskning om undervisning och lärande*. (s. 50–59). Stockholm: Stiftelsen SAF i samarbete med Lärarförbundet.
- Olofsson, G. (2006). *Likvärdig bedömning? En studie av lärares bedömning av elevarbeten på ett nationellt prov i matematik kurs A*. Stockholm: PRIM-gruppen. Lärarhögskolan i Stockholm.
- Pettersson, A. (1990). *Att utvecklas i matematik. En studie av elever med olika prestationsutveckling*. Doktorsavhandling. Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Pettersson, A. (1994). *Hur löser elever uppgifter i matematik? Fördjupad analys*. Skolverkets rapport 61. Stockholm: Skolverket.
- PRIM-gruppen. (2007). *Bedömaröverensstämmelse vid bedömning av ämnesprovet i matematik för årskurs 9*. PM till Skolverket.
- Sadler, R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18(2), 119–144.
- Sadler, R. (1998). Formative assessment; Revising the territory. *Assessment in Education; Principles, Policy & Practice*, 5(1), 77–84.
- Shavelson, R., Baxter, G. & Pine, J. (1992). Performance assessment: Political rhetoric and measurement reality. *Educational Researcher*, 21(4), 22–27.
- Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämne för gymnasieskolan 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Reviderad 2018*. Stockholm: Skolverket.
- Sollerman, S. (2016). *Bedömaröverensstämmelse på muntliga delprov. En studie av interbedömarreliabiliteten vid bedömning av nationella muntliga delprov i matematik i gymnasieskolan*. Opublicerat manus.
- Sollerman, S. (2017). *Bedömaröverensstämmelse på muntliga delprov. En studie av interbedömarreliabiliteten vid bedömning av nationella muntliga delprov i matematik i årskurs 9*. Opublicerat manus.

Watson, A. (2003). Making judgement about pupil's mathematics. I P. Gates (red). *Issues in mathematics teaching*. London och New York: Routledge.

Wiliam, D. (1992). *Technical issues in criterion-referenced assessment: evidential and consequential bases*. Paper presented at the 18th annual conference of international association for educational assessment.

Analytisk uppgiftsspecifik bedömningsmatris till uppgiften Klippta kvadrater

(2/3/3)

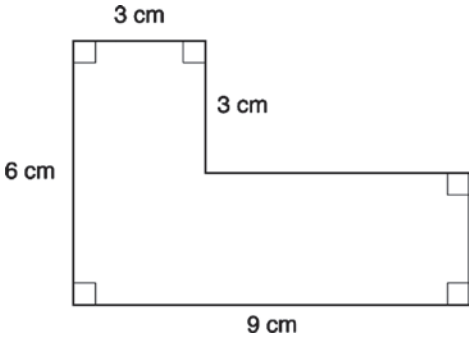
	E	C	A
Metod och genomförande	Eleven påbörjar en lösning, t.ex. genom att dela in minst en kvadrats area i lika stora delar. +E_{PL} Eleven bestämmer den bortklippta andelen korrekt i minst en kvadrat. +E_P	Eleven bestämmer den bortklippta andelen korrekt i minst tre kvadrater. +C_P	Eleven bestämmer ett uttryck eller en formel för den bortklippta andelen. +A_{PL}
Resonemang		Eleven identifierar något mönster, t.ex. hur stor del som klipps bort. +C_R	Eleven visar att formeln/uttrycket stämmer för alla indelningar av en kvadrats sida. +A_R
Kommunikation		Elevens redovisning är strukturerad. I undersökningen används ett godtagbart matematiskt språk med ord, bild eller symboler. +C_K	Elevens redovisning är välstrukturerad. I bevisföringen används ett lämpligt matematiskt språk med ord, bild eller symboler. +A_K

Indexeringen representerar förmågorna såsom de har använts i de nationella proven för matematik 1 i gymnasieskolan. PL=problemlösning, P=procedur (motsvarande metod i grundskolan), R=resonemang, K=kommunikation.

Analytisk generell bedömningsmatrix i matematik från Myra

Förmågor/kompetenser	A	C	E
Begreppslig kompetens Eleven förklarar och utvecklar förståelse för matematiska begrepp och storheter i olika situationer samt utifrån de vanliga storheterna tillägnar sig referensramar i karaktärsämnet. Detta inbegriper att använda, beskriva, analysera och definiera begrepp men också att jämföra olika begrepp/storheter och se samband mellan dessa. Kunskaper om enheter och enhetsbyten hör också hit.	eleven definierar några i kursen ingående begrepp samt tydligt beskriver begreppens innebörd och eventuella samband med andra begrepp	eleven använder för kursen centrala begrepp i olika situationer och kan ge en ungefärlig innebörd av begreppen	eleven använder för kursen centrala begrepp i enkla situationer relaterade till såväl tillämpningar i matematik som vardagsliv samt använder med säkerhet förekommande storheter med tillhörande enheter
Strategisk kompetens Eleven analyserar problem och väljer metod/modell vid problemlösning. I förmågan ingår också att jämföra, granska och utveckla metoder/modeller samt bedöma rimlighet.	eleven analyserar problemen, väljer där så är lämpligt generella lösningsmetoder, modellerar komplexa problem och värderar kritiskt sina resultat och använda metoder/modeller	eleven väljer lämpliga metoder för olika typer av problem, modellerar enkla situationer samt värderar sina resultat i de olika fallen	eleven väljer metod för rutinuppgifter och avgör om resultatet är rimligt
Beräkningskompetens Eleven väljer, använder och hanterar procedurer med eller utan tekniska hjälpmedel. I denna förmåga ingår att effektivt behärska olika slags rutinuppgifter. Vidare ingår att flexibelt och med omdöme hantera tekniska hjälpmedel.	eleven visar god förståelse för olika procedurer samt med säkerhet hanterar aritmetiska och algebraiska uttryck	eleven visar säkerhet vid hantering av procedurer och väljer självständigt och med omdöme beräkningsmetod och tekniska hjälpmedel samt hanterar aritmetiska och enklare algebraiska uttryck	eleven hanterar procedurer, som är nödvändiga för att lösa rutinuppgifter, såväl med som utan tekniska hjälpmedel
Argumentations- och kommunikationskompetens Eleven för matematiska resonemang, argumenterar logiskt och reflekterar i tal och skrift. Eleven troliggör och genomför bevis. Eleven kommunicerar och diskuterar i tal och skrift och tolkar, förklarar och använder matematiska symboler. I förmågan ingår också att presentera och förklara andra representationsformer, som grafer, diagram.	eleven argumenterar för sina lösningar och matematiska påståenden med ord och med hjälp av matematiska symboler samt använder skriftligt, muntligt och i handling ett lämpligt matematiskt språk	eleven följer och prövar andras förklaringar, tolkar och formulerar matematiska uttryck, har ett relevant matematiskt språkbruk, samt redovisar med logiska resonemang sina lösningar och resultat muntligt, skriftligt och i handling	eleven tolkar enklare matematisk text och förklarar med vardagligt språk sina lösningar och resultat muntligt, skriftligt och i handling

Holistiska uppgiftsspecifika bedömningsanvisningar



3 cm

6 cm

3 cm

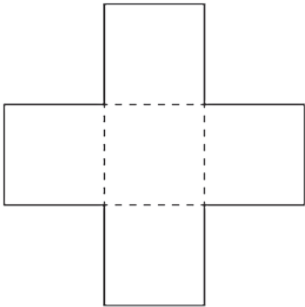
9 cm

Beräkna arean av figuren.
Visa hur du löser uppgiften.

Bedömninganvisning i två kvalitativa nivåer utan poäng

Högre	Visar metod för hur arean kan beräknas med korrekt svar och enhet.
Lägre	Påbörjad lösning, t.ex. beräknar arean för en del av figuren eller bestämmer arean med hjälp av cm ² -rutor.

Figuren består av 5 kvadrater med lika stor area.
Hela figurens area är 405 cm².
Bestäm omkretsen av hela figuren.



Bedömningsanvisning med poäng

108 cm	(Max 2/1)
Påbörjad lösning, t.ex. beräknar arean av en liten kvadrat.	+ E
Beräknar någon relevant längd för att kunna beräkna omkretsen, t.ex. en liten kvadrats sida.	+ E
Lösning med korrekt svar.	+ C

Centralt utarbetade prov

Astrid Pettersson, Margareta Enoksson, Niclas Evén,
Katarina Kristiansson, Anette Nydahl och Heléne Sandström

VI HAR I SVERIGE haft centralt utarbetade prov för den obligatoriska skolan i snart 80 år. Vad var det som gjorde att dessa prov infördes? Dessa prov infördes för att betygen skulle bli mer rättssäkra. Betygssättningen skulle vara pålitlig oavsett vem som satte betygen. Centralt utarbetade prov skulle vara en hjälp för detta. De första centralt utarbetade proven för den obligatoriska skolan var standardproven som infördes på 1940-talet. Syftet med proven var att skapa största möjliga likformighet i betygssättningen i landet. Det innebar då och fram till dess vi fick ett mål- och kunskapsrelaterat betygssystem (till mitten av 1990-talet) att standardproven för grundskolan och de centrala proven för gymnasieskolan skulle styra lärarens betygssättning (Ljung, 2000, 2005). Provresultatet för standardproven respektive centralproven rapporterades in för ett slumpmässigt urval av elever till de institutioner som utvecklade och konstruerade proven, fortsättningsvis kallas dessa för provinstitutionerna. Elevernas resultat på proven överfördes till normtabeller som gav resultatfördelningar vilket överensstämde med en normalfördelning. Normalfördelning valdes därför att flera andra av människans egenskaper som kan mätas, som till exempel längd och vikt, är normalfördelade. Gränserna för de olika provbetygen på ett standardprov och ett centralprov sattes alltså i efterhand. Provet gav på så sätt information om hur många elever i en klass som skulle ha ett visst betyg men inte vilka elever (Skolöverstyrelsen/ PRIM-gruppen, 1989a). Även om provresultatet var styrande för betygssättningen, fick lärarnas betygssättning skilja sig från provbetyget. Det var tillåtet att klassens/ gruppens medelbetyg avvek i intervallet $\pm 0,2$ jämfört med medelbetyget på det centrala provet för gymnasieskolan. Medelbetygen kunde också skilja mer från provbetygens medelvärde om rektor gav tillstånd till större skillnad. Någon motsvarande begränsning fanns inte för standardproven. Betygsskalan var under senare år femgradig med betygen 1–5, där 5 var högsta betyg. Det relativa systemet innebar att fördelningen av betyg och/eller totalpoäng skulle vara normalfördelade. Det ställde krav på att uppgifterna skulle ha olika svårighetsgrad, liksom att varje uppgift skulle ha förmågan att kunskapsmässigt skilja de högpresterande eleverna från de lågpresterande. Det sista standardprovet i matematik gavs 1997 och de sista centrala proven i matematik genomfördes i mitten av 1990-talet.

Framväxten av nationella prov i matematik

I och med att Sverige gick från ett regelstyrt skolsystem (Skolöverstyrelsen, 1980) till ett mål- och kunskapsrelaterat system (Utbildningsdepartementet, 1994) ändrades bedömningssystemet och därmed också provsystemet. Proven skulle inte längre *styra* betygssättningen utan istället *stödja* lärarens bedömning och betygssättning. Proven skulle också stödja en likvärdig bedömning över landet. Bedömningen skulle fokusera kvaliteter i elevens visade kunskap och inte enbart kvantiteter. Läroplanens (Utbildningsdepartementet, 1994) kunskapssyn liksom ämnessynen i kursplanerna skulle genomsyra de nationella proven och de diagnostiska materialen. Antalet prov i matematik ökade radikalt. Från att det tidigare förekom ett standardprov per år för årskurs 9 och två centrala prov för gymnasieskolan per år skulle det i grundskolan förekomma ett nationellt prov per år för skolår 5 och ett nationellt prov per år för skolår 9. I gymnasieskolan skulle i stort sett varje kurs ha nationella prov, vilket inne-

bar prov två gånger per år eftersom elever avslutar kurser höst eller vår. Dessutom skulle det i grundskolan finnas diagnostiska material för skolår 2 och för skolår 7. Under 2000-talets första decennium ändrades dessa till diagnostiska material för de tidigare respektive senare årskurserna. År 2009 infördes även ett nationellt prov för årskurs 3, då också mål att uppnå infördes för denna årskurs.

För de betygssstödjande proven i matematik infördes positiv poängsättning från och med införandet av läroplanerna för grundskolan respektive gymnasieskolan, Lpo 94 respektive Lpf 94. Poäng gavs för lösningens förtjänster och inte poängavdrag för lösningens brister. Poängen grundar sig på kvaliteter i elevlösningarna. Om en elevlösning visade på kvaliteter som beskrevs i kriterierna för Godkänt (för grundskolan lika med mål att uppnå) genererade lösningen g-poäng. Om en elevlösning visade på kvaliteter som beskrevs i kriterierna för Väl godkänt och/eller för Mycket väl godkänt genererade det vg-poäng. Mvg-kvaliteterna betecknades med så kallade solar och för att få provbetyget mvg måste också ett antal solar fördelade på olika kvaliteter erhållits. Numera har vi en sexgradig betygsskala (F–A) och elevlösningarna relaterar till E-, C- och A-kvaliteter (Kjellström & Olofsson, 2017). Kravgränser för de olika provbetygen bestäms i förväg med kunskapskraven som utgångspunkt.

I och med läroplanen för grundskolan 2011 (Skolverket, 2011a) flyttades det nationella provet i skolår 5 till årskurs 6 och fick ett delvis annat syfte. Det skulle stödja lärarens bedömning och betygssättning. När det gäller gymnasieskolans läroplan Gy 11 (Skolverket, 2011b) innebär den att tre inledande matematikkurser infördes, 1a, 1b, 1c, som är relaterade till de olika programmen. Dessutom infördes muntliga delprov för de nationella proven i gymnasieskolan. Muntliga delprov för skolår 9 fanns sedan 1998. De diagnostiska materialen ersattes av olika typer av bedömningsstöd såväl för grundskolan som för gymnasieskolan och senare också för grundsärskolan. Dessutom har olika kartläggningsmaterial för exempelvis nyanlända elever utvecklats och konstruerats (se kapitel 8).

Jämförelse mellan prov i de två olika bedömningssystemen

För att ge en mer konkret bild av prov från de två olika bedömningssystemen, det relativa och det målrelaterade, jämförs ett standardprov för årskurs 9 från 1989 (Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen, 1989a-i) med ett nationellt prov för årskurs 9 från 2013 (Skolverket, 2013a-f), som får representera de två systemen. Jämförelsen presenteras som en översikt i bilaga.

En sammanfattning av översikten vad gäller likheter och skillnader mellan de två provsystemen ges här.

Det fanns en större frihet för skolan och lärarna i det relativa systemet än i det mål- och kunskapsrelaterade systemet när det gäller tidpunkten då de skriftliga delproven skulle genomföras, hur den formella behandlingen skulle bedömas och om invandrarelever/nyanlända elever skulle delta i provet eller ej. Standardprovet, som skulle styra lärarens betygssättning kunde genomföras under en provperiod, men det nationella provet, som enbart ska stödja lärarens bedömning och betygssättning genomförs på bestämda provdagar för de skriftliga delproven.

För standardprovet tillämpades en negativ poängbedömning, det vill säga fel och brister i lösningarna gav poängavdrag. Poängavdrag gjordes för enklare räknepel där svaret var rimligt, avskrivningsfel, felaktig eller utelämnad enhet i svaret, felaktig eller icke utförd avrundning och redovisningar där elevens tankegång ej helt kunde följas. De nationella proven använder en positiv poängsättning, vilket innebär att förtjänster i lösningarna ger poäng.

En annan påtaglig skillnad är omfattningen av bedömningsanvisningarna. Två sidor för standardprovet och mångdubbelt fler sidor för det nationella provet, som också innehåller bedömda elevlösningar.

En stor skillnad är hur resultaten ska rapporteras in och orsaken till detta. När det gäller standardprovet skulle skolan efter genomförandet skicka in resultat från ett slumpmässigt urval baserade på elevernas födelsedagar. Underlaget skulle användas för att fastställa den övre och undre gränsen för betyget 3 då skalan var 1–5. Normerna skickades ut till skolorna cirka en månad efter provperiodens slut. Skolan skulle skicka in ett urval av provhäften med elevlösningar för analyser bland annat på uppgiftsnivå. Standardprovet var strängt konfidentiellt och standardprovets uppgifter fick inte användas i övnings syfte.

För det nationella provet skickas provbetygens kravgränser ut samtidigt med bedömningsanvisningarna. Insamlingen sker så att alla deltagande elevers resultat skickas in till Statistiska Centralbyrån (SCB). Orsaken till detta är att se hur eleverna presterat på provet i sin helhet. Ett urval av elevresultat och elevlösningar skickas in till provinstitutionen för att användas för analyser av elevers lösningar på uppgiftsnivå. Ej sekretessbelagda prov kan publiceras på Skolverkets och provinstitutionens hemsidor.

Förändringar av funktionerna och syftena med de nationella proven

I samband med övergången till det mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet ändrades provens funktion från att vara styrande till att vara stödjande för bedömning och betygssättning.

Avsikten med standardproven och de centrala proven var att åstadkomma största möjliga likformighet i betygssättningen i hela landet. ”*Provens huvudsyfte är att hjälpa läraren att bestämma betygens nivå och spridning för den enskilda klassen i förhållande till övriga klasser i landet.*” (Skolöverstyrelsen, 1988, s 3)

Syftet med de första nationella proven för grundskolan var enligt Lärarinformation till 1998 års ämnesprov (Skolverket/PRIM-gruppen, 1998, s 1)

- Stödja läraren i bedömningen om och hur väl den enskilde eleven nått målen i kursplanen
- Ge stöd för betygssättningen
- Bidra till att betygen blir jämförbara över landet.

För gymnasieskolan fanns ytterligare ett syfte. Proven skulle ge en så god grund som möjligt för en rättvis betygssättning i landet, då betygen var viktiga som urvalsinstrument till högre utbildning.

Efter några år ändrades ”Bidra till att betygen blir jämförbara över landet” till

- Bidra till en likvärdig bedömning över landet.

Syftena reviderades återigen och var fram till och med läsåret 2017/18 att

- Stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- Ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

Dessa två syften förenar bedömning på individuell nivå med bedömning på huvudmanna- och nationell nivå. Ytterligare två syften skrevs fram.

De nationella proven kan också bidra till

- Att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- En ökad måluppfyllelse för eleverna.

Från och med läsåret 2018/19 är syftet att

- Stödja en likvärdig och rättvis betygssättning.

I årskurs 3 är syftet med nationella prov att

- Stödja bedömningen av uppnådda kunskapskrav.

Värt att notera är att det endast är i syftet för årskurs 3 som bedömning nämns.

Från och med läsåret 2018/19 ska alla prov kallas nationella prov och inte nationella ämnesprov respektive kursprov.

Om vi jämför de olika syftena kan vi konstatera att standardproven och de centrala proven endast hade ett syfte, att åstadkomma största möjliga likformighet i betygssättningen i hela landet. Då de nationella proven infördes formulerades flera olika syften (Erickson, 2017), där det i början var att stödja läraren i bedömningen om och hur väl den enskilde eleven nått målen i kursplanen. På senare tid är likvärdigheten och rättvisan i bedömningen och betygssättningen åter i fokus. Som utredningen Likvärdigt, rättssäkert och effektivt (SOU, 2016) visar är det svårt att ha fler syften för ett och samma prov och utredningen har därför föreslagit en renodling av syftena. Detta har genomförts och konkretiserats i syftet från och med läsåret 2018/19.

Utveckling och konstruktion av nationella prov i matematik

Allt arbete med de nationella proven grundar sig på relevant forskning och analys av styrdokument. I det konkreta arbetet med att utveckla och konstruera nationella provmaterial följer PRIM-gruppen i stort sett det upplägg som visas i följande figur.

Principiella diskussioner

Principiella diskussioner



Principiella diskussioner

Principiella diskussioner

Ständiga principiella diskussioner i relation till styrdokument och relevant forskning är grunden i det kontinuerliga arbetet med att utveckla nationella prov, diagnostiska material och bedömningsstöd. Lika viktigt är att konstruera uppgifter som är i enlighet med läroplanens kunskapssyn och kursplanens/ämnesplanernas ämnessyn, men som också fungerar för elever och lärare. Därför är utvärderingar av uppgifter och elevers och lärares synpunkter på uppgifterna en väsentlig del av PRIM-gruppens analyser. Viktigt i arbetet med att utveckla och konstruera de nationella proven är de lärare, lärarutbildare och forskare som ingår i referensgrupper för de nationella proven. Bearbetningar av utvärderingar kan resultera i nya utvärderingar av reviderade uppgifter, men kan också leda till att nya uppgifter prövas ut. Vid konstruktionen är det viktigt att uppgifterna ger eleverna möjlighet att visa olika kvaliteter i sitt kunnande och att uppgifterna sammantaget täcker stora delar av det centrala innehållet. Det är kvaliteterna i elevers visade kunskap som ska bedömas oavsett om det är nationella prov eller nationella bedömningsstöd. Eftersom kvaliteter ska bedömas måste bedömningsanvisningarna vara relativt omfattande. Utgångspunkterna för bedömningsanvisningarna är kunskapskraven, respektive kursplan/ämnesplan och elevlösningar på olika kvalitativa nivåer. Det väsentliga i arbetet är att göra det som är viktigt enligt kursplan/ämnesplan bedömbart och att inte göra det enkelt mätbara till det viktigaste. Fokus är att

bedöma elevers visade kunskap i matematik så brett och djupt som möjligt utifrån kunskapskrav, läroplaner och kursplan/ämnesplan.

För de nationella proven ska kravgränser anges. Vilket resultat ska eleven minst visa för att anses ha klarat respektive kravgräns? Vilket resultat ska eleven visa för att få ett visst provbetyg i årskurs 6, 9 och matematik 1 eller uppnått det lägsta godtagbara kravet för årskurs 3? För detta arbete krävs såväl kvalitativa som kvantitativa analyser av uppgifternas innehåll och kvaliteter i elevlösningar. Grupper med bland annat verksamma lärare analyserar och diskuterar tillsammans förslag på kravgränser, och ger förslag på kravgränser som sedan diskuteras internt i PRIM-gruppen. PRIM-gruppen föreslår kravgränser, men det är Skolverket som fastställer och beslutar om kravgränser på proven. Skolverket fastställer också allt övrigt provmaterial.

Då ett nationellt prov har genomförts ska det analyseras. Underlagen för dessa analyser är lärarenkäter, elevlösningar som lärare sänder in och de resultat som eleverna har fått på provet som helhet, på delprovsnivå och på uppgiftsnivå. Dessa analyser ger en bild av hur provet har fungerat och hur eleverna har klarat provet, vilka kunskaper som de har visat. Årligen framställs rapporter om provresultaten som finns på PRIM-gruppens hemsida. I analyserna för de nationella proven för årskurserna 6 och 9 samt för matematik 1 studeras relationen mellan totalpoängen och nivåpoängen. För betyg högre än betyget E krävs både ett minst antal totalpoäng och ett minst antal nivåpoäng, alltså eleverna ska ha visat både bredd och djup i sina lösningar/svar. Det förekommer i viss utsträckning att elever kan ha uppnått kravet på totalpoäng för ett visst betyg men inte kravet för nivåpoängen och vice versa.

Förändringar i provformat, uppgiftsformat och bedömning över tid

Kurs A-provet jämfört med de nationella proven matematik 1a, 1b och 1c

Det första nationella provet i matematik i det mål- och kunskapsrelaterade systemet var kursprovet för kurs A, våren 1995 (Pettersson & Kjellström, 1995). I lärarinformationen (Skolverket/PRIM-gruppen, 1995a) står att de nationella kursproven har kommit till för att bedömningen av elevernas prestationer ska bli så enhetlig som möjligt över landet. Vidare framhålls att *”Resultatet på ett nationellt kursprov är alltså bara en del i lärarens totala bedömning av elevernas kunskaper”*. (Skolverket/PRIM-gruppen, 1995a, s 2)

Det första kursprovet bestod av två delar, en tidsbunden del och en så kallad breddningsdel. Den tidsbundna delen skulle genomföras någon gång under en vecka i maj, med den första provdagen som rekommenderad provdag (för att undvika att innehållet spreds). Provtiden var 120 minuter (Skolverket/PRIM-gruppen, 1995b, c). Breddningsdelen skulle ge underlag för att bedöma andra aspekter av kunskap än de som avsågs att provas i den tidsbundna delen. Uppgifterna kännetecknades av att det fanns olika godtagbara lösningar och att lösningarna var ganska omfattande och krävde motiveringar. Breddningsdelen skulle genomföras på ordinarie matematiklektioner under drygt en månad i april och maj. Eleverna skulle välja en av tre uppgifter inom tre olika kunskapsområden (aritmetik, geometri, statistik) och ges den tid de behövde

för att lösa den uppgift de valt, men provtiden för breddningsdelen var högst 180 minuter. De fick arbeta med uppgiften under flera matematiklektioner.

Vid bedömningen av elevernas prestationer på den tidsbundna delen användes poäng. Vid bedömningen av elevernas prestationer på breddningsdelen användes en helhetsbedömning och läraren skulle ta hänsyn till kvaliteten på elevens redovisning, hur eleven arbetat, om eleven behövt hjälp av läraren och om arbetet delats upp under flera matematiklektioner. Det fanns exempel på godkända och väl godkända elevlösningar såväl i beskrivningar som i autentiska publicerade elevlösningar. Detta första år skulle elevernas prestationer på varje del betygssättas för sig.

Betygsskalan var fyrgradig: icke godkänd, godkänd, väl godkänd och mycket väl godkänd, men det fanns bara betygskriterier för godkänd och väl godkänd, vilket medförde att det första nationella kursprovet bara gav stöd vid bedömningen för godkänd respektive väl godkänd. I informationen till lärarna fördes en diskussion om betygsgränser för kursprovet och slutsatsen av den diskussionen blev att för den tidsbundna delen gavs ett riktmärke för betyget godkänd respektive väl godkänd. Men det påpekades att de bara var riktmärken och att läraren naturligtvis kunde väga in andra aspekter av elevernas prestationer för att bestämma provbetyget för den tidsbundna delen. För elevernas prestationer på breddningsdelen skulle läraren göra en helhetsbedömning och sätta något av betygen icke godkänd, godkänd och väl godkänd.

Mycket har hänt sedan det första kursprovet gavs. Diskussionen om spridningsrisken av innehållet i proven har varit stor och det resulterade i fastställda provdagar gemensamma för hela landet. Breddningsdelen, som eleverna fick arbeta med under några lektioner under en längre tid, togs bort och ersattes med en uppgift som skulle genomföras under en begränsad tid på en bestämd provdag. Den var mer omfattande jämfört med de andra uppgifterna som gavs. Kvalitetspoäng infördes för att fånga in kvaliteter i elevernas lösningar. Först g- och vg- poäng och för mvg skulle en helhetsbedömning göras. Det sista A-kursprovet gavs höstterminen 2012.

Det första nationella provet enligt Gy 11 (Skolverket, 2011b) gavs höstterminen 2011 och då bara för matematik 1c. Då infördes också ett muntligt delprov. Från och med vårterminen 2012 gavs kursprov för flera kurser. Kursprovet för matematik 1a, som var avsett för yrkesprogrammen, skulle bara innehålla det som var gemensamt centralt innehåll för alla yrkesprogram. Det finns också kursprov för kommunala vuxenutbildningen på gymnasial nivå. I och med Gy 11 följde också ett nytt bedömningssystem, som medförde att de kvalitativa nivåerna i bedömningen av elevernas prestationer betecknades E-, C- respektive A-poäng. För att göra informationen mer tydlig indexerades också poängen med den huvudsakliga förmågan som poängen kan relateras till, exempelvis C_R indikerar resonemang på C-nivå (senare infördes istället en sammanställning över de förmågor som poängen kunde relatera till). Riktmärken för betygsgränserna ersattes med fasta kravgränser, grundade på totalpoängen och för provbetygen D–A även på nivå-poängen. Från och med vårterminen 2019 är för gymnasieskolan de muntliga delproven inte obligatoriska utan är ett bedömningsstöd som är frivilligt för lärarna att använda.

Nationella provet i årskurs 9 enligt Lpo 94 jämfört med nationella provet i årskurs 9 enligt Lgr 11

Det första nationella provet för årskurs 9 i matematik gavs 1998 (Skolverket/PRIM-gruppen, 1998) och bestod av fem delprov, varav två skulle genomföras på fasta provdagar och tre när som helst under en trettonveckorsperiod. Delprov A var en kortvarsdel på cirka 30 uppgifter med en rekommenderad provtid på cirka 20 minuter. Delprov B bestod av cirka 15 uppgifter, som var organiserade i kunskapsområden. Provtiden var 80 minuter. Delprov C bestod av två något större uppgifter. Lösningarna var omfattande och krävde motiveringar. Även för detta delprov var provtiden 80 minuter.

Det muntliga delprovet (Delprov M) var ett utvecklingsarbete och det fanns ingen speciell uppgift konstruerad, utan läraren skulle själv välja en uppgift från Skolverkets diagnostiska uppgifter. I bedömningsunderlaget till delprovet fanns följande aspekter som skulle bedömas i elevernas redovisningar och diskussioner: Tydlighet/begriplighet, Begreppsförståelse, Matematiskt språk och kreativitet.

Året därpå fanns inget muntligt delprov men från och med 2000 fanns åter muntliga delprov. De första två åren fanns också ett delprov med par-/gruppuppgift i problemlösning som avsåg att pröva elevens förmåga att ta del av och använda information samt förmåga att lyssna till, följa och pröva andras förklaringar och argument. Året därpå, 2001, var par-/gruppuppgiften sammanslagen med det muntliga delprovet, vilket innebar att eleverna först skulle diskutera lösningar till en uppgift och sedan fick de en liknande uppgift som de skulle lösa och redovisa individuellt. På vissa uppgifter fanns publicerade elevlösningar. Men det fanns också en beskrivning för en godkänd respektive en väl godkänd elevlösning. Bedömningsmatris användes från och med 1999 och har utvecklats kontinuerligt. De senare bedömningsmatriserna är mer uppgiftsspecifika och relativt detaljerade jämfört med tidigare.

De första åren gavs delprovsbetyg som sedan vägdes samman till ett provbetyg. Från och med vårterminen 2001 grundar sig provbetyget istället på en sammanräkning av antalet poäng både på totalnivå och kvalitetsnivå. Skälet till denna förändring var att delproven inte prövade förmågor som gick att särskilja och det var därför olämpligt att använda delprovsbetyg. Liksom för gymnasieskolan finns kvalitetspoäng. I och med läroplanen Lgr 11 respektive Gy 11 följde ett delvis nytt bedömningssystem som medförde att de kvalitativa nivåerna i bedömningen av elevernas prestationer betecknades med E-, C- respektive A-poäng. För att göra informationen tydligare indexerades också här poängen med den huvudsakliga förmågan som poängen kan relatera till (Enoksson m. fl., 2014), exempelvis E_M indikerar metodförmåga på E-nivå (senare infördes i stället en sammanställning över de förmågor som poängen kunde relatera till). Nationella provet i matematik för årskurs 9 består sedan flera år av fyra delprov; ett muntligt och tre skriftliga. De skriftliga delproven består av uppgifter som ska lösas både med och utan digitala verktyg. Ett av delproven består av en mer omfattande uppgift. På det muntliga delprovet och på delprovet med den mer omfattande uppgiften bedöms elevernas prestationer med en bedömningsmatris.

Nationella provet i skolår 5 jämfört med nationella provet i årskurs 6

Redan år 1996 publicerades det första nationella provet för skolår 5. Syftet med provet i skolår 5 var, förutom att hjälpa läraren att bedöma om enskilda elever uppfyllde de i kursplanen uppställda kunskapsmålen, också att enskilda elevers starka och svaga sidor skulle uppmärksammas. Nationella provet i skolår 5 hade därför också ett diagnostiskt syfte (Skolverket, 1996). Det första provet för skolår 5 hade sju olika delar. Vid genomförandet skulle dessa delar i så stor utsträckning som möjligt integreras i den vanliga undervisningen. De olika delarna kunde göras vid flera olika tillfällen under vårterminen från och med vecka 10. Läraren hade också möjlighet att hjälpa eleverna till en lösning om läraren fann det lämpligt. För varje del fanns en rekommenderad kravgräns. Lärarens bedömning kunde sammanfattas i en kunskapsprofil (Alm, 2004; Björklund Boistrup, 2004; Garne, 2017; Pettersson, 2004). Det fanns inget facit. ”*Den inriktning bedömningen har innebär att vi inte presenterar något facit. Istället publicerar vi autentiska elevarbeten på vissa uppgifter. Vi ger rekommendationer på vad som kan anses vara rimligt att kräva för att respektive mål att uppnå ska anses vara uppfyllt.*” (Skolverket 1996, Matematik, s 4). En stor skillnad i bedömningen av elevernas prestationer på provet i skolår 5 och årskurs 6 är att i skolår 5 skulle bedömningen bara relatera till en nivå – mål att uppnå. I årskurs 6 ska bedömningen relatera till tre nivåer E-, C- och A-nivå (Enoksson m. fl., 2014; Skolverket 2013b-d).

I och med Lgr 11 (Skolverket, 2011a) ersattes proven i skolår 5 med prov i årskurs 6. Det första av dessa prov publicerades under 2012 och skulle bara ge stöd för lärarens bedömning i relation till den lägsta godtagbara kravnivån (E-nivån), men från och med 2013 skulle dessa ämnesprov ge stöd för alla betygsnivåer. De nuvarande nationella proven för årskurs 6 består av ett muntligt delprov, ett skriftligt delprov med en mer omfattande uppgift och tre skriftliga delprov med uppgifter som ska lösas både med och utan digitala verktyg. På det muntliga delprovet och på delprovet med den mer omfattande uppgiften bedöms elevernas prestationer med en bedömningsmatrix.

För både proven för skolår 5 och proven för årskurs 6 gäller att det också finns en självbedömningsdel som eleverna kan besvara. Den självbedömning som fanns för skolår 5 var mer konkret än motsvarande för årskurs 6. I skolår 5 skulle eleverna välja mellan alternativen Säker, Ganska säker, Osäker och Mycket osäker och ta ställning till hur de kände sig i olika konkreta situationer som exempelvis när de ska bedöma hur lång en buss är, läsa av en termometer och arbeta tillsammans med andra. I årskurs 6 är alternativen desamma men situationerna är ibland något mer matematiskt övergripande, som exempelvis hur de känner sig när de ska berätta hur de har löst en uppgift, använda miniräknaren och använda huvudräkning.

Nationella provet i årskurs 3

Det nationella provet i årskurs 3 infördes 2009 då mål att uppnå formulerades för denna årskurs (senare formulerade som kunskapskrav). Det fanns bara kravgräns för den lägst godtagbara nivån. I det fallet liknar provet i årskurs 3 det i skolår 5, där det bara fanns en gräns, nämligen mål att uppnå. Arbetet med det första nationella

provet för årskurs 3 innebar många utmaningar. Eleverna var inte särskilt provvana, de måste få alla möjligheter att visa vad de kan, hur ska åldersanpassningen ske, hur länge kan elever i denna ålder arbeta och vara tillräckligt koncentrerade så att de får visa vad de kan. För att eleverna inte ska behöva arbeta med för många uppgifter vid samma tillfälle har provet delats upp i många olika delprov. Dessa delprov ska inte genomföras på bestämda dagar utan kan genomföras under två månader under vårterminen. Elevernas prestationer på de olika delproven sammanfattas inte till något provbetyg utan för varje delprov finns en kravgräns. En skillnad i kursplanerna som visar sig i de olika kunskapsprofilerna är att för årskurs 3 finns en lägsta kunskapsnivå som bedömningen är relaterad till, men för skolår 5 fanns mål att uppnå som bedömningen skulle relatera till. Ett av delproven är muntligt och ska genomföras i grupp om några elever. Övriga delprov är skriftliga. Provet ramas in med en bild och en berättelse om två barn, Nova och Troj (Björklund Boistrup & Skytt, 2011). En del av uppgifterna relaterar sedan till bilden och berättelsen, men uppgifterna förutsätter inte att man är bekant med inramningen.

De nationella provens möjligheter och begränsningar

I huvudsak är de flesta lärare mycket nöjda med de nationella proven i matematik. Det visar såväl externa utvärderingar (Skolverket, 2004; Tobiassen & Thomassen, 2000) som interna (se exempelvis Aldenius & Sandström, 2016; Kristiansson & Rösmer Axelson, 2017; Nordberg & Pettersson, 2017; Nydahl & Ridderlind, 2016). Så gott som alla lärare anser att proven ger stöd för att bedöma elevernas visade kunskaper. Proven ger också möjlighet att se såväl elevens styrkor som utvecklingsområden i de delar av matematik som det enskilda provet avser att pröva. En begränsning är att proven görs endast vid ett begränsat antal tillfällen under en begränsad tid.

Proven har till stora delar lyckats att uppfylla kravet att vara ett stöd för lärarens bedömning och betygssättning samt att konkretisera läroplanernas kunskapssyn och kursplanens och ämnesplanernas ämnessyn. Hur är det då med kravet att vara ett stöd för likvärdig bedömning över landet? Bedömer lärarna elevlösningar på ett likvärdigt sätt?

I de undersökningar som gjorts (Olofsson, 2006; Skolverket, 2009) kan vi konstatera att överensstämmelsen mellan olika lärares bedömningar är godtagbara för de skriftliga delproven. I de kontrollrättningsförfarande som Skolinspektionen (2010) genomfört är överensstämmelsen god i matematik, däremot diskuteras inte i vilken utsträckning ombedömningar högst bör skilja sig åt för att ändå anses vara tillfredsställande. Kjellström (1996) kunde redan för det första kurs A-provet konstatera att då en omfattande uppgift endast bedömdes med hjälp av autentiska elevlösningar och beskrivningar blev bedömaröverensstämmelsen inte särskilt hög (0,65). Då utvecklades den analytiska bedömningsmetoden med bedömningsmatris. Skolverkets (2009) undersökning av bedömaröverensstämmelsen för den omfattande skriftliga uppgiften visade sig då vara mycket hög (0,95). Däremot har det visat sig att olika lärares bedömningar av elevernas prestationer på det muntliga delprovet inte är tillfredsställande (Lind Pantzare, 2015; Sollerman, 2016, 2017).

Även i internationella undersökningar är det viktigt att alla bedömare elevernas arbeten på samma sätt och undersökningar görs för att kontrollera detta. Men det är naturligtvis inte rimligt att alla lärare bedömer alla elevlösningar identiskt lika. I exempelvis den stora internationella kunskapsmätningen PISA godkänner man att det skiljer sig något åt i bedömningarna. Vid en granskning av norska prov används olika mått på överensstämmelse mellan olika bedömare. Ett av dessa är överensstämmelse mellan olika bedömare beräknat i procent.

"Om sensorreliabilitet: Et enkelt mål for overensstemmelse mellom sensorer er hvor mange prosent av besvarelsene som er vurdert likt. I våre datatabeller ... har vi gitt resultatene og "flagget" dålig overensstemmelse ut fra kriteriene $< 85 \%$ og også $< 75 \%$ ".

(Lie m. fl., 2005, s 35)

I detta sammanhang är det värt att ta upp överensstämmelsen mellan provbetyg och slutbetyg i årskurs 9 samt provbetyg och kursbetyg i gymnasieskolan. I det tidigare relativa betygssystemet, som hade till uppgift att styra lärarens betygssättning, var det tillåtet för gymnasieläraren att sätta betyg där klassens medelbetyg skilde sig med $\pm 0,2$ från klassens medelbetyg på centrala prov. Klassens slutbetyg kunde skilja mer i genomsnitt, men då måste rektorn ge sitt godkännande. I det nuvarande betygssystemet där de nationella proven ska stödja lärarens betygssättning förs ingen motsvarande diskussion om "accepterade avvikelser" mellan provbetyg och slutbetyg. Trots detta uppmärksammas och diskuteras ofta överensstämmelsen mellan elevernas provbetyg och slutbetyg. Från och med hösten 2018 ska resultatet på de nationella proven särskilt beaktas vid betygssättningen. I informationen till lärare på Skolverkets hemsida står att resultatet på de nationella proven *"har en större betydelse än andra enskilda underlag vid din allsidiga utvärdering av elevens kunskaper vid betygssättningen."* (Skolverket 2018).

I matematik är kravgränserna skarpa, det vill säga att det är strikta poänggränser för de olika provbetygen som gäller. En viktig gräns är mellan det underkända provbetyget F och det lägsta godkända betyget E. Eftersom ambitionen och kraven på lärarna är att få så många godkända som möjligt gör troligtvis skolorna allt (sätter in extra resurser bland annat i form av sommarskolor) för att elevernas prestationer ska kunna bedömas som godkända. Det kan vara en förklaring till att provbetyg och slutbetyg skiljer sig åt. En annan förklaring är att överensstämmelsen blir mindre nu när vi har en sexgradig skala jämfört med en fyrgradig tidigare. Detta då fler betygsalternativ kan medföra en ökad risk för att samma prestation bedöms med olika närliggande betyg.

De framtida nationella proven

Hur kommer då de nationella proven att utvecklas över tid? Det som på senare år har fokuserats är lärarnas arbetsbörda med de nationella proven, och regering och departement gör allt för att försöka minska denna arbetsbörda. Det är i stort sett tre åtgärder som fokuseras, digitalisering av proven, extern bedömning och att göra de nationella proven mindre omfattande.

Men digitalisering tar tid och måste problematiseras med frågor som vad mäter ett prov vars plattform är digital till skillnad från ett prov vars plattform är papper (analog)? Vad krävs för kompetenser hos elever för att göra sig själva och sina prestationer rättvisa när de arbetar digitalt respektive på papper? Att gå från analogt till digitalt kan göras på olika nivåer, alltifrån att överföra analoga uppgifter till ett digitalt format till att enbart använda sig av digitala uppgifter. Hur digitalisering definieras påverkar i hög grad vilka förändringar som behöver göras. Som vanligt har varje förändring sina möjligheter och begränsningar, detta gäller även när de nationella proven går från att vara analoga till att bli digitala. Vi kommer här ta upp två aspekter som påverkar utvecklingen och konstruktionen av digitala prov. Den första aspekten är digitaliseringen av provet som helhet och den andra är digitaliseringen av enskilda uppgifter.

Ett pappersprov är statiskt i sin layout, varje beståndsdel av provet kommer vara precis på samma sätt, så länge provet inte kopieras i en annan storlek. Eftersom datorskärmar finns i olika storlekar kan man inte i förväg veta vilken storlek som kommer användas vid provtillfället, troligtvis kommer flera olika stora datorskärmar att användas. Används en mycket liten skärm kommer antingen endast en del av uppgiften synas alternativt behöver uppgiften förminskas till en annan skala. Låt oss tänka på en uppgift där det är viktigt att mäta en viss sträcka, som ska användas i en skalauppgift. I ett pappersprov är det lätt att vid uppgiftskonstruktionen välja längd på sträckan för att passa en viss svårighetsnivå. Vid en digitalisering kan uppgiften ändras i storlek beroende på vilken skärm som används och det kan påverka uppgiftens svårighetsgrad.

En annan viktig frågeställning kring design som behöver behandlas är hur uppgiftens olika beståndsdelar ska presenteras i ett digitalt prov. Vanligtvis innehåller en uppgift i ett analogt prov en inledande text med tillhörande figur eller tabell för att sedan avslutas med en eller flera frågor. I ett pappersprov är dessa beståndsdelar statiska, i ett digitalt prov är det möjligt att välja om det ska vara en statisk eller responsiv design, där uppgiftens beståndsdelar ändrar sin placering beroende på datorskärmens storlek. Hur påverkas informationsinhämtningen i en uppgift av att exempelvis en tabell placeras till höger eller under en inledningstext?

En stor skillnad mellan analoga och digitala uppgifter är möjligheten i digitala uppgifter att använda sig av dynamiska och interaktiva delar vilket öppnar upp för helt nya typer av uppgifter. Det kan exempelvis vara uppgifter där eleven ska ändra någon inställning, parameter, vinkel, koordinat eller liknande i en redan färdig konstruktion där begrepp och samband ska undersökas för att komma fram till en slutsats. Likaväl går det att tänka sig att uppgiften istället är att programmera eller skapa en egen konstruktion. Vidare tillkommer möjligheter för media av olika slag i de digitala uppgifterna, såsom rörliga bilder, film eller uppläsning av text.

En förutsättning för införandet av digitala prov är att datorer och skrivplattor fungerar väl vid provtillfället och att eleverna har fått tillräcklig övning att genomföra prov digitalt.

Den externa bedömningen har sina fördelar, en annan lärare än elevens bedömer elevens visade kunskaper, så att eleven får en bedömning av ytterligare en person av

sina visade kunskaper. Men det är också viktigt att elevens lärare får ta del av bedömningen på uppgiftsnivå, för att få kompletterande information om elevens styrkor och utvecklingsområden i sina lösningar. Bedömningen av elevens visade kunskaper på ett nyanserat sätt är svårt att göra om endast en poängsumma eller ett provbetyg kommuniceras med läraren. Det är därför viktigt att få en rutin som innebär att läraren får ett så omfattande och varierande underlag som möjligt för sin bedömning samtidigt som eleven inte är utlämnad till *en* lärares bedömning. Det talar för en rutin som innebär medbedömning, det vill säga där det både är den undervisande läraren och ytterligare en lärare som gör bedömningen.

Att göra de nationella proven mindre omfattande är ett risktagande. Om en mindre del av kunskapskraven, förmågorna och det centrala innehållet blir föremål för bedömning riskerar det att bedömningen inte blir mätsäker. Det är svårt att redan nu få en tillräcklig mätsäker bedömning då kursplaner och ämnesplaner är omfattande och tolkningsbara vad gäller förmågor, centralt innehåll och framförallt kunskapskrav.

Huruvida dessa tre åtgärder, enskilt eller sammantaget, minskar lärares arbetsbörda återstår att se. Det som är viktigt är att säkerställa att de olika förändringarna inte äventyrar elevernas möjligheter att visa sina kunskaper på ett så varierat sätt som möjligt.

Material att använda

Material som är relaterade till detta kapitel, provuppgifter, bedömningsstöd och kartläggningar finns på Skolverkets hemsida (www.skolverket.se) och PRIM-gruppens hemsida (www.su.se/primgruppen).

Förslag till diskussioner/aktiviteter

1. Jämför de prov som ni som elever hade i er skola i matematik med de prov som ni ger era elever. Vilka likheter och skillnader finns?
2. Jämför de nationella prov ni använder med de prov som ni annars ger era elever. Vilka likheter och skillnader finns?
3. I vilken utsträckning påverkar de nationella proven de prov som ni använder i matematik?
4. I vilken utsträckning och hur påverkar de nationella proven er undervisning i matematik?
5. Vilken syn på ämnet matematik och vilken kunskapssyn kan skönjas i de nationella proven?
6. Konstruera en analog och en digital uppgift som avser att pröva samma förmåga och centrala innehåll samt samma kunskapskrav.

Referenser

- Aldenius, E. & Sandström, H. (2016). *Ämnesprovet i matematik, årskurs 3, 2016*. www.su.se/polopoly_fs/1.312652.1481901282!/menu/standard/file/Rapport%20%C3%84p3Ma16.pdf
- Alm, L. (2004). På upptäcktsfärd i elevernas värld med tal. I Skolverket *Att visa vad man kan. En samling artiklar om ämnesproven i år 5*. (s. 101–113). Stockholm: Skolverket.
- Björklund Boistrup, L. (2004). Pedagogisk bedömning och ämnesprovet i matematik. I Skolverket *Att visa vad man kan. En samling artiklar om ämnesproven i år 5*. (s. 116–125). Stockholm: Skolverket.
- Björklund Boistrup, L. & Skytt, A. (2011). Ämnesprovet i årskurs 3. I B. Bergius (red). *Matematik – Ett grundämne*. (s. 255–262). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).
- Enoksson, M., Pettersson, A. & Strand, S. (2014). Bedömning utifrån kunskapskraven – en utmaning för ämnesproven i årskurs 6 och 9. I Nämnare Tema 10. *Matematikundervisning i praktiken*. (s. 220–239). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).
- Erickson, G. (2017). Från iskallt till glödhet – eller vidbränt...? I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning, "Alla människors möte borde vara så" Vänbok till Astrid Pettersson*. (s. 6–16). Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Garme, B. (2017). Matematik är också språk. I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning, "Alla människors möte borde vara så" Vänbok till Astrid Pettersson*. (s. 18–25). Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Kjellström, K. (1996). *Matematik A. Resultat och analyser av det första nationella kursprovet i matematik*. Stockholm: PRIM-gruppen.
- Kjellström, K. & Olofsson, G. (2017). Förändringsarbete vid utveckling av nationella prov i matematik. I L. Björklund Boistrup, M. Nordlund & E. Norén (red). *Texter om bedömning, "Alla människors möte borde vara så" Vänbok till Astrid Pettersson*. (s. 26–41). Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Kristiansson, K. & Rösmer Axelson, K. (2017). *Resultat från kursprovet, matematik 1c, höstterminen 2017*. www.su.se/polopoly_fs/1.388350.1527833922!/menu/standard/file/Rapport%20Kurs1%20HT17.pdf
- Lie, S., Hopfenbeck, T., Ibsen, E. & Turmo, A. (2005). *Nasjonale prøver på ny prøve*. Rapport fra en utvalgsundersøkelse for å analysere og vurdere kvaliteten på oppgaver og resultater till nasjonale prøver våren 2005. Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling. Universitetet i Oslo.
- Lind Pantzare, A. (2015). *Bedömaröverensstämmelse på skriftliga delprov. En studie av interbedömarreliabiliteten vid bedömning av skriftliga nationella prov i matematik i gymnasieskolan*. Umeå: Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap.
- Ljung, B-O. (2000). *Standardproven – 53 år i skolans tjänst*. Stockholm: Lärarhögskolan. PRIM-gruppen.
- Ljung, B-O. (2005). *Karriär på prov. Mitt LHS i ett femtioårsperspektiv*. Stockholm: Lärarhögskolan. PRIM-gruppen.
- Nordberg, C. & Pettersson, A. (2017). *Ämnesprovet i matematik, årskurs 9, 2017*. www.su.se/polopoly_fs/1.360637.1512640915!/menu/standard/file/Rapport%20%C3%84p9%202017.pdf

- Nydahl, A. & Ridderlind, I. (2016). *Ämnesprovet i matematik, årskurs 6, 2016*. www.su.se/polopoly_fs/1.309986.1480690354!/menu/standard/file/rapport%C3%A4p6%202016_161201.pdf
- Olofsson, G. (2006). *Likvärdig bedömning? En studie av lärares bedömning av elevarbeten på ett nationellt prov i matematik kurs A*. Rapport nr 23 från PRIM-gruppen. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm.
- Pettersson, A. (2004). Räkneförmåga och matematisk kompetens. I Skolverket *Att visa vad man kan. En samling artiklar om ämnesproven i år 5*. (s. 92–99). Stockholm: Skolverket.
- Pettersson, A. & Kjellström, K. (1995). *Läroplanens kunskapssyn överförd till det första nationella kursprovet i matematik*. Rapport nr 1995:3 från PRIM-gruppen. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm.
- Skolinspektionen. (2010). Kontrollrättning av nationella prov i grundskolan och gymnasieskolan – Redovisning av regeringsuppdrag Dnr. U2009/4877/G.
- Skolverket/PRIM-gruppen. (1995a). *Matematik A. Nationellt prov. Information till lärare om det nationella provet för kurs A våren 1995*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket/PRIM-gruppen. (1995b). *Matematik A. Nationellt prov. Information till lärare om breddningsdelen till det nationella provet för kurs A våren 1995*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket/PRIM-gruppen. (1995c). *Matematik A. Nationellt prov. Information till lärare om den tidsbundna delen till det nationella provet för kurs A våren 1995*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (1996). *Ämnesprov i engelska, matematik, svenska. Skolår 5*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket/PRIM-gruppen. (1998). *Ämnesprov i matematik skolår 9. Information till lärare. Vårterminen 1998*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2004). *Prövostenor i praktiken. Grundskolans nationella provsystem i ljuset av användares synpunkter*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). *Bedömaröverensstämmelse vid bedömning av nationella prov*. Bilaga till redovisning av regeringsuppdrag Dnr. U2009/1671/S.
- Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmen*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013a). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Lärarinformation om hela ämnesprovet. Delprov A med bedömningsanvisningar. Lärarmaterial. Elevmaterial. Elevmaterial engelsk version*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013b). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Delprov B*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013c). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Delprov C*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013d). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Delprov D*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013e). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Bedömningsanvisningar. Delprov B och Delprov C*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013f). *Matematik. Årskurs 9. Ämnesprov, läsår 2012/13. Bedömningsanvisningar. Delprov D*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2018). *Provresultatets betydelse för betyget*. www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/nationella-prov-i-grundskolan/genomfora-och-bedoma-prov-i-grundskolan#Provresultatetsbetydelseforbetyget.

- Skolöverstyrelsen. (1980). *Läroplan för grundskolan. Allmän del. Mål och riktlinjer, timplaner, kursplaner*. Södertälje: Liber UtbildningsFörlaget.
- Skolöverstyrelsen. (1988). *Centrala prov 1988/89. Allmänna instruktioner*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989a). *Instruktionshäfte. Standardprov. Matematik. Årskurs 9*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989b). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 allmän kurs. Delprov A1*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989c). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 allmän kurs. Delprov A2*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989d). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 allmän kurs. Delprov A3*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989e). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 allmän kurs. Facit*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989f). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 särskild kurs. Delprov S1*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989g). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 särskild kurs. Delprov S2*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989h). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 särskild kurs. Delprov S3*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen/PRIM-gruppen. (1989i). *Standardprov. Matematik. Årskurs 9 särskild kurs. Facit*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Sollerman, S. (2016). *Bedömaröverensstämmelse på muntliga delprov. En studie av interbedömarreliabiliteten vid bedömning av nationella muntliga delprov i matematik gymnasieskolan*. Opublicerat manus.
- Sollerman, S. (2017). *Bedömaröverensstämmelse på muntliga delprov. En studie av interbedömarreliabiliteten vid bedömning av nationella muntliga delprov i matematik årskurs 9*. Opublicerat manus.
- SOU. (2016). *Likvärdigt, rättssäkert och effektivt – ett nytt system för kunskapsbedömning*. Del 1. SOU 2016:25. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Tobiassen, J. & Thomassen, E. (2000). *Det nationella provsystemet – sett med norske öyne*. Skolverket. (Stencil).
- Utbildningsdepartementet. (1994). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna. Lpo. Lpf*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Jämförelse mellan de centralt utarbetade proven i de två olika provsystemen med hjälp av standardprovet 1989 och det nationella provet 2013 för årskurs 9.

	Standardprovet 1989	Nationella provet 2013
Funktion	Styra lärarens betygssättning.	Stödja lärarens bedömning och betygssättning. Fr.o.m ht 2018: Stödja en likvärdig och rättvis betygssättning.
Lärarinformation och bedömningsanvisningar	Lärarinformation, 7 sidor. Facit med kompletterande rättningsanvisningar, 2 sidor. Totalt 9 sidor	Lärarinformation inklusive bedömningsanvisningar för delprov A, 38 sidor. Bedömningsanvisningar (delprov B och C), 19 sidor. Bedömningsanvisningar (delprov D), 21 sidor. Totalt 78 sidor
Delprov	Tre skriftliga delprov.	Ett muntligt delprov och tre skriftliga delprov.
Tid för genomförande	En provperiod på en månad under våren. Tidpunkten fastställs av skolans ledning tillsammans med berörda lärare. En rekommendation från Skolöverstyrelsen var att alla klasser på skolan genomför provet på samma tid om det är möjligt.	Provperiod om 19 veckor under vårterminen för det muntliga delprovet. Av Skolverket fastställda provdagar för de skriftliga delproven i slutet av vårterminen. Provperioden för det muntliga delprovet har från och med läsåret 2015/16 minskat till cirka sex veckor och genomförandet sker i slutet av höstterminen.
Provtid	22+75+75 minuter.	Muntligt delprov: Cirka 20–30 minuter per grupp. Skriftliga delprov 80 (för de två första delproven) + 100 minuter (för det sista delprovet).
Hjälpmedel	Miniräknare tillåten på ett delprov.	Miniräknare och formelblad tillåtna på två skriftliga delprov och på det muntliga delprovet.
Antal uppgifter/deluppgifter på de skriftliga delproven	59/59	29/39

	Standardprovet 1989	Nationella provet 2013
Bedömning	Kvantitativa poäng 0,1 eller 2 poäng per uppgift. Negativ bedömning, fel och brister i lösningarna gav poängavdrag. Inga bedömda elevarbeten publiceras. Bedömning av den formella behandlingen ska överensstämma med vad eleverna är vana vid.	Kvalitativa nivåpoäng för enskilda uppgifter och kvalitativa nivåpoäng i bedömningsmatriser för det muntliga delprovet och för en mer omfattande skriftlig uppgift. Positiv bedömning, förtjänster premieras. Bedömda elevarbeten, drygt ett 40-tal publiceras. Antalet publicerade elevarbeten har ökat, 2018 fanns ett 80-tal. Bedömningen av den formella behandlingen framgår av bedömningsanvisningarna.
Anpassningar	Inga anvisningar för anpassning mer än att invandrarelever kan delta i standardprovet om läraren finner det lämpligt.	Anpassningstext för hur provet ska anpassas för elever med funktionsnedsättningar. Under senare år ges hänvisning till Skolverkets hemsida om genomförandet av provet för nyanlända elever. Där står bland annat att eleverna kan få språkligt stöd i form av lexikon och med hjälp av en modersmålslärare som kan översätta vissa ord och begrepp muntligt. Det är däremot inte tillåtet att skriftligt översätta delar av eller hela provet.
Resultat	Betygsgränserna bestäms efter att provet genomförts. Ett slumpmässigt urval resultat för att fastställa gränsen för betyget 3 som skickas ut till skolorna efter det att provet genomförts. Ett urval av elevresultat och elevarbeten skickas in till provinstitutionen för analys och forskning.	Kravgränserna bestäms innan att provet genomförs. Samtliga elevers resultat ska inrapporteras till SCB. Kravgränser för de olika betygen skickas till skolorna tillsammans med bedömningsanvisningarna. Ett urval av elevresultat och elevarbeten skickas in till provinstitutionen för analys och forskning.
Provbetyg – betyg (terminsbetyg, slutbetyg, kursbetyg)	Standardprovet ger information om gruppens standard. För den enskilde eleven kan standardprovet ingå i lärarens bedömning för slutbetyget men ska då räknas som ett prov bland andra. Det får däremot inte ensamt avgöra den enskilde elevens betyg.	Elevens resultat kan ha påverkats av tillfälligheter så elevens slutbetyg kan av olika skäl bli ett annat än provbetyget. Fr.o.m. höstterminen 2018 ska resultatet från det nationella provet särskilt beaktas vid betygssättningen. Det innebär att resultatet ska ha en större betydelse vid lärarens allsidiga utvärdering av elevens kunskaper, än resultatet på vilket annat enskilt prov eller bedömningsunderlag som helst.

Internationella studier

Samuel Sollerman

I DETTA KAPITEL behandlas de största internationella studierna av elevers kunskaper i matematik där Sverige deltar. De två studierna är TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) och PISA (Programme for International Student Assessment). Dessa två studier avser bland annat att pröva elevernas prestationer i ämnet matematik och liknar varandra i flera avseenden men har även några tydliga skillnader. I kapitlet diskuteras studiernas bakgrund, syften och resultat men även skillnader och likheter mellan TIMSS och PISA. Det ingår även en beskrivning av studien PISA där ramverk, provgenomförande, uppgifter och bedömning diskuteras.

Sverige har en lång tradition av deltagande i internationella studier och har varit med i PISA och TIMSS sedan de startade. PRIM-gruppen har på uppdrag av Skolverket, det nationella ansvaret för matematiken i dessa studier.

Bakgrund

Definitioner

Kärt barn har många namn och de internationella studierna benämns ofta som bland annat internationella storskaliga mätningar eller kunskapsundersökningar. Benämningen mätningar skulle till exempel indikera att detta är mätningar som sker i stor skala och på en internationell arena. Ordet mätningar bör dock inte förväxlas med ordet bedömningar. En bedömning innehåller alltid ett mått av värderande (Pettersson, 2010) och innebär en omfattande, mångfacetterad analys av prestationer (Wiggins, 1993) medan en mätning snarare handlar om att kvantifiera mått av prestationer. I detta kapitel används beskrivningen internationella storskaliga studier. Dessa studier kan definieras (Bos, 2002) som i vilka man dels studerar (a) prestationer i en viss årskull/ålder, i ett eller flera ämnen och gör jämförelser mellan utbildningssystem samt att man studerar (b) effekter av kontextuella faktorer på system-, skol-, klassrums- och elevnivå.

Denna definition påtalar att det är någon form av prestationer som avses att mätas och att detta måste göras genom att tillämpa en metod som tillåter att internationella jämförelser kan göras. Definitionen påtalar även att skillnaden mellan länder kan studeras som effekter av kontextuella faktorer. Underförstått kan denna del av definitionen innebära att syftet för dessa studier också är att erhålla mått som kan generaliseras till skol- och utbildningsnivå. Definitionen säger inget om storskaligheten, men om dessa studier ska kunna säga något om effekterna av kontextuella faktorer bör de omfatta ett flertal länder och för att få reliabla mått som kan generaliseras till systemnivåer bör ett representativt urval av elever från respektive länder inkluderas.

Syften

Syftet med dessa studier har utvecklats sedan starten för internationella studier. Det som från början var det planerade syftet, att utforma en specifik design eller metod för att bedriva forskning i utbildningsfrågor med fokus på att jämföra länder har fått konkurrens av ett ytterligare syfte. Olsen (2005) beskriver dessa syften som ett forskningssyfte (the research purpose) och som ett policysyfte (the effective policy purpose). Med ett policysyfte avses att internationella studier gradvis har fått ökad betydelse och användning för politiker och beslutsfattare. Internationella studier be-

traktas som instrument som kan användas för att undersöka utfallet av utbildnings-system och för att därmed undersöka vilka möjliga faktorer som skulle kunna regleras genom lagstiftning eller reglering av utbildningssystemet. Dessa två syften leder till en ideologisk spänning kring syftet med internationella studier men de behöver dock inte vara oförenliga. Olsen (2005) argumenterar för att internationella studier skulle kunna vara en arena där utbildningsforskare och beslutsfattare i skolfrågor kan utbyta idéer och utveckla ett ömsesidigt intresse för och acceptans av varandras engagemang i utbildningsfrågor, både på en nationell och en internationell nivå.

Att det funnits spänningar mellan dessa syften kan spåras redan i de tidiga upplagorna av internationella studier. Som exempel kan nämnas att efter att haft problem med validiteten i rankinglistan av resultat mellan länder¹ i den första internationella mätningen av matematikkunskaper – FIMS – år 1964, valde man i den andra internationella mätningen av matematikkunskaper – SIMS – år 1980, att inte publicera några förenklade rankingtabeller i huvudrapporten från studien (Brown, 1996). Rankingtabeller var dock efterfrågade, framförallt av beslutsfattare och politiker, och publicerades i andra publikationer (se till exempel Robitaille & Garden, 1989). Brown (1998) ser tillbaka på SIMS-studien och konstaterar att det finns en motsättning mellan rankingtabeller och andra resultat från studien. Eftersom internationella rankingtabeller är så mycket lättare att konstruera och mer lättillgängliga, än andra mer nyanserade resultat, har de åtgärder som har genomförts på grund av tolkningar av rankingtabeller ibland varit i konflikt med andra SIMS-resultat. Brown (1998) ger flertalet exempel² där beslut baseras på rankingtabellerna och de mer detaljerade resultaten från studierna har ignorerats. Denna spänning, mellan vad som kan tolkas som policysyftet och forskningssyftet, beskrivs av Burstein (1992) som att olika intressen och förhoppningar ställs mot varandra. Variationen i vad man hoppas få ut av dessa studier sträcker sig från förhoppningarna om stora internationella skillnader som kan leda till rationella förändringar i utbildningspolitik till förhoppningarna om ökad kunskap om skola och utbildning. Ytterligheterna kan också förklara varför beslutsfattare, som söker konsekvenser och underlag till beslut, kan vara i strid med forskare, som snarare har för avsikt att beskriva med så hög kvalitet som möjligt.

Forskningssyftet baseras på idén om komparativa studier, vilket inte är en ny företeelse utan har en lång historia (se t.ex. Olsen, 2005 eller Pettersson, 2008). Olsen (2005) menar att betydelsen av komparativa studier ökade då den nationella utbildningen organiserades i institutioner med ansvar för utbildning. Betydelsen kom ytterligare att öka i och med att nationer omorganiserade sina utbildnings-system där komparativa studier sågs som en informationskälla för reformer (t.ex. Husén & Tuijnman, 1994). Idén bakom internationella studier beskrivs bland annat av Torsten Husén (1973) och indikerar ett tydligt forskningssyfte:

¹ Problemen inbegrep bland annat att rankinglistan av länder var lätt att förstå men att den hade mätproblem. Den huvudsakliga anledningen till ordningen mellan länder korrelerade med i vilken utsträckning som innehållet på matematikuppgifterna hade undervisats i respektive land (Brown, 1996). Det kunde således tolkas som vilket land som täckt mest av innehållet i undervisningen snarare än ett mått på prestationsnivåer. *"A substantial part of the variability between the countries — if not the whole — can be explained by the curriculum"* (Freudenthal, 1975, s. 137)

² Ett av exemplen berör den svenska kontexten: "the low-performing Swedish used the SIMS rankings to justify a huge programme of locally determined in-service activity, although the training of teachers did not appear to be a significant factor in determining outcomes." (Brown, 1996, s. 211)

"Vi, de forskare som ... beslutat att samarbeta för att utveckla internationellt valida utvärderingsinstrument, uppfattade världen som ett enda stort utbildningslaboratorium där många olika praxisar, med avseende på skolstrukturer och läroplaner, prövades. Vi ville helt enkelt dra nytta av den internationella variabilitet med avseende på såväl resultatet av utbildningssystemen och de faktorer som orsakade skillnader i dessa resultat."

(Husén, 1973, s. 10, min översättning).

Policysyftet baseras på att beslutsfattare behöver skapa övergripande planer som behandlar lärarutbildning, resursallokering, resultat, mål och hur lärandet ska institutionaliseras utifrån ett perspektiv om livslångt lärande. Här tjänar internationella kunskapsmätningar syftet att tillhandahålla information vid utvärdering av beslutsfattares övergripande planer. Olsen (2005) menar att det som från början var ett forskningssyfte alltmer kom att uppmärksammas utifrån ett policysyfte då:

"... utbildning var ett av de mest centrala medlen för att förverkliga långsiktiga politiska, samhällsliga och ekonomiska visioner, såsom att utveckla ett samhälle med en bättre fördelning av resurserna över klass, ras, kön eller någon annan social grupp; uppfylla behovet av en kompetent arbetskraft för att lyckas på den internationella marknaden; förbättra och vidareutveckla demokratin genom att ge alla medborgare grundläggande utbildning och möjlighet till fortsatta studier så att de får möjlighet att uppfylla sitt egna livsplaner och bli fullvärdiga deltagare i den demokratiska processen."

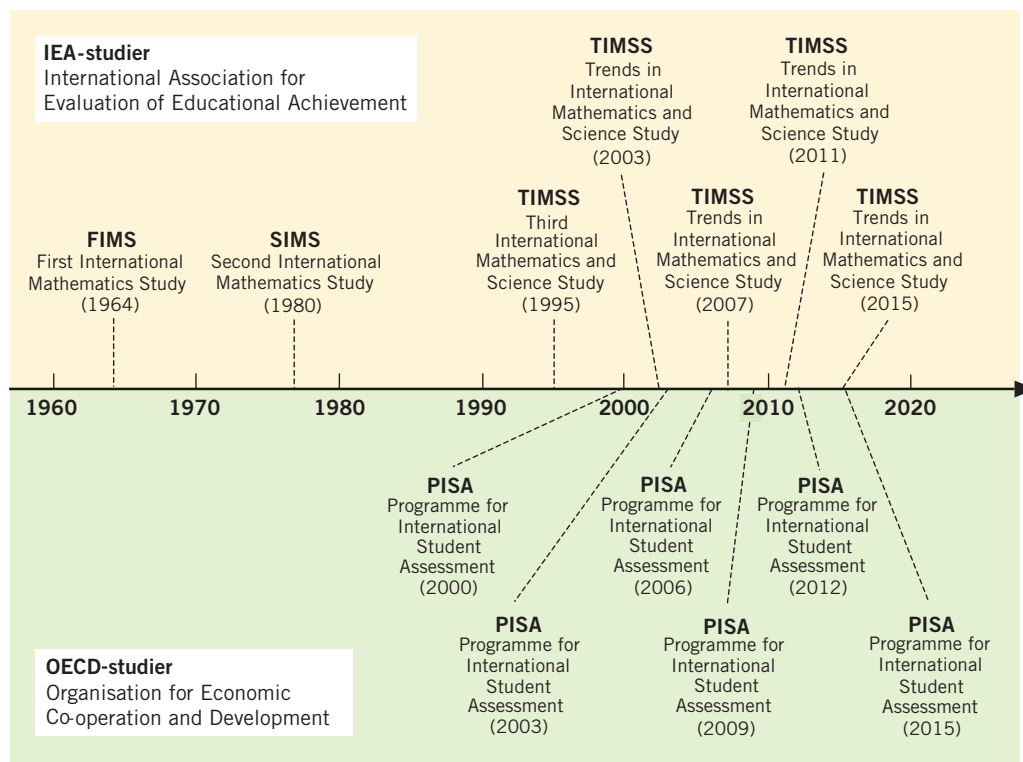
(Olsen, 2005, s. 16, min översättning).

Relationen mellan forskningssyftet och policysyftet är en pågående diskussion. Forskarna vill att politiker och beslutsfattare ser djupare och bredare in i materialet och resultaten från mätningarna, och politikerna kan behöva ta snabbare beslut och kan därför uppfatta forskarnas behov av underbyggda resonemang som onödigt omständliga. Schmidt m.fl. (1998) menar att behovet av "nedkokningen" till lättförståeliga resultat kan handla om ett behov av tidseffektivitet. Att beslutsfattarna vanligtvis har lite tid för detaljer, utan måste koncentrera sig på större sammanhang. De kan behöva information som presenteras övergripande och kortfattat. Den stora mängden tillgängliga data vid rapportering av resultaten av enskilda ämnen kan vara för mycket för dem, eller för allmänheten, att tillgodogöra sig. Information om statistik från enskilda uppgifter eller för vissa underliggande dimensioner i ämnena kan intressera ämnesspecialister men inte alltid beslutsfattarna. Beslutsfattarna kan ofta vara mer intresserade av den historia som resultaten berättar än själva resultaten i sig själva. *"Detta kan bidra till att förklara en del av det ständiga intresset för hästkapplöpningsaspekten av tvärnationella jämförelser."* (Schmidt m.fl., 1998, s. 509, min översättning).

Ett samspel mellan aktörerna kan vara önskvärt. De internationella storskaliga mätningarna, bland annat genom OECD och deras PISA-studie, har skapat möjliga arenor där forskare har möjlighet att sprida forskningsresultat till beslutsfattarna och beslutsfattarna kan kommunicera sina behov av underlag för beslut.

Sveriges deltagande i internationella storskaliga mätningar

Sverige har deltagit i internationella storskaliga mätningar i matematik sedan början av 1960-talet. Den organisation som var först på plan med internationella jämförande undersökningar var IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) som 1964 genomförde den första matematikundersökningen. Den har följts av ett flertal studier i matematik men även i andra ämnen, framförallt i läsförståelse och naturvetenskap, och i olika åldersgrupper i både grund- och gymnasieskolan. Under 1990-talet tillkom ytterligare en aktör, OECD, som sedan länge arbetat med internationella indikatorer på utbildningsprestationer. Under det senaste decenniet har allt fler initiativ till jämförande internationella studier tagits.



Figur 1. Internationella kunskapsmätningar i matematik, med fokus på elever i grundskolan, som Sverige deltagit i.

Matematik som ett undersökningsobjekt

Internationella storskaliga mätningars fokus har historiskt legat på att studera och mäta elevernas prestationer i skolämnen (eller kompetenser som löper över ämnen) i avsikt att studera hur sociala och politiska mål uppnås (Olsen, 2005). Ämnet matematik har fått en stor och betydande roll i de internationella studierna. Matematik användes som undersökningsämne redan i den första internationella studien och har funnits med i de flesta studier sedan dess. Matematik ansågs vara ett idealiskt

ämne för att utvärdera elevers kognitiva kompetens. Resultaten från mätningar av prestationer i matematik antogs kunna tolkas som indikationer på skolsystemens effektivitet vad gällde att skapa kognitiva och metakognitiva kompetenser. Matematik ansågs även vara ett, bland andra, mer eller mindre universellt ämne som skulle vara likartat i olika länder och ämnet ingick i många länders nationella styrdokument (Husén, 1973).

Motivet till varför matematiken valdes som huvudämne (och även naturvetenskapen i många av studierna) diskuteras på olika sätt. En av grundarna till IEA, Douglas Pidgeon, uttrycker det som att (Pidgeon, 1967) den främsta anledningen till detta val var att de flesta länder som deltog i projektet strävade efter att förbättra sina naturvetenskapliga och tekniska utbildningar som till stor del baseras på kunskaper i matematik. Men Pidgeon lyfter även andra anledningar som till exempel att många läroplaner nyligen ändrats och den så kallade ”nya matematiken” hade införts samt att eftersom symbolerna för aritmetik och matematik, med obetydliga undantag, är internationella, ansågs problemen med semantik och språk vara minimala. Argumenten för att välja matematik (och även naturvetenskap) kan även ses i relation till det rådande världsläget vid de första studierna där det i USA diskuterades Rysslands sputnikframgångar och en oro fanns för Rysslands tekniska försprång. Att välja matematik och naturvetenskap kunde leda till att det fanns större möjligheter att få mätningarna finansierade (Brown, 1996). I Pidgeons avslutande argument finns antagandet att matematik är ett universellt och kulturellt neutralt ämne, något som visade sig vara en falsk föreställning (McLean, 1992). I efterhand konstaterade IEA själva att matematik användes som ett surrogat för att utvärdera resultaten av utbildning (IEA, 1991). Valet av ämne har dock fungerat styrande då man tidigt byggde in trendmätningar och matematiken har fått en viktig roll i organiserandet av internationella kunskapsmätningar.

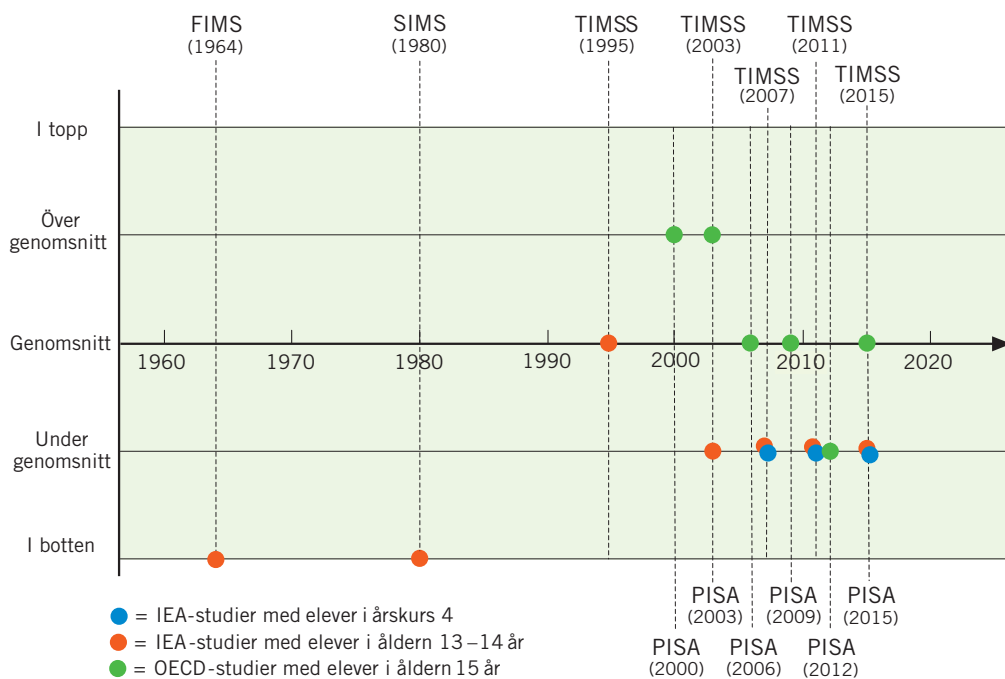
Resultat och resultatutveckling

Sverige har, som tidigare nämnts, deltagit i IEA-studier från mitten på 60-talet till dags datum. I de första studierna FIMS och SIMS (*First International Mathematics Study* och *Second International Mathematics Study*) hade de svenska eleverna (13-åringar) bland de lägsta genomsnittsresultaten i matematik (bland 13 respektive 20 länder). Åren 1994/95 gjordes TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*). De svenska elevernas kunskaper i matematik visades då ligga bland genomsnittsresultaten för de deltagande länderna (Skolverket, 1996). I de följande IEA-studierna TIMSS 2003, 2007, 2011 och 2015 (*Trends in International Mathematics and Science Study*) presterade de svenska eleverna ett genomsnittresultat i matematik som låg under genomsnittet inom EU/OECD (Skolverket, 2014; Skolverket, 2016a). Från och med TIMSS 2007 har både årskurs 4 och årskurs 8 medverkat i studien.

År 2000 genomfördes den första PISA-undersökningen, i vilken 15-åringars kunnande i läsförståelse, matematik och naturvetenskap undersöktes. PISA står för *Programme for International Student Assessment*. Resultaten för Sveriges 15-åringar

har gått från att vara över OECD-genomsnittet i matematik (i PISA 2000 och 2003) till att ligga på OECD-genomsnittet (i PISA 2006 och 2009) för att i PISA 2012 vara signifikant lägre än OECD-genomsnittet. I och med resultaten i PISA 2015 bröts dock den nedåtgående trenden och Sverige hade den högsta poängmässiga ökningen av alla OECD-länder och det svenska resultatet var tillbaka på 2009 års nivå (Skolverket, 2014; Skolverket, 2016b).

Det är inte alltid lämpligt eller meningsfullt att jämföra resultat från olika internationella mätningar i matematik då studierna inte är jämförbara. Skillnaderna ligger bland annat i antalet länder som deltar, vilka länder som deltar, frågetyper, innehåll och målgrupper. Detta innebär att jämförelser över tid och mellan undersökningstillfällen måste göras med försiktighet. I figuren nedan visas ändå en översiktlig bild av Sveriges resultat. De värden som anges i figuren gäller det mätillfälle då mätningen genomfördes.



Figur 2. Översikt av Sveriges resultat från internationella kunskapsmätningar i matematik i grundskolan³. FIMS, SIMS och TIMSS är IAE-studier och PISA är en OECD-studie.

³ Resultaten i TIMSS jämförs med genomsnittligt resultat från länder som är medlemmar i EU och OECD och resultaten i PISA jämförs med genomsnittligt resultat från länder som är medlemmar i OECD.

Mätningarna PISA och TIMSS – skillnader och likheter

PISA och TIMSS är båda storskaliga internationella mätningar som båda mäter kunskaper i bland annat ämnet matematik. De liknar varandra i sin metod, bland annat genom att de är urvalsbaserade studier med tydligt definierade urvalsgrupper, bearbetar data med liknande psykometriska metoder, styrs av en konsensusdriven process från idé till slutligt instrument, genomför rigorösa kvalitetskontroller av provmaterialet och har återkommande mätningar med fokus på att mäta trender. De liknar även varandra i det att de använder elevenkäter för att undersöka bakgrundsvariabler och attityder.

Det finns dock betydande skillnader mellan de två studierna. Den kanske viktigaste skillnaden handlar om att PISA avser att mäta begreppet *mathematical literacy* som är en beskrivning av den matematiska kunskap och kompetens som fordras för att kunna klara sig i olika situationer som samhällsmedborgare möter. TIMSS avser att i större utsträckning mäta kunskaper som ligger närmare de deltagande ländernas styrdokument. PISA:s definition gör att fokus ligger på att mäta de matematikkunskaper som krävs för att eleverna ska vara rustade att möta framtiden medan TIMSS konstruktion av ramverket gör att det som avses mätas i högre grad kan betraktas som skolmatematik. I tabellen redovisas kortfattat några av likheterna och skillnaderna mellan PISA och TIMSS.

Tabell 1. Kortfattad redovisning av några likheter och olikheter i TIMSS och PISA.

	Likheter	Skillnader	
		TIMSS	PISA
Målgrupp och urval	Tydligt definierad målgrupp och stora representativa urval (4000–5000 elever per land) Strikta procedurer för exklusion, definierade minimumkriterier för andelen deltagande av utvalda elever.	Två målgrupper. TIMSS har elever som gör sitt fjärde skolår och elever som gör sitt åttonde skolår som målgrupper. Detta kan göra en skillnad, mellan länder, i hur gamla eleverna är när de genomför TIMSS. Klassbaserat urval.	En målgrupp. PISA har 15-åringar som målgrupp, oberoende av vilken ålder de började skolan. Detta kan göra en skillnad, mellan länder, i hur många år de gått i skola. Skolbaserat urval.
Ramverk och ämnen	Båda avser att pröva kunskaper i matematik.	Matematikinnehållet beskrivs som innehållskategorier med punktlister över vilket innehåll som ingår. Prövar förutom kunskaper i matematik även kunskaper i naturvetenskap. Ramverket siktar på att representera de nationella styrdokument.	Matematikinnehållet beskrivs med övergripande områden och ger bara beskrivningar av breda matematiska områden med underliggande matematiskt tänkande. Prövar förutom kunskaper i matematik även kunskaper i naturvetenskap och läsförståelse. Det finns även ett fjärde kunskapsområde som varierar i innehåll (i PISA 2015: Kollaborativ problemlösning, i PISA 2018: Globala kompetenser och i PISA 2022: Kreativt tänkande). Det finns även andra tillval av ämnen som enskilda länder kan göra. Styrdokument behandlas inte explicit i ramverket.

	Likheter	Skillnader	
		TIMSS	PISA
Prov, enkäter och bedömning	Båda har provhäften med uppgifter som inte kommer i svårighetsordning och där uppgifterna endast är skriftliga. Båda har gått över till att pröva kunskaper digitalt i form av datorbaserade prov (PISA 2015 och TIMSS 2019). Båda inkluderar elevenkäter och skolenkäter.	Uppgifterna är kortfattade och ibland inommatematiska. De har korta eller inga ingresser på uppgifterna. Inkluderar dessutom en lärarenkät och en hemenkät (årskurs 4). Bedömning där endast det svar som eleven faktiskt angett i provhäftet ska beaktas.	Uppgifterna befinner sig i ett sammanhang och är organiserade i mindre uppgiftsamlingar med en beskrivande ingress. Bedömning där bedömaren ska avgöra om eleven har förmågan att svara på uppgiften och att bedömaren inte ska göra poängavdrag för sådant som avviker från ett fulländat svar.
Design	Båda har provhäften med roterad design så alla elever gör inte alla uppgifter. I båda studierna finns delar med enklare matematik-uppgifter som länder kan välja att använda. Båda har kontinuerligt återkommande mätningar med avsikten att mäta trender.	Fyra-års-cykler med lika stora delar matematik och naturvetenskap. Även ett fokus på klassen som objekt för analyser.	Tre-års-cykler med ett huvudämne som utgör den största delen av studien, varierar mellan matematik, naturvetenskap och läsförståelse. Även ett fokus på skolan som objekt för analyser.
Organisation och genomförande	Implementerade genom nationella departement som ger ämnesuppdrag till forskare. Cirka 30 länder deltog i båda studierna 2015. Antalet länder som deltar i studierna ökar.	Organiserad och initierad av IEA. Slutgiltiga beslut tas av nationella projektledare. Forskare är huvudsakligen ansvariga. 57 länder deltog i TIMSS 2015. Med många OECD-länder och ett något större antal deltagarländer i Afrika och västra Asien.	Organiserad och initierad av OECD. Slutgiltiga beslut tas av representanter från departement i de deltagande länderna. Politiska beslutsfattare är huvudsakligen ansvariga. 72 länder deltog i PISA 2015. Större spridning med bland annat alla OECD-länder och ett större antal deltagarländer från Sydamerika.

Om PISA-studien

För att avgränsa detta avsnitt, men samtidigt göra en bredare beskrivning av internationella storskaliga mätningar, väljs PISA som en representant för mätningarna. I kommande avsnitt beskrivs PISA-undersökningen mer ingående. Först beskrivs ramverket, PISA-provet och hur bedömningen beskrivs i PISA, sedan följer exempel på en PISA-uppgift med bedömda elevarbeten. Som avslutning på kapitlet diskuteras PISA:s relevans för att mäta aspekter av den svenska skolan.

Matematiken i PISA

Inom PISA undersöks huvudsakligen de tre ämnesområdena läsförståelse, matematik och naturvetenskap. Inom varje ämnesområde har ett ramverk utarbetats där de teoretiska ramarna för utvärderingen konkretiseras (OECD, 2016a). Till skillnad från de nationella proven och TIMSS är det inte styrdokumentet i respektive land som i första hand bestämmer innehållet i PISA. Målet är istället att undersöka hur väl förberedda de elever som snart ska lämna den obligatoriska skolan är för att klara av sitt kommande liv som samhällsmedborgare och för fortsatta studier. I PISA genomförs därför utvärderingen med elever som uppnått åldern mellan 15 år 3 månader och 16 år 2 månader, då undersökningen genomförs. Härigenom får man i de flesta länderna med de elever som snart ska avsluta sin obligatoriska skolgång. Avsikten med PISA är att ta reda på vilka funktionella kunskaper eleverna har i matematik. För att beskriva den matematiska kunskap och kompetens som fordras för att kunna klara sig i olika situationer som samhällsmedborgare använder man sig i PISA av begreppet *mathematical literacy*. Vi har inget motsvarande begrepp i svenska språket, men att vara *matematiskt litterat* innebär här att ha tillräcklig matematisk kunskap och kompetens, som kan användas i de situationer som man kan möta i sitt yrkes- och samhällsliv. Att vara matematiskt litterat innebär att man äger en uppsättning av olika aspekter av matematisk kompetens.

PISA delar in matematiskt kunnande och kompetens i tre huvuddimensioner: *kompetenser*, *innehåll* och *sammanhang*. De tre dimensionerna har använts för att konstruera PISA:s samling av matematikuppgifter. Uppgiftssamlingen analyseras med hjälp av dimensionerna för att säkerställa att begreppet *mathematical literacy* är ordentligt täckt. Matematikresultat kan med hjälp av dimensionerna redovisas som ett sammanlagt resultat men också som resultat för vissa av dimensionerna.

Kompetensdimensionen definieras med hjälp av de tre processerna: *Formulera*, som handlar om att formulera situationer matematiskt; *Använda*, som handlar om att använda matematiska begrepp, fakta, procedurer och resonemang samt *Tolka*, som handlar om att tolka och utvärdera matematiska resultat.

Innehållsdimensionen definieras primärt som breda matematiska begrepp med underliggande matematiskt tänkande genom de fyra områdena: *Förändring och samband*, som rymmer funktioner, statistik och algebra; *Kvantitet*, som rymmer aritmetik och taluppfattning; *Rum och form*, som rymmer det vi traditionellt menar med geometri och mätningar samt *Osäkerhet*, som rymmer sannolikhetsrelaterade och statistiska frågeställningar.

Sammanhangsdimensionen identifierar de sammanhang och situationer i vilka man kan möta matematiken genom fyra kontextområden: *Personlig*, som relaterar till individers och familjers vardag; *Samhällsliv*, som relaterar till individen som en del av ett samhälle, det kan gälla såväl lokalt, nationellt som globalt; *Arbete*, som relaterar till arbetslivet samt *Vetenskapliga*, som relaterar till användandet av matematik i vetenskap och teknik.

Genomförande av PISA-provet

En elev som genomför PISA-provet gör ett två-timmars-prov bestående av fyra provdelar, som innehåller uppgifter från antingen matematik, läsförståelse eller naturvetenskap. I PISA 2015 fanns totalt 27 olika provdelar som kombinerades ihop till 66 olika PISA-prov. Fördelningen av uppgifter varierar således mellan olika häften (roterad provdesign). Det finns provhäften som endast innehåller två av ämnesområdena medan andra innehåller uppgifter från alla tre ämnesområden.

I varje PISA-studie är ett av ämnesområdena huvudområde och då ingår flest uppgifter från det ämnet. Matematik var huvudområde i PISA 2003, PISA 2012 och kommer vara huvudområde i PISA 2022. I PISA 2015, när matematiken inte var huvudområde, fanns totalt 46 uppgifter bestående av 71 deluppgifter. De flesta av dessa är kortsvaruppgifter, en stor del är flervalsuppgifter och en mindre andel är uppgifter där eleven ska argumentera för sitt svar, redovisa sina beräkningar eller redovisa sin lösning.

För att möjliggöra jämförelser över tid finns bland provuppgifterna ett antal länkuppgifter med. Dessa återkommer i varje undersökning och möjliggör en bild av kunskapsförändringen och kunskapsutvecklingen över tid. Inför att varje ämne ska bli huvudområde skapas nya uppgifter inom ämnet. Varje deltagarland inbjuds då att skicka förslag på uppgifter. Dessa uppgifter går sedan ut på remiss till deltagande länder. I granskningen tar respektive land ställning till bland annat hur väl uppgifterna passar eleverna, hur väl de är relaterade till gällande styrdokument samt kulturella aspekter och könsaspekter. De uppgifter som passerar gallringen i denna fas går vidare till en utprovning som genomförs året innan varje huvudundersökning. Alla nya uppgifter genomgår denna process. Även nya enkätfrågor prövas ut på detta sätt. I utprovningen bedöms samtliga elevsvar i respektive land av särskilt utbildade bedömare. Sedan bearbetas data enligt modern psykometrisk mätteori (IRT, Item Response Theory). De uppgifter som vid analysen stämmer överens med den statistiska modellen har möjlighet att gå vidare till huvudundersökningen.

PISA har tidigare genomförts pappersbaserat (papper och penna) men genomfördes i PISA 2015 digitalt. I PISA 2015 hade de tidigare pappersbaserade uppgifterna överförts till ett digitalt format och eleverna svarade och redovisade sina lösningar digitalt. Eleverna genomför provet på en dator men får ha tillgång till såväl miniräknare som kladdpapper. Datorn är låst så att eleven inte har tillgång till några andra program än programmet för PISA-provet. I programmet för PISA-provet finns tillgång till en enklare miniräknare och ett formelblad.

Bedömning i PISA

För att klassificera hur elever löst uppgifterna i PISA använder man koder vid bedömningen av elevarbeten. Bedömningsanvisningarna är mycket detaljerade och anger kriterier för respektive kod med exempel på elevsvar. Bedömningen sker genom en central bedömning i varje land med ett antal utbildade bedömare. Bedömningen går till så att bedömarna bedömer en uppgift i taget. Bedömarna går igenom en uppgift, bedömer ett antal exempel på elevarbeten och diskuterar bedömningen av dessa. När en gemensam förståelse av bedömningsmallen är uppnådd bedöms samtliga elevarbeten på den aktuella uppgiften. Uppstår ändå problem och tveksamheter finns möjlighet att få extern hjälp från en central bedömningsorganisation, bland annat genom att bedömarna kan studera specifika frågor och svar om bedömning på uppgiften. Frågorna kommer från tidigare år uppgiften varit med eller från bedömare i andra länder och är besvarade av den centrala bedömningsorganisationen. Det finns också möjlighet att kontakta den centrala bedömningsorganisationen för hjälp.

För att kontrollera att bedömarna bedömer lika både inom och mellan länder används så kallad multipelkodning. Det innebär att flera bedömare bedömer samma elevsvar (utan att de vet om det). En del elevsvar bedöms av alla kodare inom ett land och skulle elevsvaren bedömas olika måste åtgärder vidtas. En del elevsvar återfinns i samtliga länder för att kunna jämföra bedömningarna mellan länderna. Målet är att bedömningen ska genomföras likvärdigt inom och mellan samtliga deltagande länder.

På vissa uppgifter använder sig PISA av dubbelsiffrig kodning, så kallad didaktisk kodning. Syftet är att man, förutom att erhålla nivån på bedömning, också ska få information om vilken strategi eleven har använt vid lösningen, och det gäller såväl korrekta som felaktiga strategier. Redan i bedömningsfasen anger bedömaren med en kod vilken metod eleven har använt.

En central aspekt för arbetet med utveckling och konstruktion av nationella prov i matematik och utformandet av bedömningsanvisningarna, är de olika kvaliteter som eleverna kan visa i sina arbeten. I PISA särskiljs i vissa fall inte bedömningsanvisningarna mellan samtliga kvalitativa nivåer, utan två lösningar med delvis olika kvalitativa nivåer kan ges samma kod. Fokus kan bitvis tolkas bli på en bedömning av produkten snarare än en bedömning av processen.

Varje elev genomför endast en delmängd av uppgifterna, som inte ens måste vara från samtliga ämnesområden, och ändå tilldelas varje elev resultat inom varje ämnesområde. För att kunna göra detta uppskattas den mest sannolika koden eleven skulle få – och därmed i förlängningen poäng – på de uppgifter som *inte* fanns med i hans provhäfte. Härigenom kan alla elever tilldelas ett resultat inom respektive ämnesområde. För att göra detta använder man sig av IRT (Item Response Theory). Utifrån mönster i hur eleven svarade på sina uppgifter beräknas ett sannolikt resultat och ur detta dras tio sannolika värden (*plausible values*). De sannolika värdena används sedan för att beräkna totalresultat. Totalresultatet innehåller då även en felmarginal. Denna metod kan tillämpas då PISA inte är konstruerat för att ge resultat för enskilda elever utan för att endast ge resultat på gruppnivå.

Exempel på en PISA-uppgift med bedömda elevlösningar

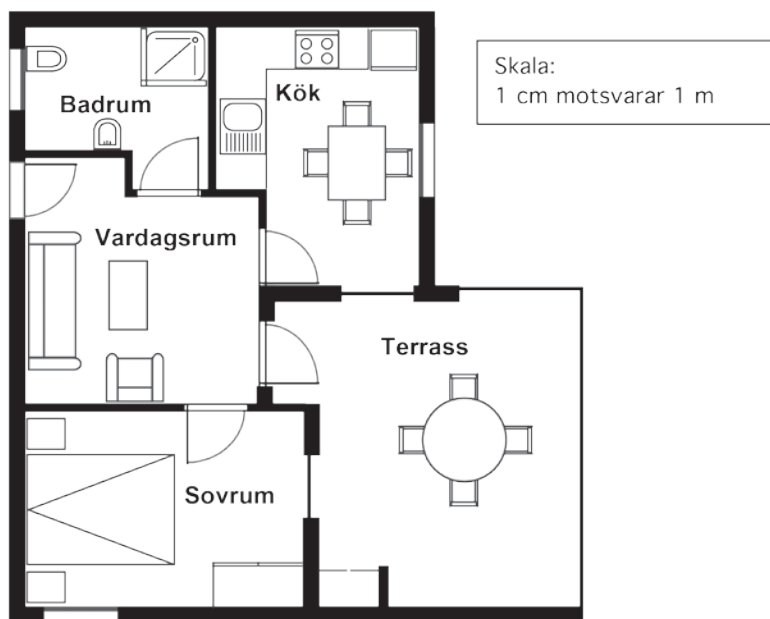
Varje PISA-uppgift förekommer i ett sammanhang, en kontext. De flesta uppgifterna är uppbyggda av en ingress som beskriver denna kontext och sedan följer ett antal deluppgifter. Deluppgifterna är av formen flervalsfrågor, kortsvarsfrågor eller redovisningsuppgifter där eleverna ska redovisa lösningen till deluppgiften. Samtliga deluppgifter är även kategoriserade enligt de tre dimensionerna; kompetenser, innehåll och sammanhang.

Nedan exemplifieras PISA-uppgifterna med en frisläppt uppgift. I uppgiften ska eleverna, utifrån en ritning av en lägenhet, markera längder som behövs för att på ett effektivt sätt beräkna lägenhetens area. Uppgiften är en form av kortsvarsuppgift då eleverna inte behöver redovisa sina resonemang utan endast lämna ett svar. Uppgiften är kategoriserad att pröva kompetensen *formulera*, vilket kan argumenteras för då den huvudsakligen fokuserar på att identifiera de längder som behövs för att lösa problemet. Uppgiften är kategoriserad att pröva innehållet *Rum och form*, vilket kan argumenteras för då den huvudsakligen omfattar längder som ska användas till att beräkna en area. Uppgiften är även kategoriserad som att befinna sig i ett sammanhang som fokuserar på aktiviteter i elevens närhet och är således inom kontexten *Personlig*.

Uppgiften fanns med i PISA 2012 (OECD, 2013a). Uppgiften låg på svårighetsnivå 4 utav 6 svårighetsnivåer. I Sverige löste cirka 41 procent av alla elever uppgiften korrekt, jämfört med cirka 45 procent i genomsnitt i OECD. I Sverige lyckades flickorna lösa uppgiften i högre grad än pojkarna (46 procent jämfört med 37 procent). I Sverige lämnade dock cirka en tredjedel av eleverna uppgiften obesvarad, vilket innebär att av de som försökte lösa uppgiften lyckades cirka 61 procent (lika stor andel som i OECD-genomsnittet där färre hoppade över uppgiften).

LÄGENHETSKÖP

Det här är en ritning över den lägenhet som Görans föräldrar vill köpa genom en mäklare.



För att uppskatta lägenhetens totala golvarea (inklusive terrassen och väggarna) kan du mäta storleken på varje rum, beräkna arean på vart och ett och sedan addera samtliga areor.

Det finns dock en effektivare metod för att uppskatta den totala golvarean där du bara behöver mäta 4 sträckor. Märk ut de fyra sträckor på ritningen här ovan som du behöver mäta för att kunna uppskatta lägenhetens totala golvarea.

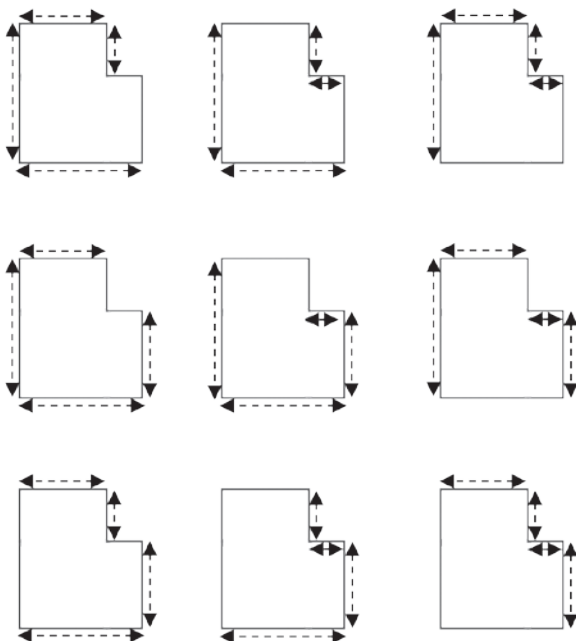
I instruktionen till bedömningarna anges att bedömaren ska försöka avgöra om eleven har förmågan att svara på uppgiften och att bedömaren inte ska göra poängavdrag för sådant som avviker från ett fulländat svar (OECD, 2011). I PISA kodas bedömningen med hjälp av termerna *full credit*, *partial credit* och *no credit* i stället för "korrekta" och "felaktiga" svar. Det finns två huvudorsaker till användandet av dessa begrepp. Dels har vissa frågor inget korrekt svar, utan snarare är svaren graderade baserat på i vilken utsträckning eleven har förstått uppgiften. Dels för att svar som kategoriseras som *full credit* inte nödvändigtvis omfattar endast ett helt korrekt, eller perfekt, svar. I allmänhet delar begreppen *full credit*, *partial credit* och *no credit* in elevarbetenas svar i tre grupper med avseende på i vilken utsträckning elevarbetet har visat förmåga att svara på frågan.

Bedömningen av elevernas prestationer på uppgifterna i PISA-provet och bedömningen av uppgifterna i nationella prov i matematik har likheter i att det i anvisningarna till bedömnarna anges att det handlar om att avgöra om eleven har förmågan att svara på uppgiften, och att bedömaren inte ska göra poängavdrag för sådant som avviker från ett fulländat svar (OECD, 2011; Skolverket, 2013a).

I bedömningen av detta exempel finns ingen *partial credit* utan varje elevsvar bedöms med *full credit* (kod 1) eller *no credit* (kod 0 eller 9). För att erhålla *full credit* ska i lösning markerats de fyra sträckor som behövs för att kunna uppskatta lägenhetens totala golvarea. Det finns nio olika lösningar. *Full credit* ges även till lösningar som tydligt använder fyra sträckor för att beräkna golvarean, till exempel $A = (9,7 \text{ m} \times 8,8 \text{ m}) - (2 \text{ m} \times 4,4 \text{ m})$, $A = 76,56 \text{ m}^2$, för då tolkas det som att elevarbetet har visat att fyra lämpliga sidor är valda. Nedan finns bedömningsanvisningen till uppgiften samt fyra bedömda elevarbeten med kommentarer.

Full Credit

Code 1: Has indicated the four dimensions needed to estimate the floor area of the apartment on the plan. There are 9 possible solutions as shown in the diagrams below.

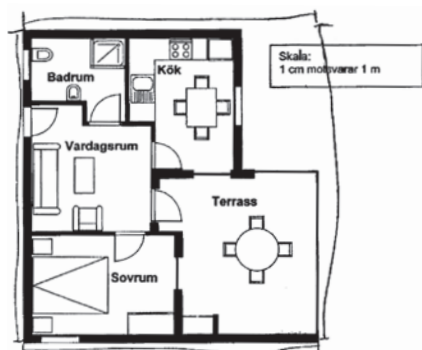


- $A = (9.7 \text{ m} \times 8.8 \text{ m}) - (2 \text{ m} \times 4.4 \text{ m})$, $A = 76.56 \text{ m}^2$
[Clearly used only 4 lengths to measure and calculate required area.]

No Credit

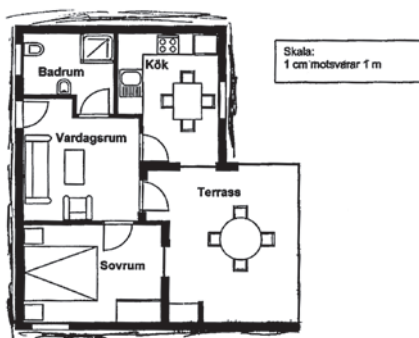
Code 0: Other responses.

Code 9: Missing.



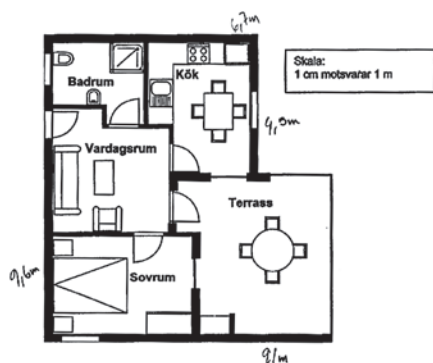
Elevarbete A

Elevarbetet har bedömts med kod 0 (*no credit*). Visserligen är fyra sträckor markerade men de fyra markerade sträckorna kan inte användas för att bestämma lägenhetens golvarea.



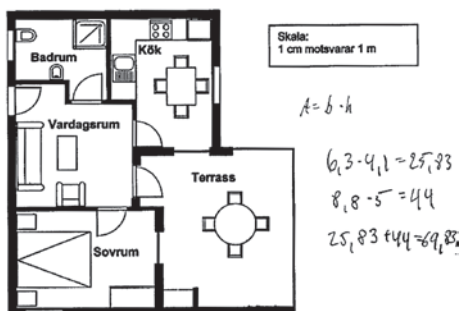
Elevarbete B

Elevarbetet har bedömts med kod 1 (*full credit*). Elevarbetet innehåller markeringar av fyra lämpliga sträckor som kan användas till att beräkna arean.



Elevarbete C

Elevarbetet har bedömts med kod 1 (*full credit*). Elevarbetet innehåller markeringar av fyra lämpliga sträckor där markeringar är i form av mått på sidorna. Att måtten som anges i elevarbetet är ungefärligt korrekt uppmätta gör att det är tydligt att det är fyra korrekta sträckor som har angivits. Om måtten inte gått att para ihop med fyra korrekta sträckor skulle bedömningen blivit annorlunda.



Elevarbete D

Elevarbetet har bedömts med kod 1 (*full credit*). Elevarbetet innehåller visserligen en beräkning av golvarean, vilket inte efterfrågades, men i beräkningen återfinns måttangivelser som gör att fyra korrekta sträckor kan identifieras. Eftersom syftet med uppgiften låg inom kompetensen formulera och i detta fall handlade det om att kunna identifiera lämpliga sträckor för en areaberäkning, har bedömaren bedömt det som att elevarbetet visat sådana kunskaper.

Enkäter i PISA

Förutom kunskapsprov inom de olika ämnesområdena i PISA består även PISA av ett antal enkätfrågor. Dels elevenkäter, där eleverna får svara på frågor om allt från uppgifter om föräldrarnas utbildning till inställningar till skolämnen, dels skolledarenkäter, där skolledarna svarar på frågor om skolan. Elevenkäten består av en enkät som tar cirka 30 minuter att genomföra. Även designen i enkäterna är roterad, det vill säga alla elever svarar inte på exakt samma enkätfrågor. När ett ämne är huvudområde i PISA finns fler enkätfrågor som handlar om det ämnet.

Enkäterna innehåller många olika typer av frågor och påståenden som eleverna ska svara på eller ta ställning till. Det handlar bland annat om en del bakgrundsvariabler men även om skolrelaterade frågor som till exempel skolk, sen ankomst, känsla av samhörighet. Det ämne som är huvudämne i en studie får även ett större utrymme i enkäten och fler frågor inkluderas i relation till huvudämnet. När matematiken var huvudämne i PISA 2012 handlade de mer ämnesspecifika frågorna bland annat om attityder till ämnet, uthållighet, inställning till sin förmåga att lösa problem, motivation, självvärdering, ångslan, matematikaktiviteter utanför skolan, matematiska ambitioner, matematiska omgivningen, undervisningen, relationen till läraren och klassrumsklimat.

Resultat från enkäterna i PISA 2012 visade bland annat att eleverna i Sverige, trots sina låga matematikresultat, i större utsträckning än OECD-genomsnittet, är intresserade, motiverade, har högre självuppfattning och högre ambitioner i matematik. Samtidigt framkom det att de ofta kommer sent till lektionerna, att de stör undervisningen och har låg uthållighet i matematik. De svenska eleverna uppger även att det huvudsakligen är yttre faktorer som påverkar deras skolframgång medan eleverna i de högrepresterande länderna oftare förklarar sin skolframgång med att det beror på deras egen insats. Mer om enkäterna och resultat från enkäterna går det bland annat att läsa om i den nationella PISA-rapporten från PISA 2012 då matematiken var huvudämne (Skolverket, 2013b).

I insamlingen av resultaten och ur enkäterna i PISA kan flera kombinationer av resultat och bakgrundsdata ge utgångspunkter för olika typer av analyser. Ett exempel på analyser där resultat och bakgrundsvariabler används, både var för sig men även tillsammans, är undersökningen av likvärdighet i den svenska skolan. Likvärdighet är ett begrepp inom utbildningsforskning och utbildningspolitik som används för att beskriva hur väl ett lands skolsystem lyckas kompensera för elevers olika möjligheter att få tillgång till och tillgodogöra sig utbildning och därmed även försöka minimera alltför stora skillnader i elevers resultat.

I PISA används flera olika indikatorer på likvärdighet (OECD, 2013b; OECD, 2016b). Några av dessa baseras på bakgrundsvariabler, andra på kunskapsresultat och ytterligare andra på en kombination av de två. Exempel på indikatorer av likvärdighet som endast använder bakgrundsdata är undersökningen av skillnaden mellan olika skolors socioekonomiska sammansättning. Ett exempel på indikatorer som endast använder kunskapsresultat är när man undersöker andelen elever i ett land som presterar under den lägsta godtagbara nivån eller när man undersöker storleken på spridningen i elevernas resultat. Ett exempel på indikatorer som

kombinerar elevresultat och bakgrundsdata är när man undersöker betydelsen av elevens hembakgrund för resultatet och betydelsen av olika skolors socioekonomiska sammansättning. Resultat från PISA-undersökningen visar bland annat att likvärdigheten i Sverige har minskat, bland annat genom att den totala spridningen i resultat ökat kraftigt, liksom spridningen mellan skolor. Betydelsen av elevens, och framförallt skolans, socioekonomiska nivå har också ökat i Sverige (Karlsson & Oskarsson, 2018).

Databaserna med kunskapsresultaten, bakgrundsinformation och enkätsvaren finns tillgängliga på OECD:s PISA-sida (<http://www.oecd.org/pisa/data/>) så att de som är intresserade har möjlighet att göra egna analyser.

Är PISA relevant för att mäta aspekter av svenska skolan?

Ett sätt att undersöka om PISA är relevant för att mäta aspekter av den svenska skolan är att undersöka PISA:s ramverk i förhållande till de svenska styrdokument. Ett annat sätt är att undersöka PISA-proven och deras matematikuppgifter, som ska spegla ramverket, i förhållande till de nationella proven och deras matematikuppgifter, som ska spegla de svenska styrdokument.

PISA:s ramverk och de nationella styrdokument (läroplaner med kunskapskrav) som styr den svenska skolan har olika syften, uppbyggnad och omfattning. Detta gör naturligtvis att det finns olikheter när matematikdelarna i ramverk och styrdokument ska jämföras, men det finns även en del likheter. Beskrivningen av matematiken har en skillnad i att PISA:s ramverk har ett tydligare fokus på användandet av matematiken i vardagliga, yrkesrelaterade och vetenskapliga kontexter. Det blir därför viktigt för PISA att samtliga provuppgifter förläggs till situationer eller sammanhang som kan förekomma i elevens nuvarande situation eller i elevens framtida liv.

Matematiken i de svenska styrdokument lägger fokus både på matematiken i vardagen, samhället och fortsatt utbildning men har även en så kallad inommatematisk inriktning. När man studerar ämnesinnehållet för matematiken är överensstämmelsen god för de två ramverken. De svenska kursplanernas beskrivningar av innehållet har i stora drag sina motsvarigheter i PISA:s ramverk och i stort sett allt innehåll återfinns där. PISA har en något öppnare och mer övergripande beskrivning av innehållet och det finns några få moment som inte är framskrivna i Lgr 11. I kommentarmaterialet till kursplanen för matematik i Lgr 11 (Skolverket, 2011) beskrivs förändringar jämfört med tidigare kursplan. I materialet lyfter man fram bland annat att man avser att kursplanen på ett tydligare sätt ska lyfta fram vikten av att möta och använda matematik i olika sammanhang samt inom olika ämnesområden. Detta är en förändring som gör att kursplanen och PISA:s ramverk närmar sig varandra på detta område. I kommentarmaterialet nämns också att de internationella utvärderingarna, exempelvis PISA, har varit en av flera utgångspunkter i förändringsarbetet.

Vid en jämförelse mellan kunskapsproven i PISA och de nationella proven i matematik kan konstateras att det finns några tydliga skillnader i provformat. En skillnad är att uppgifterna i PISA inte är ordnade i svårighetsgrad och att det inte finns det "mjukstartstänkande" som finns i de nationella proven. En annan skillnad är att i

PISA kan uppgifter från olika ämnen såsom matematik, läsförståelse och naturvetenskap förekomma i samma provhäfte. En tredje skillnad är att eleverna gör PISA vid ett tillfälle medan det nationella provet är uppdelat på flera olika tillfällen. En skillnad finns även i bedömningen. Svenska elever får inför de nationella proven veta att även påbörjade lösningar beaktas och bedöms. I svenska styrdokument hittas belägg för att matematisk kunskap kan visas även i påbörjade lösningar. I det nationella provet finns det krav på redovisning i cirka hälften av uppgifterna och i dessa uppgifter bedöms även påbörjade lösningar. PISA:s uppgifter domineras av kortvarsuppgifter och flervalsuppgifter och endast i ett fåtal uppgifterna bedöms mer än bara svaret.

En av anledningarna till skillnaderna är att nationella proven och PISA har olika syften. Nationella provens syfte är att vara ett stöd för att likvärdigt och rättvist göra bedömningar och sätta betyg på en elevs kunskaper. PISA:s syfte är att undersöka i vilken utsträckning 15-åringar är förberedda för vuxenlivet och rustade att möta framtidens behov, det vill säga vilken handlingsberedskap ungdomarna har. En annan skillnad är att nationella proven är en totalundersökning av en population elever medan PISA använder sig av ett representativt urval (stickprov) av elever.

Det finns likheter mellan de två kunskapsprovens uppsättningar av uppgifter. Likheter återfinns bland annat i fördelningen av uppgifternas matematiska innehåll och processer. Likheter finns även i spridningen av uppgifternas svårighetsnivåer. Det finns dock även betydande skillnader mellan de två kunskapsprovens uppsättningar av uppgifter. Skillnaderna gäller bland annat fördelningen av uppgiftsformat där PISA-uppgifterna har en betydligt större andel flervalsuppgifter och nationella provet har en betydligt större andel redovisningsuppgifter. Det är också stor skillnad i uppgiftsformat med avseende på olika typer av uppgifter där nationella provet har en större variation i uppgifter, från korta huvudräkningsuppgifter till stora problemlösningssuppgifter och muntliga uppgifter. En stor skillnad är även att PISA-uppgifterna är betydligt mer texttunga och eleverna behöver läsa betydligt mer text per minut än i nationella provet. De allra flesta av deluppgifterna i PISA 2012 är dock relevanta för ett nationellt prov men det finns skillnader vad gäller bedömningen. Det gäller framförallt bedömning med delpoäng och krav på redovisning av lösningar.

PRIM-gruppen har gjort en undersökning, på uppdrag av Skolverket, om relevansen av PISA ur ett svenskt perspektiv. I rapporten till undersökningen konstateras att

"PISA är ett relevant instrument, med avseende på ramverk och uppgifter, för att mäta svenska 15-åringars kunskaper i matematik utifrån ramverk och matematiskt innehåll. Alla förmågor och aspekter av matematiken i de svenska styrdokumenterna prövas dock inte i PISA."

(Skolverket, 2015, s 35).

PRIM-gruppen har även gjort motsvarande undersökning för relevansen hos TIMSS-studien (Sollerman & Pettersson, 2016) där även TIMSS-studien, med avseende på ramverk och uppgifter, bedöms vara ett relevant instrument ur ett svenskt perspektiv.

Diskussion

De internationella storskaliga mätningarna växer. Fler och fler länder deltar och kontinuerliga mätningar rullar på i nya cykler. Mätningarna har fått ett stort utrymme i mediala och utbildningspolitiska debatter om skolan och hänvisas ofta till av politiker, journalister och forskare. Dessa mätningar får ett stort utrymme och det är viktigt att sätta sig in i och undersöka begränsningarna och möjligheterna med dessa mätningar.

PISA och TIMSS är två internationella mätningar som båda har matematik som ett av sina undersökningsämnen. I PISA deltar elever som är 15 år. Eftersom åldern för skolstart varierar mellan deltagande länder innebär det att i vissa länder har eleverna gått ett år längre i skolan än i andra. I TIMSS deltar elever i sitt fjärde och åttonde skolar. Eftersom åldern för skolstart varierar mellan deltagande länder innebär det att i vissa länder har eleverna en högre ålder vid genomförandet än i andra länder. Båda dessa grundförutsättningar gör att det finns en problematik i att direkt jämföra resultat mellan vissa länder, eftersom elever har fått mer eller mindre undervisning eller har olika åldrar. I nuläget saknas möjlighet att inom ramen för undersökningarna kompensera för sådana faktorer, vilket får ses som en brist och en sådan jämförelse kan bli missvisande. Båda studierna har kvaliteter när det gäller att mäta resultat över tid och trender. Båda studierna har länknings mellan de olika omgångarna av studierna så att analyser av kunskaper över tid kan genomföras. Detta gäller för resultaten i matematik och resultaten i de olika delområdena i matematik som definieras i respektive ramverk, men även för många resultat från elev-, lärar- och skolenkäterna.

En viktig fråga är naturligtvis i vilken utsträckning man mäter det man avser att mäta, nämligen kunskaper i matematik utifrån hur väl förberedda eleverna är att möta livet som samhällsmedborgare i olika situationer (PISA) respektive utifrån ett ramverk som baseras på deltagande länders styrdokument (TIMSS). Att avgöra hur väl man lyckas med detta är en fråga som kan diskuteras. PISA är inte i första hand relaterad till styrdokumentet, utan avser att pröva i vilken utsträckning eleverna kan omsätta sin kunskap i olika situationer i ett antal olika sammanhang. TIMSS har en tydligare utgångspunkt i styrdokumentet och siktar på att beskriva och analysera undervisningen utifrån avsedd, genomförd och uppnådd läroplan. Man kan säga att PISA och TIMSS kompletterar varandra då de fokuserar olika aspekter av kunskap – elevers förmåga att omsätta kunskap i olika situationer respektive i vilken utsträckning eleverna har specifika ämneskunskaper såsom de beskrivs i styrdokumentet.

Det är rimligt att anta att dessa studier influeras av de organisationer som initierar, definierar, rapporterar och står för kostnaden för dessa studier. Bakom PISA står OECD, en internationell organisation med en samling industriländer. Bakom TIMSS står IEA, ett internationellt forskarsamarbete. För att undersöka hur studierna och dess resultat influeras av bakomliggande organisationer måste man undersöka dessa organisationers eventuella ideologiska perspektiv och undersöka om och hur de perspektiven skulle ha påverkat olika perspektiv av studien.

Uppbyggnaden av kunskapsprov kopplade till bakgrundsdata och enkäter ger möjligheter till många olika typer av fördjupande studier. Till exempel utgör den didaktiska kodning som används i PISA en grund för att få en mer nyanserad bild

av de strategier – såväl korrekta som felaktiga – som elever använder vid arbete med mer omfattande uppgifter. Dessutom utgör alla elevarbeten ett rikt material för att analysera hur elever löser uppgifter i matematik och det ger möjligheter att använda PISA och TIMSS för att bedriva didaktisk forskning.

Dessa internationella storskaliga studier är troligtvis här för att stanna. Det är dock viktigt att man kontinuerligt utvärderar dessa och ifrågasätter samtliga ingående delar. Här nämns några, ofta svårbesvarade exempel på frågeställningar:

- När resultaten från en studie presenteras har ofta Sveriges resultat förändrats jämfört med tidigare undersökningar. Hur ser förändringarna ut? Kan man se mönster i till exempel kunskapsresultaten för olika undergrupper (exempelvis kön, socioekonomisk bakgrund, hög- respektive lågpresterande)? Vad beror dessa förändringar på? Beror de på förändringarna som skett i skolan och/eller utanför skolan?
- Det är väldigt många länder som deltar i dessa undersökningar. Vad kan vi i Sverige lära om andra länder genom dessa undersökningar? Vad får vi veta som vi inte skulle veta annars?
- Matematikdelen av undersökningen genomförs med hjälp av ett antal matematikuppgifter som är utformade från ett formulerat ramverk. Vad är det man mäter i undersökningar som dessa och vilka aspekter av matematisk kompetens låter sig inte fångas i denna typ av undersökningar? Hur ser uppgifterna ut och hur vana är eleverna vid att möta de olika uppgiftstyperna som finns representerade?
- Undersökningarna kostar att genomföra och tar tid och utrymme för de som genomför dem. De påverkar på flera olika sätt diskussionen om skolan. Vad kan undersökningarna ha för inverkan (positiv och/eller negativ) på undervisningen i skolan? Vad kan eller bör de ha för inverkan för de politiska beslut som fattas? Vilka fördelar och nackdelar innebär det att delta i dessa undersökningar?

När du än läser detta kapitel så är det snart dags för nya resultat från dessa internationella storskaliga mätningar. Förhoppningsvis kan de nya resultaten användas klokt så att vi får ytterligare kunskap om elevernas kunskaper i matematik i en föränderlig värld.

Referenser

- Bos, K. T. (2002). *Benefits and Limitations of Large-Scale International Comparative Achievement Studies: The Case of IEA's TIMSS Study*. Doktorsavhandling, University of Twente.
- Brown, M. (1996). FIMS and SIMS: the first two IEA International Mathematics Surveys, *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 3:2, 193–212.
- Brown, M. (1998). The Tyranny of the International Horse Race. I R. Slee, G. Weiner & S. Tomlinson (red). *School Effectiveness for Whom? Challenges to the School Effectiveness and School Improvement Movements* (s. 33–47). London: Falmer Press.
- Burstein, L. (1992). *The IEA Study of Mathematics III: student growth and classroom processes*. Oxford, Pergamon Press.
- Freudenthal, H. (1975). Pupils' achievements internationally compared – the IEA, *Educational Studies in Mathematics*, 6, 127–186.
- Husén, T. (1973). Foreword. I L. C. Comber & J. P. Keeves (red). *Science Achievement in Nineteen Countries* (s. 13–24). Stockholm/New York: Almqvist & Wiksell / John Wiley & Sons.
- Husén, T. & Tuijnman, A. (1994). Monitoring Standards in Education: Why and How it Came About. I A. C. Tuijnman & T. N. Postlethwaite (red). *Monitoring the standards of education*. Papers in honor of John P. Keeves (s. 1–21). Oxford: Pergamon.
- IEA (1991), *Third International Mathematics and Science Study: an introduction (TIMSS proposal)*. The Hague, IEA.
- Karlsson, K.G. & Oskarsson, M. (2018). Likvärdighet. I U. Fredriksson, K.G. Karlsson & A. Pettersson (red). *PISA under 15 år – resultat och trender* (s. 115–130). Stockholm: Natur och Kultur.
- McLean, M. (1992.) *The Promise and Perils of Educational Comparison*. London, Tufnell Press.
- OECD. (2011). *PISA 2012. Main Survey. Paper based assessment of mathematics: coding guide*. OECD.
- OECD. (2013a). *PISA Released Mathematic Items*. www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012-2006-rel-items-maths-ENG.pdf
- OECD. (2013b). *What Makes schools successful? Resources, Policies and Practices – Volume IV*. Paris: OECD.
- OECD. (2016a). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. PISA, OECD Publishing, Paris.
- OECD. (2016b). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD.
- Olsen, R. V. (2005). *Achievement Tests from an Item Perspective. An exploration of single item data from the PISA and TIMSS studies, and how such data can inform us about students' knowledge and thinking in science*. Doktorsavhandling, University of Oslo.
- Pettersson, A. (2010). Bedömning av kunskap för lärande och undervisning. I S. Eklund (red). *Bedömning för lärande – en grund för ökat kunskapsinnehåll*. (s. 6–18). Stockholm: Stiftelsen SAF i samarbete med Lärarförbundet.
- Pettersson, D. (2008). Internationell kunskapsbedömning som inslag i nationell styrning av skolan. *Uppsala Studies in Education*. Uppsala universitet.

- Pidgeon, D. (1967). *Achievement in Mathematics: a national study of secondary schools*. Slough, UK, National Foundation for Educational Research.
- Robitaille, D. F. & Garden, R.A. (1989). *The IEA Study of Mathematics II: contexts and outcomes of school mathematics*. Oxford, Pergamon Press.
- Schmidt, W. H., Jakwerth, P. M. & McKnight, C. (1998). Curriculum sensitive assessment: Content does make a difference. I *International Journal of Educational Research* Vol. 29 no. 6, 503–527.
- Skolverket. (1996). *TIMSS 1995. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport 114. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013a). *Ämnesprov 2012/13. Matematik årskurs 9. Bedömningsanvisningar*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2013b). *PISA 2012 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*. Rapport 398. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2014). *Grundskolan i internationella kunskapsmätningar – kunskap, skolmiljö och attityder till lärande*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2015). *Med fokus på matematik: Analys av samstämmighet mellan svenska styrdokument och den internationella studien PISA*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2016a). *TIMSS 2015. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 448. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2016b). *PISA 2015. 15-åringars kunskaper i naturvetenskap, läsförståelse och matematik*. Rapport 450. Stockholm: Skolverket.
- Sollerman, S. & Pettersson, A. (2016). *Med fokus på matematik. En analys av samstämmigheten mellan svenska styrdokument, ämnesprov i matematik och den internationella studien TIMSS 2015*. Stockholm: Skolverket.
- Wiggins, G.P. (1993). *Assessing student performance: exploring the purpose and limits of testing*. (1. ed.) San Francisco: Jossey-Bass.

Inledning

till kapitel 8 och 9 om bedömningsstöd

Maria Nordlund, Erica Aldenius, Yvonne Franzon, Katarina Kristiansson,
Heléne Sandström, Anette Skytt och Niklas Thörn

BEDÖMNINGSTÖD KAN HA olika syften och form. De kan vara helt webbaserade, endast distribueras via webben eller helt pappersbaserade. De kan vara obligatoriska eller frivilliga. PRIM-gruppen har under årens lopp utvecklat många olika bedömningsstöd, på olika nivåer, för olika skolformer och i olika ämnen, främst matematik men också hem- och konsumentkunskap samt olika yrkesämnen. Det de har haft gemensamt är att de, som namnet anger, ska stödja bedömningen av de kunskaper som en elev visar.

Vad innebär det att ett material stödjer bedömningen? Det kan innebära ny information eller komplettera den bild som läraren redan har av en elevs visade kunskaper. Ett stöd kan även innebära en bekräftelse av något jag redan känner till.

Ett bedömningsstöd kan bestå av material till lärare, som en grund för att kunna planera för en kommande undervisning och därefter bedömning. Det kan också bestå av uppgifter till elever, uppgifter som svarar mot olika nivåer i kunskapskraven. Ett bedömningsstöd kan även bestå av resonerande text till exempel kring hur de olika förmågorna, som skrivs fram i kurs- och ämnesplanerna i matematik, kan tolkas och hur elevernas utveckling av förmågorna kan bedömas. Ett exempel på det förstnämnda är *Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9* som syftar till att stödja och strukturera lärarens kontinuerliga bedömning av elevens kunskapsutveckling (se kapitel 3), men också att ge underlag för att eleven ska kunna följa sitt eget lärande. Ett exempel på det sistnämnda är *Kommentarmaterialen till kunskapskraven*. Kommentarmaterialen syftar till att ge förståelse för hur kunskapskraven är konstruerade och hur de kan tolkas. Till kommentarmaterialen till kunskapskraven finns dessutom filmer med tillhörande diskussionsunderlag.

Vilket syfte ett bedömningsstöd har kan ibland härledas till vad bedömningsstödet har för ”underrubrik”. Är det en kartläggning? En diagnos? En utvärdering? Eller kanske en screening? Vad kan de olika begreppen stå för? Vi tittar närmare på det.

Att kartlägga kan enligt Nationalencyklopedin (NE) definieras som att systematiskt utforska till exempel en elevs kunskaper. Materialet som presenteras i kapitel 8 handlar om att kartlägga nyanlända elevers kunskaper i numeracitet (*Kartläggning av nyanlända elevers kunskaper*). I detta material är det läroplanens övergripande mål som står i fokus och materialet ska bland annat ge en bild av vilken beredskap eleven har för att möta den svenska skolkontexten. Man har tydliggjort att det handlar om en pedagogisk kartläggning som inte knyter an till vare sig kursplan eller kunskapskrav. Ett annat material som benämns kartläggningsmaterial är *Hitta matematiken*. Här handlar det om att ge stöd till förskollärare och lärare att identifiera de elever som kan riskera att inte uppfylla det kunskapskrav som stipuleras för årskurs 3. Materialet tolkas utifrån läroplanen för förskoleklassen och tar sikte på kunskapskravet i matematik för årskurs 3, men det är inte kunskaper i matematik som materialet avser att kartlägga, utan det är det mer vidare begreppet matematiskt tänkande som avses. I materialet presenteras ett antal aktiviteter som ska utmana elevernas matematiska tänkande och som ska kunna ingå i den ordinarie undervisningen och genomförs i grupp.

Att diagnostisera kan handla om att bestämma klassens eller de enskilda elevernas kunskapsnivå i ett givet ämne. Enligt NE används diagnostiska material vanligen i

början av en årskurs eller, för att underlätta lärarens undervisningsplanering, då man ska påbörja ett nytt ämnesområde. Ett exempel på ett material med diagnostiska förtecken är *Nationellt bedömningsstöd i taluppfattning för årskurs 1–3*. Syftet med detta material är att identifiera elever som riskerar att inte nå kunskapskravet i årskurs 3 och de elever som har kommit så långt i sin kunskapsutveckling i matematik att de behöver extra utmaningar. Att det är just taluppfattning som materialet fokuserar beror på att såväl beprövad erfarenhet som forskning visar att en grundläggande god taluppfattning är av yttersta vikt för att eleverna ska ha en fortsatt god kunskapsutveckling i ämnet. Lärarens bedömning av en elevs taluppfattning tar avstamp i en muntlig del på höstterminen i årskurs 1 och allt eftersom elevernas möjligheter att uttrycka matematik mer formaliserat tar även skriftliga delar vid.

I NE kan man läsa att begreppet utvärdering är en sammanfattande term för metoder som syftar till en systematisk bedömning av resultaten och de mer långsiktiga effekterna av genomförda insatser. I pedagogiska sammanhang kan man dock nöja sig med att relatera resultat i förhållande till detaljerade mål. Man talar då om en måluppfyllelseämätning. Inget av de bedömningsstöd som kommer att presenteras i kommande kapitel faller direkt under denna definition. Närmast kan man kanske se *Kompletterande bedömningsstödet för matematik 1a*, som syftar till att ge matematiklärare på gymnasieskolans yrkesprogram stöd för att bedöma elevernas kunskaper i de delar av matematiken som kopplar till respektive programs karaktärsämnen. Ordet ”kompletterande” syftar på att materialet ska komplettera det nationella prov som är gemensamt för samtliga yrkesprogram och som därmed endast kan pröva de delar av matematiken som inte är knutna till karaktärsämnena. Materialet kan användas när som helst under kursen, men ska i slutet av densamma kunna ge läraren information om huruvida elevens prestationer nått nivån för de olika kunskapskraven. Materialet presenteras i kapitel 9.

Slutligen begreppet screening, en engelsk term som kan översättas med orden ”sällning” eller ”gallring”. Enligt NE definieras screening som en benämning på metoder att inom en stor grupp undersökningsobjekt sälla fram enskilda enheter med en sökt speciell egenskap. I en pedagogisk kontext skulle det då kunna handla om att med hjälp av standardiserade material sälla fram de elever vars visade kunskaper indikerar en viss nivå. I de material som PRIM-gruppen utvecklat förekommer inte begreppet screening, men de utvärderingar på kommunal nivå, som kan ses som en temperaturtagning på gruppnivå och som nämns i kapitel 1, omnämns ibland som material som ”screenar” elevernas kunskaper.

Gemensamt för alla de material som beskrivits ovan är att de utvecklats tillsammans med grupper av verksamma lärare och formats utifrån stora utprovningar bland elever.

I kommande två kapitel presenteras tre olika material som PRIM-gruppen har utvecklat på uppdrag av Skolverket. I kapitel 8 presenteras det material som riktar sig till elever från 9 år och uppåt, och med en kontext som har strävat efter att vara så kulturellt obunden som möjligt. De material som presenteras i kapitel 9 har det gemensamt att de vänder sig mot äldre elever och vuxna, och att autenticiteten i kontexten varit prioriterad.

Kartläggning av nyanlända elevers kunskaper

Maria Nordlund och Heléne Sandström

NYANLÄNDA ELEVER ÄR ingen homogen grupp. En del elever har lång skolgång bakom sig, medan andra saknar eller har en mycket sporadisk skolgång. När en skola tar emot en nyanländ elev behöver skolan ta reda på vilka kunskaper eleven har med sig. I detta kapitel presenteras ett kartläggningsmaterial som är ett stöd i det arbetet. Fokus läggs på den del av materialet som är obligatoriskt att genomföra och som är avsett för elever som är äldre än nio år.

Nyanlända elever har generellt sett svårare att nå de kunskapskrav som minst ska uppnås i grundskolans årskurs 9, vilket innebär att de i lägre utsträckning har behörighet till gymnasieskolans nationella program. Endast 65 procent av de elever som invandrat till Sverige efter ordinarie ålder för svensk skolstart nådde behörighet till gymnasieskolans nationella program 2011, jämfört med 87 procent av dem som invandrat och folkbokförts före sju års ålder. Det är framförallt de elever som kommer sent till Sverige som har svårt att uppnå kravnivåerna. (Ds 2013:6). I nämnda departementskrivelse hänvisas till forskning av Heath & Kilpi-Jakonen. De har utifrån PISA-data visat att ju äldre eleverna är när de börjar sin skolgång i landet som de invandrar till, desto sämre är deras prestationer. De identifierar dock ingen särskild ”kritisk ålder” för när det börjar vara svårt att komma ikapp de jämnåriga. Böhlmark har däremot i sin studie visat att den kritiska åldern börjar efter nio års ålder. (Ds 2013:6; Vetenskapsrådet, 2010). Utifrån denna bakgrund uppdrog regeringen åt Skolverket att genomföra insatser för att öka måluppfyllelsen för elever med annat modersmål än svenska. I uppdraget ingick att utveckla och sprida information om ett särskilt kartläggningsmaterial som skulle stödja arbetet med att kartlägga de kunskaper som en nyanländ elev har när hen kommer till den svenska skolan. (Regeringsbeslut, 2013).

Vad innebär kartläggning av nyanlända elevers kunskaper

I skollagen definieras begreppet *nyanländ elev*. Det är en elev som har varit bosatt utomlands, som nu bor i Sverige och som har påbörjat sin utbildning här senare än höstterminens start det kalenderår då hen fyller sju år. En elev ska inte anses vara nyanländ efter fyra års skolgång i det här landet. (SFS 2010:800)

Från den 1 januari 2016 är kartläggning av en nyanländ elevs kunskaper reglerad i skollagen och obligatorisk att genomföra. För en elev som har börjat skolan i Sverige, bott utomlands under en period och sedan återvänt till Sverige, ska en kartläggning göras om det behövs. (SFS 2010:800, kap 3). Kartläggningen ska ge underlag för rektor att fatta beslut om placering av en nyanländ elev i årskurs och undervisningsgrupp. Den obligatoriska delen av kartläggningen ska genomföras inom två månader från att eleven har tagits emot inom skolväsendet i grund-, grundsär-, special- eller sameskolan. Det är elevens kunskaper (som hen har visat vid kartläggningen), elevens ålder och personliga förhållanden i övrigt som ska ligga till grund för beslutet om årskursplacering. Kartläggningen av elevens kunskaper ska även vara underlag för planeringen av elevens fortsatta undervisning och hur undervisningstiden ska fördelas mellan ämnena.

Kartläggningen består av tre steg. Steg 1 och steg 2 är obligatoriska, medan steg 3 är frivilligt och kan med fördel genomföras av mottagande ämneslärare. I steg 1

förs ett samtal med elev och vårdnadshavare. Syftet är att få övergripande information om elevens bakgrund, erfarenheter och de förmågor och kunskaper som eleven har utvecklat i eller utanför ett skolsammanhang. I detta samtal framkommer också vilket eller vilka språk som eleven använder. Kartläggningens steg 2 består av två delar, en del som handlar om litteracitet och en del som handlar om numeracitet. Litteracitet handlar om elevens användning av skriftspråk i olika sammanhang och för olika syften. Numeracitet handlar om elevens förmåga att använda matematiskt tänkande när det gäller att lösa problem, föra resonemang, argumentera och motivera sina lösningar. Båda dessa delar utgörs av ett samtal mellan eleven och en kartläggande lärare. Steg 3 ger möjlighet att kartlägga elevens kunskaper i de flesta av grundskolans ämnen. Hela materialet finns i Skolverkets bedömningsportal (Skolverket, 2016).

Från *numeracy* till numeracitet

I regeringens uppdrag till Skolverket fanns en viljeyttring att i första hand kartlägga väsentliga kunskapsområden och inte skolämnena. (Regeringsbeslut, 2013). De kunskapsområden som Skolverket tolkade som väsentliga var *literacy* och *numeracy*. *Literacy* kan i en svensk kontext ses som ett vedertaget begrepp till skillnad från *numeracy*, som inte förekommer så ofta i svenska sammanhang. Valet av *literacy* och *numeracy* innebär att det inte finns någon kursplan eller kunskapskrav att relatera till. Det som istället relateras till är målpunkterna i läroplanens kapitel Övergripande mål och riktlinjer. (Skolverket, 2011).

Översatt till svenska blir *numeracy* ofta begreppet ”räkneförmåga”. (Norstedts ordböcker). Internationellt finns det däremot flera olika definitioner av *numeracy*, som inte är så snäva som den svenska översättningen. Ordet introducerades i Storbritannien redan i slutet av 1950-talet, men konkretiserades inom utbildningsfältet i mitten av 1990-talet. (Dearing, 1994). I till exempel Wales definieras *numeracy* som ”*Mathematics is a part of numeracy, but to be numerate means you are able to apply some of these mathematical skills in many more contexts than in mathematics lessons and across several subject areas.*” (Wales government, 2017). I denna definition lyfts kopplingen till andra ämnen fram. Det ligger nära tillhands att se behovet av *numeracy* i de teoretiska ämnena, men även de praktisk-estetiska ämnena, som till exempel hem- och konsumentkunskap, kan erbjuda lärandesituationer där *numeracy* kan utvecklas. Ett annat exempel på en definition, som används i läroplaner i Queensland, Australien är ”*Numeracy is needed to solve problems and make sense of time, numbers, patterns and shapes. It’s used for everyday tasks like cooking, reading a map or playing sport.*” (Queensland government, 2017). Vinklingen mot problemlösning är ytterligare en aspekt av *numeracy*. I kartläggningsmaterialet ges eleverna flera olika möjligheter att visa sin problemlösningförmåga kopplat till en vardaglig kontext. Det kan handla om att resonera om hur man gör för att ta reda på hur högt något är eller hur mycket något väger. Ett annat närliggande begrepp är *mathematical literacy*, som används i PISA med definitionen ”*A mathematically literate student recognises the role that mathematics*

plays in the world in order to make well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens.” (OECD, 2017), och som beskriver en medborgarkunskap som är nödvändig för att verka i samhället. Denna definition får dock betraktas som alltför omfattande för att kunna operationaliseras i detta kartläggningssammanhang.

Skolverket och svenska språkrådet förespråkade en svensk benämning av begreppet *numeracy*, på motsvarande sätt som *literacy* benämns litteracitet. Den svenska benämningen blev därför numeracitet. I samband med att detta nya begrepp etablerades fördes ett resonemang om vilka för- och nackdelar ett nytt begrepp kan ha. En fördel som togs upp av lärare som prövade ut materialet var att det blev tydligt att det inte är skolmatematiken som avses. Risker att det kopplas till kursplanen och kunskapskraven blir därmed mindre. Den främsta nackdelen med ett nytt begrepp skulle vara att det initialt råder en oklarhet om vad begreppet står för.

Definitionen av numeracitet i det här materialet är ”att använda matematiskt tänkande”. Den bygger dels på ovanstående definitioner av *numeracy*/numeracitet, dels på läroplanens mål för vad varje elev ska uppnå efter genomgången grundskola. Det är alltså en definition som ger eleven möjlighet att lösa problem, föra resonemang, argumentera och motivera sina lösningar i kontexter som kan återfinnas i flera olika sammanhang.

Kartläggning genom samtal

Kartläggningen i numeracitet sker i ett samtal mellan kartläggaren och eleven. Samtalet kan ta sin utgångspunkt i en bild. Bilden syftar till att avdramatisera samtalet och konkretisera de frågor som ställs. Den är dock inte en förutsättning för att kunna ha samtalet.



Bilden kan uppfattas som västerländsk, vilket är ett medvetet val. Den minsta gemensamma nämnaren för alla nyanlända elever är att de har kommit till Sverige och har här troligtvis mött en miljö som påminner om den på bilden.

En rad ställningstaganden har legat till grund för utvecklandet av kartläggningsmaterialet i numeracitet. Ett av de främsta ställningstagandena var att alla elever ska få visa sina kunskaper oavsett bakgrund, skolerfarenhet och ålder. När kartläggaren möter eleven för första gången finns begränsad kunskap om elevens tidigare erfarenheter.

"Vid flera tillfällen har jag kartlagt elever med liten eller obefintlig skolbakgrund som har fått bra resultat på vissa delar av materialet. Exempelvis hade en pojke som arbetat som mattvävare sedan nio års ålder god förmåga att se mönster och var på god väg att lösa Fibonaccis talföljd men misslyckades för att hans kunskaper i huvudräkning inte var så bra. Ett annat exempel är en pojke som arbetat med sin morbror i en snickerifirma där de tillverkade fönster. Han beskrev de geometriska figurerna med hjälp av 45- och 90-gradersvinklar fast han inte hade någon formell kunskap i matematik. En pojke, 17 år och analfabet, var en fena på huvudräkning och problemlösning. Han kunde multiplikationstabellen för att han hade arbetat som gatuförsäljare. Däremot hade han inga formella kunskaper om hur man ställer upp en algoritm."

Den här kartläggaren beskriver flera elever som har kort eller obefintlig skolbakgrund. För att undvika att kartläggaren väljer ett material utifrån, kanske felaktiga, förutfattade meningar om elevernas kunskaper får alla elever möta samma material.

En följd av ovanstående ställningstagande var att låta frågeställningarna i materialet vara av öppen karaktär, det vill säga där elevens svar och resonemang är det som är det viktiga. Det eleven svarar ger kartläggaren, förutom information om elevens kunskaper, också information om elevens beredskap för den svenska skolkontexten. Har eleverna mött den här typen av frågeställningar tidigare? Har de erfarenhet av att sitta tillsammans med en vuxen och föra resonemang? Utprövningar har visat att alla elever inte har beredskapen för att möta det som förväntas av dem i den svenska skolan, till exempel att kunna reflektera och resonera i alla ämnen och självständigt formulera ståndpunkter. *"Det finns de som kommer från diktaturer där det är förbjudet att ifrågasätta. Ingen har någonsin frågat efter deras åsikt."* Utprövningarna har också visat att ordet matematik dels kan bidra till att elever tror att det bara handlar om siffror, tal och formler, dels kan bidra till att elever som har bristande självförtroende när det gäller matematik begränsas. I materialet finns därför en uppmaning om att undvika ordet matematik. Elever som har goda formella kunskaper i matematik har i utprövningar visat svårigheter att svara på mer öppna frågor. *"De letar i sitt huvud efter en formel (...) och svarar att de inte vet för de har aldrig räknat ut det tidigare. Då får man stötta genom att säga 'Du vet ingen formel, hur gör du då?'"*

Ett ytterligare ställningstagande är att fokusera förtjänster i elevens visade kunskaper och inte fokusera eventuella brister. Det är därför viktigt att varje elev lämnar samtalet med en känsla av att ha fått visa sina kunskaper. En utprövande lärare har sagt

Rumsuppfattning och geometri

Frågor till eleven		Stödfrågor och uppföringsfrågor	Anteckningar
 Ta fram bild på stenläggningen och byggbotar. Bygg stenläggningen. Beskriv hur stenläggningen ser ut. Vilka skillnader och likheter är det mellan de olika formerna?	 Finns det fler (geometriska) objekt/former på bilden? Cirkel		Lyckas inte bygga stenläggningen, prövar många gånger, säger: "Det är svårt"
		Kan du beskriva dem? Rund, inga hörn	
		Högre nivå	
		Bygger två sekvenser av mönstret. ☐	
 Berätta hur du skulle göra om du ville veta hur långt det är runt ett cykelhjul. Hur långt tror du att det är runt ett cykelhjul i verkligheten? Tror att det är 150 cm ("så lång som jag är")	 Berätta hur du skulle göra om du ville veta hur långt det är runt ett cykelhjul. Hur långt tror du att det är runt ett cykelhjul i verkligheten? Tror att det är 150 cm ("så lång som jag är")	Beskriv formernas likheter och skillnader t.ex. vad gäller area, vinklar. ☐	Visar godtagbart. "Ja, stora och små cyklar"
		Beskriv formernas likheter och skillnader t.ex. vad gäller sidor/hörn. ☒	
		Upptäcker fler geometriska objekt/former och kan beskriva dessa. ☒	
		Stödfrågor och uppföringsfrågor Kan du visa ungefär hur långt det är? Kan det vara olika långt runt cykelhjul? Gör du på samma sätt om du vill veta hur långt det är runt blomkrukan eller runt bordet?	
Klipper av däck och mäter sen. Mäter med linjal.	Mäter med måttband. Markerar på däck, kör hjulet ett varv, mäter sträckan.	Högre nivå	
		Nämner att omkretsen kan beräknas med hjälp av formeln $2\pi r \cdot n$.	

"Som kartläggare bör du vara 'på tå' hela tiden och ha 'känsla i fingertopparna' för att kunna ställa rätt följdfrågor och ligga lite före i tankegångarna. Du vill ju ge eleven möjlighet att få visa sitt kunskande och samtidigt får du inte pressa eleven för hårt så att den känner sig missnöjd."

Frågorna i materialet är lätta att ställa, men det krävs matematisk ämneskompetens att förstå och analysera elevens svar och resonemang samt att veta vilken följdfråga som är lämplig att ställa. I materialet finns följdfrågor såsom "Hur vet du det?", "Kan du göra på något annat sätt?" och så vidare som bidrar till att föra samtalet vidare och som ger möjlighet att få del av ännu mer av elevens kunskaper.

Under tiden som samtalet pågår dokumenterar kartläggaren elevens svar genom att markera i ett dokumentationsunderlag. I underlaget finns exempel på autentiska svar som har bedömts ligga på olika nivåer. Det finns också plats för kartläggarens anteckningar.

Vardagsspråk och skolspråk

Språket är situationsberoende och ordförrådet kan vara olika stort på vardagsspråk respektive skolspråk. Även om det naturligtvis finns stora överlappningar mellan ordförråden i flerspråkiga barns olika språk är delar av ordförrådet ofta starkare utvecklade i det ena eller andra språket. Det har att göra med att vissa erfarenheter är närmare förknippade med användning av ett språk än med ett annat. Om förstaspråket är elevens vardagsspråk har det troligtvis använts för kommunikation inom familjen. Ord som förknippas med livet i vardagen kommer troligtvis att vara djupare förankrade på förstaspråket. Elevens andraspråk kan vara det språk som eleven möter först när hen börjar skolan, det vill säga elevens skolspråk. (Lindberg, 2006). Skolspråket är det språk som krävs för att kunna beskriva, jämföra, argumentera, analysera och dra slutsatser. Ord och begrepp lärs inte in isolerat utan alltid i ett sammanhang. (Sjöqvist, 2013). För att utveckla ett skolspråk behövs tid. Forskning visar att för ett barn som är 8–11 år när hen invandrar tar det 2–5 år att utveckla ett skolspråk, medan det för en 12–15-åring tar 6–8 år att utveckla ett skolspråk. (Vetenskapsrådet, 2012).

Kartläggningen ska om möjligt göras på elevens starkaste språk. Vilket språk som är elevens starkaste ska ha framkommit i kartläggningen i steg 1. Eleven kan ha ett skolspråk och ett annat vardagsspråk. Detta kan medföra svårigheter i kartläggnings-situationen, om det språk som är elevens starkaste inte är det språk som kartläggningen görs på. I en utprövning mötte en kartläggare en elev vars vardagsspråk var swahili, medan skolspråket var engelska. Kartläggningen skedde på skolspråket då det inte fanns någon swahilitalande tolk tillgänglig. När eleven skulle svara på en följdfråga "Hur skulle du göra..." räckte inte ordförrådet på skolspråket. Eleven hade sannolikt kunnat svara mer utförligt på sitt vardagsspråk, ett språk som kartläggaren inte behärskade.

Varje språk har sitt unika sätt att uttrycka matematiska idéer på. Konsekvensen är att även om du känner till det matematiska registret på ett språk är det inte säkert att du gör det på ett annat. (Norén, 2010). I kartläggningen har det visat sig att vissa ord och begrepp har vållat problem vid tolkningen och inom olika språk är det olika typer av problem som kan uppstå. En följd av det har i kartläggningmaterialet varit att fokusera egenskaperna hos begrepp snarare än begreppens namn. Vissa ord i svenska språket har olika betydelser i vardaglig respektive matematisk kontext. Det kan därför vara så att den som agerar tolk endast behärskar ordet i sitt vardagsspråk och inte i skolspråket. Om ordet volym översätts i betydelsen "ljudstyrka" får frågan en helt annan innebörd än ordet har i det matematiska skolspråket. Ett annat exempel är spanskans cuarto, som betyder både rum och fjärdedel. Fler exempel på sådana ord, som förekommer i kartläggningmaterialet, är rymmer och udda. (Myndigheten för skolutveckling, 2007). Vissa begrepp har också visat sig sakna motsvarighet på andra språk. Ett exempel är begreppet omkrets som på vissa språk är synonymt med ordet runt. I tolkningen av begreppet blir frågans syfte därigenom "röjt".

Specialpedagogiskt perspektiv

Gruppen nyanlända elever är en heterogen grupp med mycket olika förutsättningar och behov. Det som är gemensamt är den korta tiden i svensk skola och det faktum att flertalet elever inte har kunskaper i det svenska språket. I den meningen är alla dessa elever att betrakta som elever som behöver extra stöd och hjälp. Det innebär inte att de per definition är i behov av särskilt stöd i meningen specialpedagogiska insatser. Naturligtvis kan även dessa elever vara i behov av ett sådant stöd, men vad nyanlända elever i allmänhet behöver är mer undervisningstid under de år som de hinner få utbildning i den svenska skolan. (Ds 2013:6).

I framtagningsprocessen av kartläggningmaterialet har Specialpedagogiska skolmyndigheten (SPSM) varit delaktiga, i syfte att anpassa materialet för elever med specialpedagogiska behov. Materialet har bedömts fungera väl för elever med specialpedagogiska behov. Anledningen är främst att bilden gör materialet konkret och att även annat konkret material kan användas till så gott som alla frågeställningar. Det är i större utsträckning situationen än materialet som måste anpassas. Det innebär till exempel att det är extra viktigt att eleven uppfattar situationen och relationen till kartläggaren som trygg. Här kan den flerspråkiga personalen spela en särskilt stor roll.

Förslag till diskussioner

1. Att göra kartläggningen i grupp

Under framtagningsprocessen har frågan om möjligheten att genomföra kartläggningen i grupp kommit upp. Anledningen kan vara att skolan tagit emot en grupp elever med samma modersmål och liknande bakgrund. Vilka skulle möjligheterna och begränsningarna med en sådan kartläggningssituation kunna vara?

2. Undvik att nämna ordet matematik

I materialet uppmanas kartläggaren att undvika att använda ordet matematik. Vilka för- och nackdelar kan det finnas med en sådan uppmaning?

3. Årskursplacering utifrån ålder eller visad kunskap

Hur påverkas årskursplaceringen om en 14-årig elev visar kunskap motsvarande en "typisk" elev i årskurs 3? Hur kan spridningen i en "typisk" klass se ut?

Referenser

- Dearing, R. (1994). *The National Curriculum and its Assessments: Final Report*. [Elektronisk]. London: School Curriculum and Assessment Authority.
- Ds 2013:6. *Utbildning för nyanlända elever*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Lindberg, I. (2006). Bedömning av skolrelaterat ordförråd. I M. Olofsson (red). *Symposium 2006: Bedömning, flerspråkighet och lärande*. (s. 83–107). Stockholm: HLS förlag.
- Myndigheten för skolutveckling. (2007). *Mer än matematik – om språkliga dimensioner i matematikuppgifter*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Norén, E. (2010). *Flerspråkiga matematikklassrum. Diskurser i grundskolans matematikundervisning*. Doktorsavhandling. Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Stockholms universitet.
- Norstedts ordböcker. www.ord.se. NE Nationalencyklopedin AB.
- OECD. (2017). <https://data.oecd.org/pisa/mathematics-performance-pisa.htm>.
- Queensland government. www.qld.gov.au/education/schools/student/pages/literacy.html.
- Regeringsbeslut I:5. (2013). *Uppdrag att genomföra integrationsinsatser inom skolväsendet*. Dnr U2013/1101/S. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- SFS 2010:800. *Skollagen*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Sjöqvist, L. (2013). När språket inte gör tanken rättvisa – att bedöma flerspråkiga elevers språk- och kunskapsutveckling. I L. Lindström, V. Lindberg & A. Pettersson (red). *Pedagogisk bedömning. Om att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap*. Tredje upplagan. (s. 59–81). Stockholm: Liber.
- Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2016). *Kartläggning av nyanlända elevers kunskaper* <https://bp.skolverket.se/web/kartlaggningsmaterial/start>.
- Vetenskapsrådet. (2010). *Nyanlända och lärande. En forskningsöversikt om nyanlända elever i den svenska skolan*. (Rapportserie 6:2010). Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Vetenskapsrådet (2012). *Flerspråkighet – en forskningsöversikt*. (Rapportserie 5:2012). Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Wales government. (2017). <http://learning.gov.wales/resources/learningpacks/mep/numeracy/understanding-numeracy/what-is-numeracy/>.

Bedömningsstöd utifrån autentiska situationer

Niklas Thörn och Katarina Kristiansson

Bakgrund

Matematikuppgifter utifrån autentiska situationer

Med matematikuppgift utifrån autentisk situation menar vi en uppgift vars kontext och frågeställning har sitt ursprung i en situation som kan uppstå i yrkeslivet eller samhällslivet. Alltså är inte kontexten skapad utifrån matematiken utan matematiken uppkommer genom den autentiska situationen, vilket inte är en vanligt förekommande tradition för matematikuppgifter (Hoyles, 2010). En autentisk situation i yrkeslivet skulle till exempel kunna vara när en yrkeschaufför ska planera en vägtransport utifrån EU:s regler för kör- och vilotider. I samhällslivet skulle en situation kunna vara när en privatperson ska kontrollera sin förifyllda deklaration från Skatteverket. Båda situationerna är troliga att ställas inför som yrkeschaufför respektive privatperson och båda situationerna kräver kunskaper i matematik.

Detta kapitel kommer att handla om två olika bedömningsstöd som använder sig av autentiska situationer från yrkesliv respektive samhällsliv.

Tidigare projekt med autentiska situationer

Tidigare har Skolverket utvecklat projekt med autentiska situationer för yrkesprogrammen. Ett projekt som Myndigheten för Skolutveckling tog initiativ till och som också berör matematikämnet var projektet MyrA (Matematik i Yrkesämnena). Det var ett samarbete mellan dåvarande Myndigheten för Skolutveckling (MSU), PRIM-gruppen och Växjö universitet. Syftet med projektet var att stimulera till en samverkan kring bedömning av elevers kunskaper i matematikämnet kopplat till karaktärsämnena på gymnasieskolans yrkesförberedande program. Samverkan gällde både mellan lärare i ämnet matematik och lärare i yrkesämnena och mellan lärare och elever. MyrA skulle bidra till att eleverna fick nya möjligheter att visa sina kunskaper inom såväl matematik som yrkesämnena i de sammanhang som programmen med yrkesämnena förberedde för. Elevernas visade kunskaper kunde sedan bedömas både i yrkesämnet och i matematik.

Bedömningsstöd för matematik 1a

Syfte med bedömningsstöd

Enligt Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011 (Gy11) (Skolverket, 2011) är Matematik 1a den kurs i ämnet matematik som ska ingå i samtliga yrkesprogram. Under kursens centrala innehåll finns beskrivet vad undervisningen i Matematik 1a ska behandla för att ge eleverna förutsättningar att utveckla sina matematiska förmågor. Vissa delar av det centrala innehållet ska anpassas utifrån karaktärsämnenas behov för respektive yrkesprogram. Ett exempel på detta är att undervisningen i kursen bland annat ska behandla följande centrala innehåll:

Hur matematiken kan användas som verktyg i behandlingen av omfångsrika problemsituationer i karaktärsämnena. Matematikens möjligheter och begränsningar i dessa situationer. – Gy11

Det nationella provet för matematik 1a ska vara gemensamt och vända sig till samtliga yrkesprogram. Det medför att elevernas kunskaper (förmågor) endast provas på de delar av det centrala innehållet som är gemensamt för samtliga program, alltså de delar som inte specifikt riktar sig till karaktärsämnena för respektive yrkesprogram. PRIM-gruppen har av Skolverket fått i uppdrag att utveckla ett bedömningsstöd som ska fungera som ett komplement till nationella provet genom att ge möjlighet att pröva elevers förmågor på de delar av det centrala innehållet som ska anpassas utifrån karaktärsämnenas behov.

Framtagningsprocessen

Arbetet med att ta fram stödet började med att en grupp matematiklärare och yrkeslärare gemensamt har fått formulera uppgifter/problem som omfattar de yrkesämnena som eleverna läser under första året i gymnasieskolan samt de delar av det centrala innehållet i matematik 1a som har kopplingar till karaktärsämnet. Eftersom eleverna vanligtvis läser kursen matematik 1a under det första läsåret, är det en utmaning vid uppgiftskonstruktionen att konstruera uppgifter som inte kräver några djupare karaktärsämneskunskaper men som ändå består av en kontext som är relevant och realistisk för det aktuella yrkesprogrammet. Programinriktningarna, vilka ger djupare kunskaper inom karaktärsämnet, läser eleverna vanligtvis under det andra läsåret. I första hand ska uppgifterna pröva matematikkunskaper och inte yrkesterminologi eller faktakunskaper inom yrket.

Uppgifterna som lärargruppen formulerade har prövats ut i klasser med elever som går på det yrkesprogram som uppgiften riktar sig till. Utprövningen kan visa att vissa förtydliganden av uppgiften behövas göras. Om uppgiften måste omformuleras i större utsträckning provas den ut på nytt. De elevarbeten som utprövningen ger ligger till grund för en bedömningsmatris. Bedömningsmatrisen ska ge läraren stöd att bedöma vilka förmågor och vilka kvaliteter (E, C eller A) elevernas arbete med uppgifterna visar.

Kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå

Läroplan och syfte med bedömningsstöd

Den grundläggande nivån i den kommunala vuxenutbildningen kan delas in i fyra delkurser och bedömningsstödet riktar sig till den avslutande delkursen eller slutet av kursen om den läses som en helhet. Bedömningsstödet syftar till att stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning. Det kan också bidra till att konkretisera kursplanerna och till en ökad måluppfyllelse för eleverna. Bedömningsstöd för kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå finns också för ämnena engelska, samhällskunskap, svenska och svenska som andraspråk. (Skolverket, 2012).

Läroplanen för den kommunala vuxenutbildningen på grundläggande nivå är mycket lik den för grundskolan. En stor skillnad är dock att läroplanen vänder sig till vuxna och i kursplanen betonas att eleverna ska utveckla kunskaper om matematik och matematikens användning i vardags- och samhällsliv, fort-

satta studier och arbetsliv. Bedömningsstödet lägger tonvikt vid uppgifter som har en kontext utifrån vardagslivet och arbetslivet, eftersom det riktar sig till en målgrupp där dessa kontexter är särskilt relevanta. Målgruppen för bedömningsstödet består till största del av studerande som inte gått i grundskolan i Sverige.

Framtagningsprocessen

I utvecklandet av bedömningsstödet har olika referensgrupper med lärare varit delaktiga. Samtliga uppgifter är utprovade på elever som läser matematik på grundläggande nivå. Vid utprovningar har eleverna och lärarna fått tycka till om uppgifterna och framförallt på språket i dem. I de fall som det framkommit att det var många ord eleverna frågade om har uppgifterna kompletterats med ordlistor. Dessa ordlistor innehåller bara sådana ord som inte avslöjar det matematiska innehållet. Lärare uppmanas att förklara även andra ord som eleverna eventuellt frågar om, men det betonas tydligt i bedömningsstödet vilken typ av ord som får förklaras och på ett sätt som gör att uppgifterna fortfarande prövar det som de avser att pröva. Många av uppgifterna har kompletterats med illustrationer för att förtydliga kontexten.

Exempel på uppgifter i bedömningsstöden

Matematik 1a

En uppgift kan användas i ett eller flera program. Uppgiften nedan riktar sig till *Naturbruksprogrammet* och har integrerat innehåll från kurserna *Djurens biologi* och *Djurhållning* i ämnena *Biologi – naturbruk* och *Djur*.

Lagring av gödsel (mjölkkor)

För att undvika läckage av näringsämnen som kan orsaka övergödning måste alla som har nötkreatur ha en gödselplatta eller en gödselbrunn för att förvara gödseln. Enligt schablonvärden från Jordbruksverket producerar en mjölkko som ger cirka 8 000 kg mjölk/år ungefär 14 m³ fastgödsel under ett år. I tabellen nedan kan du se de krav på lagringskapacitet för gödsel som gäller för olika djurslag. 1 ko = 1 djurenhet.

Områden utanför känsliga områden		
Antal djurenheter	Nöt, hästar, får och getter	Annan djurhållning
Fler än 100	8 mån	10 mån
Fler än 10 upp till 100	6 mån	10 mån
Fler än 2 upp till 10	Inga generella bestämmelser	Inga generella bestämmelser

Källa: Jordbruksverket

1. Du har en gård med 105 mjölkkor.

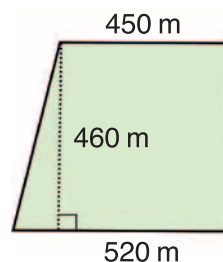
a. Hur många kubikmeter (m^3) fastgödsel måste du då ha lagringskapacitet för?

b. Du ska lagra gödseln till en höjd av 1,5 m på en gödselplatta. Ge ett förslag på lämpliga inre mått till en gödselplatta.



c. Gödselplattan behöver ha 15 cm tjocka väggar och botten. Den ska vara öppen fram (se bild). Hur mycket betong går det åt för att tillverka gödselplattan? I din lösning får du gärna rita en skiss på plattan eller delarna och där ange måtten.

2. Som spridningsareal för mjölkkor är ett riktvärde minst 1,6 ha odlad mark/ko. En av åkrarna som du kan sprida gödsel på har följande mått.
Hur många kor har denna åker som spridningsareal?

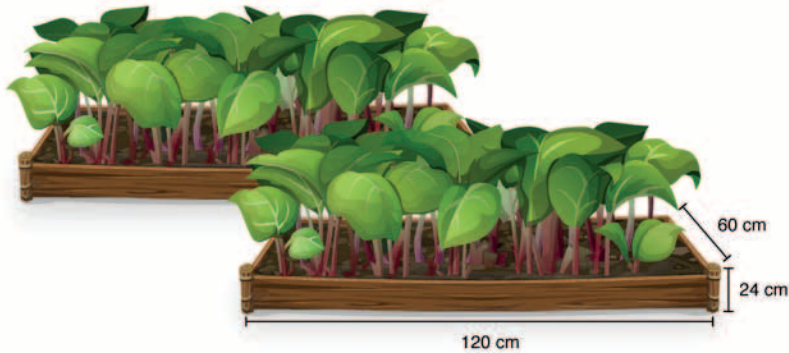


Kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå

Uppgifterna är indelade i olika teman och varje uppgift består av flera deluppgifter. Vissa uppgifter har en tydlig progression i svårighetsgrad, medan svårighetsgraden i andra kan variera. Eleverna uppmanas i en inledande text att försöka lösa samtliga deluppgifter.

Odlingslåda

Maria ska bygga två odlingslådor. Bilden visar vilka mått en låda har. En låda har fyra sidor och en botten.



- a) Brädorna är 120 mm breda. Hur många meter brädor behöver Maria till de två odlingslådorna?
- b) Hur stor volym har *en* låda?

Maria vill odla grönsaker i sina lådor och ska köpa jord.

- c) Maria väljer mellan tre olika alternativ. Vilket alternativ är billigast?

Alternativ 1: Köpa färdigblandade säckar planteringsjord med gödsel.
1 säck kostar 90 kr och innehåller 50 liter.

Alternativ 2: Köpa färdigblandade säckar grönsaksjord med gödsel.
1 säck kostar 80 kr och innehåller 40 liter.

Alternativ 3: Köpa säckar med planteringsjord utan gödsel och istället blanda i kogödsel.
5 % av volymen ska vara gödsel.
1 säck planteringsjord utan gödsel kostar 49 kr och innehåller 40 liter.
1 säck kogödsel kostar 50 kr och innehåller 40 liter.

Lärarinformation och bedömning

Under stora delar av framtagningsprocessen av uppgifterna till respektive bedömningsstöd har yrkeskunniga och/eller ämneskunniga personer varit delaktiga. Detta för att uppgifterna i så stor utsträckning som möjligt ska ha sin kontext utifrån autentiska situationer. Bedömningen av visade kunskaper på elevlösningar av uppgifterna är konstruerad för att ha hög synlighet. Med synlighet avses i vad mån bedömningen grundar sig på tydliggjorda och väl avgränsade grunder (Carlsson, Gerrevall & Pettersson, 2013).

I båda bedömningsstödens lärarinformationer anges vilka hjälpmedel och vilken tidsåtgång som bedömningen är utformad efter. Uppgifterna kategoriseras

utifrån centralt innehåll, förmågor och nivåer i kunskapskraven som varje uppgift ger eleverna möjlighet att visa sin kunskap inom. I informationen finns även bedömningsanvisningar med godtagbara svar, bedömningsmatris och bedömda elevlösningar.

Kategorisering av centralt innehåll, bedömningsanvisning med godtagbara svar och bedömningsmatris exemplifieras med uppgiften *Lagring av gödsel (mjölkkor)*. Uppgiften ger eleverna möjlighet att visa kunskaper på E- och C-nivå.

Centralt innehåll kurs 1a

Uppgiften ger möjlighet att visa kunskaper från följande centrala innehåll i matematik:

Uppgift	Nivå			Taluppfattning aritmetik o algebra				Geometri				Samband o förändring				Sannolikhet o statistik	Problemlösning			
	E	C	A	A1	A2	A3	G1	G2	G3	G4	F1	F2	F3	F4	S1	S2	P1	P2	P3	P4
Lagring av gödsel (mjölkkor)	X	X		X	X		X	X	X	X			X				X	X	X	

Godtagbara svar

Elevsvaren kan avvika och ändå anses som godtagbara.

1. a)	980 m³
1. b)	Lämpligt mått angivet, t. ex (1,5 m × 25 m × 26,2 m) (1,5 m × 15 m × 43,6 m) (1,5 m × 6,6 m × 100 m)
1. c)	Lämpligt mått angivet, t. ex 118 m³ (ges av bredd 25 m) 124 m³ (ges av bredd 15 m)
2.	14 kor

Genomförande och bedömning av elevlösningar

Genomförandet av en uppgift

Varje uppgift ska genomföras individuellt och vid ett tillfälle av eleverna vars kunskaper ska prövas. För bedömningsstödet till matematik 1a kan uppgifterna användas som ett bedömningsstöd under hela kursen och återanvändas på nya elevgrupper. När under kursens gång som uppgifterna ska genomföras avgörs utifrån vilket centralt innehåll som har behandlats i kursen. För bedömningsstödet för grundläggande nivå i vuxenutbildningen ska bedömningsstödet användas i slutet av delkurs 4 eller i slutet av kursen om den läses som en helhet.

Bedömningsmatris

	E	C	A
Begrepp	Eleven visar förståelse för begreppet volym vid bestämning av gödselkompostens mått eller vid bestämning av betongvolymen.		
Procedur	Eleven gör några beräkningar, som exempelvis behövd lagringskapacitet och åkerns area.	Eleven gör flertalet beräkningar och enhetsbyten i deluppgifterna (1a, 1b, 1c och 2).	
Problemlösning	Eleven visar med en godtagbar skiss eller med ett godtagbart uttryck hur åtgången av betong ska beräknas.	Eleven visar med en skiss eller ett uttryck, där hänsyn tagits till plattans hörn, hur åtgången av betong ska beräknas.	
Matematiska modeller			
Matematiska resonemang			
Kommunikation	Redovisningen är möjlig att förstå och följa men kan innehålla vissa brister. Den omfattar minst två av deluppgifterna (1a, 1b, 1c och 2).	Redovisningen är möjlig att följa och omfattar huvuddelen av deluppgifterna (1a, 1b, 1c och 2). Det matematiska språket är acceptabelt och enheter anges.	

Bedömning av elevprestationer

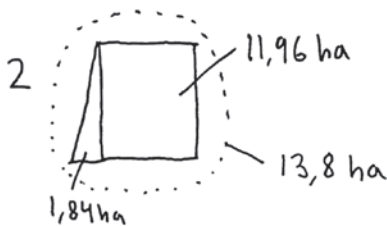
Bedömningen av varje elevprestation går ut på att avgöra i vilken grad eleven visat de kunskapskvaliteter som är beskrivna i matrisen. Varje skrivelse i matriserna utgår ifrån att det som elevlösningen visar ska vara korrekt för att motsvarande kunskapsnivå ska anses vara uppnådd. Exempelvis innebär skrivningen ”*Eleven gör flertalet beräkningar och enhetsbyten i deluppgifterna.*” att de beräkningar och enhetsbyten som i detta fall ska bedömas, ska vara korrekta för att motsvarande kunskapsnivå ska anses vara uppnådd.

Följande tre elever har genomfört uppgiften Lagring av gödsel (mjölkkor) och deras prestationer har blivit bedömda utifrån tillhörande bedömningsmatris.

Elevlösning 1

Lagring av gödsel

- 1a) 1 mjölkko ger 14 m^3 fastgödsel på 1 år
 $105 \cdot 14 = 1470\text{ m}^3$ ska jag ha lagringskapacitet för
- b) Vet ej
- c) vet ej



$$\frac{13,8}{1,6} = 8,625 \text{ kor som spridningsareal}$$

	E	C	A	
B				
P				
PI				
M				
R				
K				

Kommentar: Elevlösningen visar inga beräkningar korrekt eller förståelse för begreppet volym (1b och 1c). Elevlösningen anses därför inte omfatta minst två deluppgifter.

Elevlösning 2

1. a) 1470 m^3

b) $38 \times 28 \text{ m} = 1596 \text{ m}^3$

c) 610 m^3

2. $450 \times 460 \text{ m} = 20,7 \text{ ha}$

$520 - 450 \text{ m} = 70 \text{ m}$

$\frac{460 \times 70 \text{ m}}{2} = 1,6 \text{ ha}$

$20,7 + 1,6 = 22,3 \text{ ha}$

$\frac{22,3}{1,6} = 13,9 \quad 14 \text{ kor}$

	E	C	A	
B				
P	→			Gör några korrekta beräkningar
PI				
M				
R				
K				

Kommentar: Elevlösningen visar korrekta beräkningar i deluppgift 2 men visar inte förståelse för begreppet volym (1b och 1c). Elevlösningen anses därför inte omfatta minst två deluppgifter.

Lagring av gödsel

1. a) $105 \cdot 14 = 1470 \text{ m}^3$ $\frac{1470}{12} \cdot 8 = 980 \text{ m}^3$

Svar: Du måste kunna lagra
minst 980 m^3 fästgödsel

b) $x = \text{längd}$ $1,5 \cdot x \cdot y = 980$
 $y = \text{bredd}$

$$x \cdot y = \frac{980}{1,5}$$

$$x \cdot y = 653,33$$

$$\sqrt{653,33} = 25,56 \approx 25,6$$

$$25,6 \cdot 25,6 \cdot 1,5 = 983,04$$

$$983,04 > 980 \text{ m}^3$$

Svar: Höjd: $1,5 \text{ m}$

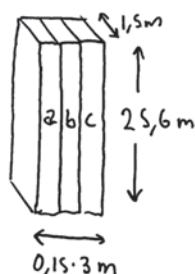
Bredd: $25,6 \text{ m}$

Längd: $25,6 \text{ m}$

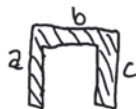
Volym: 983 m^3

Detta är lämpliga mått då du har kapacitet att lagra det du producerar med ett extra utrymme som inte är överdrivet stort.

1. c)



$$\text{V\ddot{a}ggar: } (0,15 \cdot 3) \cdot 26,5 \cdot 26,5 = 17,28 \text{ m}^3$$



$$\text{Botten: } 25,6 \cdot 25,6 \cdot 0,15 = 98,30 \text{ m}^3$$

$$\text{Totalt: } 17,28 + 98,30 = 115,58 \text{ m}^3$$

Svar: Du behöver 115,58 m³ betong

2.

$$460 \cdot 450 + \frac{(520 - 450) \cdot 460}{2} = 223100 \text{ m}^2$$

$$\frac{223100 \text{ m}^2}{10000} = 22,31 \text{ ha}$$

$$\frac{22,31 \text{ ha}}{1,6} = 13,94 \approx 14$$

Svar: Du behöver 14 kor

	E	C	A	
B	→			
P	→	→		
PI	→			Visar godtagbar skiss
M				
R				
K	→	→		

Kommentar: Elevlösningen visar korrekta beräkningar och enhetsbyten i hela uppgiften och visar därmed förståelse för begreppet volym. Elevlösningen anses därför omfatta minst två deluppgifter och det matematiska språket anses acceptabelt. Elevlösningen visar en godtagbar skiss då inte hänsyn till plattans hörn tas.

Förslag till diskussioner

1. Vilka för- och nackdelar finns det med att knyta matematikuppgifter till autentiska situationer?
2. Hur kan ett samarbete mellan matematiklärare och yrkeslärare organiseras? Vilka hinder kan finnas?

Här hittar du materialet

Materialet till bedömningsstöden för matematik 1a och kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå finns på Skolverkets webbplats. För att komma åt materialet krävs inloggningsuppgifter och behörighet till ämnet eller kursen. Det är skolledning/huvudman som förser lärarna med inloggningsuppgifter.

Referenser

Carlsson, C., Gerrevall, P. & Pettersson, A. (2013). *Bedömning av yrkesrelaterat kunnande*. Stockholm: Liber.

Hoyles, C. (red). (2010). *Improving mathematics at work: the need for techno-mathematical literacies*. Abingdon, Oxon: Routledge.

Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). *Kommunal vuxenutbildning på grundläggande nivå: kursplaner och kommentarer*. Stockholm: Skolverket.

Författarpresentationer

Redaktörer

Maria Nordlund är provutvecklare och har mellan åren 2007 till 2019 varit projektledare för PRIM-gruppen vid institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet. Hennes projektledarskap har inneburit ett övergripande ansvar för all verksamhet inom PRIM-gruppen, bland annat nationella prov i matematik för grundskolan och matematik 1 för gymnasieskolan, internationella studier som PISA och TIMSS, kommunala utvärderingar som UiM (Utvärdering i matematik), bedömningsstöd i matematik och yrkesämnen samt kartläggningsmaterial för nyanlända. Sedan 1997 arbetar hon med utvärderingar inom olika ämnesområden och på olika nivåer samt kartläggningsmaterial för nyanlända. Nordlund har publicerat artiklar i *Nämnamnaren* och är en av redaktörerna till boken ”Alla människors möte borde vara så” – Texter om bedömning. Hon har examen inom samhällsvetenskap med nationalekonomi och sociologi som huvudinriktning.

Astrid Pettersson är professor i pedagogik med inriktning mot utvärdering och matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet. Hon var projektledare för PRIM-gruppen från och med 1992 till och med 2006. Hon är från 1997 vetenskaplig ledare för forskningsgruppen Bedömning av kunskap och kompetens vid Stockholms universitet och var under åren 2007–2013 föreståndare för den VR-finansierade nationella forskarskolan i pedagogisk bedömning. Hon har varit ledamot av Matematikdelegationen. Pettersson har sedan den internationella studien PISA:s första undersökning 2000 och fram till och med 2015 års undersökning varit ansvarig på institutionsnivå för matematikdelen i Sverige. Hon har också lett forskningscirklar i bedömning för verksamma lärare. Hennes forskningsintresse har inriktats främst mot kunskapsutveckling i matematik och hur elever löser uppgifter i matematik. Hon tilldelades Lärarstiftelsens högre särskilda stipendium 2016 för ”sina insatser inom forskning och utredning på det pedagogiska området som på ett framgångsrikt sätt varit till gagn för lärarkåren”. Hon är en av redaktörerna till boken *Lärares bedömningsarbete Förutsättningar Villkor Agens utgiven av Natur och Kultur*. Hon är legitimerad lärare bland annat i matematik för årskurs 4–9 och gymnasieskolan. Hon har främst undervisat på grundskolans högstadium.

Bokens övriga författare

Erica Aldenius är provutvecklare och har utvecklat ”Hitta matematiken” – ett kartläggningsmaterial för förskoleklassen och ”Gilla matematik” – ett bedömningsstöd för årskurs 1–6 i grundskolan. Hon är sedan 2019 provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 3. Aldenius är medförfattare till *Nämnamnaren* artikeln ”Elevers skriftliga räknemetoder i addition och subtraktion” som behandlar elevers användande av skriftliga räknemetoder i de nationella proven i årskurs 3 och hon har medverkat i den internationella studien PIRLS. Aldenius är legitimerad lärare bland annat i matematik för förskoleklassen och årskurs 1–7 samt speciallärare med inriktning mot matematikutveckling. Hon har lång erfarenhet av undervisning främst på lågstadiet i grundskolan.

Margareta Enoksson arbetade under flera år i PRIM-gruppen som provutvecklare och var provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 9. Hon har dessutom arbetat med bedömningsstöd i grundläggande vuxenutbildningen samt med Skolverkets kommentarmaterial i matematik. Hon har också medverkat i de internationella studierna PISA och TIMSS. Enoksson undervisar sedan flera år inom lärarutbildningen i matematikämnets didaktik och bedömning samt för blivande specialpedagoger och speciallärare och i olika lärarlyftskurser. Hon har bland annat skrivit rapporten "Innehåll i behov av särskilt stöd. Erfarenheter från lesson/learningstudies i matematik". Enoksson är legitimerad lärare i bland annat matematik för grundskolan årskurs 4–9 och gymnasieskolan samt legitimerad speciallärare. Hon har mycket lång lärarerfarenhet och arbetar nu som lärare och speciallärare med inriktning matematik, företrädesvis på grundskolans högstadium.

Niclas Evén är provutvecklare och arbetar främst med de nationella proven för årskurs 9. Han har även medverkat i utvecklingen av de nationella proven för matematik 1 och medverkat i arbetet med proven för matematik 2 för gymnasieskolan samt i framtagandet av bedömningsstöd för gymnasieskolans matematik 1 med yrkesinriktning. Sedan 2018 är han projektansvarig i PRIM-gruppen för digitaliseringen av de nationella proven i matematik. Han har också medverkat i den internationella studien PISA. Evén är legitimerad lärare bland annat i matematik för grundskolans årskurs 3–9 och gymnasieskolan. Han har haft sin huvudsakliga lärargärning i gymnasieskolan.

Yvonne Franzon har utvecklat "Nationellt bedömningsstöd i taluppfattning för årskurs 1–3", "Hitta matematiken" samt "Gilla matematik". Hon arbetar också med att utveckla de nationella proven i matematik för årskurs 3. Förutom att hon arbetar i PRIM-gruppen är hon förstelärare i matematik på Aspuddens skola. Hon har skrivit artiklar i Nämnaren, en som beskriver bedömningsstödet för grundsärskolan och en annan om elevers användande av skriftliga räknemetoder i de nationella proven årskurs 3. Franzon är legitimerad förskollärare och legitimerad lärare för årskurs 1–6.

Katarina Kristiansson är provutvecklare och provansvarig för de nationella proven för matematik 1. Dessutom har hon ansvarat för att utveckla olika typer av bedömningsstöd, såsom kommentarmaterial för kunskapskraven i matematik för grundskolan och bedömningsstöd i matematik för grundläggande nivå i kommunala vuxenutbildningen. Hon har även medverkat i framtagandet av bedömningsstöd för gymnasieskolans matematik 1 med yrkesinriktning samt i den internationella studien PISA. Hon har undervisat på lärarutbildningen i framförallt bedömningskurser inom matematikämnets didaktik. Kristiansson är legitimerad lärare i bland annat matematik för grundskolan årskurs 6–9 och gymnasieskolan. Hon har lång erfarenhet av undervisning både i gymnasieskolan och grundskolan.

Anette Nydahl är provutvecklare för de nationella proven i årskurserna 6 och 9. Hon är provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 6 och har tidigare

också varit provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 9. Hon har lång erfarenhet av att vara med i referensgrupper för de nationella proven i årskurs 9 och har varit handledare för matematiklyftet. Hon var PRIM-gruppens representant i Skolverkets kursplanearbete för programmering. Hon medverkar också i den internationella studien TIMSS. Nydahl är legitimerad lärare i bland annat matematik för grundskolans årskurs 4–9 och har lång lärarerfarenhet från grundskolan.

Inger Ridderlind är universitetsadjunkt vid Stockholms universitet. Hon är kursansvarig i både grundlärautbildningen samt speciallärautbildningen. Hon arbetar i PRIM-gruppen sedan år 2000 med olika uppdrag, främst som provutvecklare för de nationella proven i årskurs 6 och årskurs 9. Hon har medverkat i utvecklingen av flera material, bland annat "Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9". Hon har också skrivit flera tidskriftsartiklar. Ridderlind har en masterexamen i matematikämnets didaktik och har skrivit "Elevperspektiv på bedömning för lärande". Hon har medverkat i olika projekt om bedömning bland annat MiMa-projektet (Min egen Matematik). Ridderlind är legitimerad lärare med behörighet att undervisa i matematik i årskurs 3–9 i grundskolan och i gymnasieskolan och har lång lärarerfarenhet från grundskolan. Hon är också speciallärare och har arbetat som matematikutvecklare på kommunal nivå.

Heléne Sandström är provutvecklare och tidigare provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 3. Hon arbetar även med PRIM-gruppens kommunala utvärderingar i matematik (UiM) och har medverkat i den internationella studien TIMSS. Hon har också arbetat med utveckling av materialen "Kartläggning av nyanlända elevers kunskaper" i både numeracitet och matematik. Hon var med i det initiala arbetet med att ta fram mål för årskurs 3 och har erfarenhet av undervisning inom lärautbildningen. Sandström har mycket lång erfarenhet som lågstadielärare och har varit rektor för förskola och grundskola årskurs 1–6.

Anette Skytt har arbetat i PRIM-gruppen och varit provansvarig för de nationella proven i matematik för årskurs 3 samt projektansvarig för materialen "Nationellt bedömningsstöd i taluppfattning för årskurs 1–3" samt "Gilla matematik". Hon har även varit en av medarbetarna i framtagandet av materialet "Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9". Skytt har under lång tid varit matematikutvecklare på kommunal nivå. Hon är lågstadielärare med behörighet att undervisa i bland annat matematik för årskurs 1–9 och har mycket lång lärarerfarenhet från lågstadiet i grundskolan.

Samuel Sollerman är från och med 2019 föreståndare för PRIM-gruppen. Han har arbetat med den internationella studien PISA sedan 2010 och var ämnesexpert i matematik för PISA-undersökningarna 2012 och 2015 i Sverige. Från och med PISA-undersökningen 2018 är han projektansvarig på institutionsnivå för matematiken i den svenska delen av PISA. Han är även projektansvarig för matematiken i den internationella studien TIMSS i Sverige från och med TIMSS-undersökningen 2019.

Han har tidigare varit provansvarig för de nationella proven för matematik 1 för gymnasieskolan. Hans forskningsintresse ligger inom områdena validitet i storskaliga mätningar och aspekter av interbedömarreliabilitet. Sollerman har skrivit publikationer som handlar om hur lika lärare bedömer elevlösningar och om samstämmigheten mellan svenska styrdokument och internationella studier som PISA och TIMSS. Han har under 2019 disputerat på avhandlingen ”Kan man räkna med PISA och TIMSS? Relevansen hos internationella storskaliga mätningar i matematik i en nationell kontext.”. Han har en bakgrund som gymnasielärare i bland annat matematik och har lärarerfarenhet från gymnasieskola, kommunal vuxenutbildning och lärarutbildning.

Niklas Thörn är provutvecklare och arbetar främst med de nationella proven för matematik 1 för gymnasieskolan. Han har även medverkat i arbetet med proven för matematik 2 för gymnasieskolan och de nationella proven i matematik för årskurs 9. Han är projektansvarig för bedömningsstöd för gymnasieskolans matematik 1 med yrkesinriktning och har medverkat i den internationella studien PISA. Han har undervisat i bedömningskurser på lärarutbildningen. Thörn är legitimerad lärare i bland annat matematik för grundskolan årskurs 3–9 och gymnasieskolan. Han har undervisningserfarenhet från både grundskola och gymnasieskola.

Rapporter i serien Matematikdidaktiska texter

L Alm, L Björklund Boistrup, T Englund (red), E-S Källgård, E Norén, G Olofsson, K-A Paulsson, A Pettersson (red), T Tambour (red), B Ulin & M t Vehn. (2007). *Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 1.*

T Englund (red), L Engström, I Ingemansson, N Larson, K-A Paulsson, I O Persson, J Petersson, A Pettersson (red) & T Tambour (red). (2007). *Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 2.*

I-M Parszyk (2009). *Är det jag eller matteläraren som inte fattar?* Unga vuxna väletablerade och interner med utländsk familjebakgrund berättar om matematikens betydelse för självkänslan i (skol)livet. Matematikdidaktiska texter. Del 3.

A Pettersson, G Olofsson, K Kjellström, I Ingemansson, S Hallén, L Björklund Boistrup & L Alm. (2010). *Bedömning av kunskap – för lärande och undervisning i matematik.* Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 4.

M Enoksson. (2014). *Innehåll i behov av särskilt stöd.* Erfarenheter från lesson/learningstudies i matematik. Matematikdidaktiska texter. Del 5.

I Ridderlind. (2014). *Elevperspektiv på bedömning för lärande.* Matematikdidaktiska texter. Del 6.

M Nordlund & A Pettersson (red). (2019). *Bedömning i matematik – i lärandets och undervisningens tjänst.* Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 7.

Rapporter från PRIM-gruppen

B-O Ljung (1987). *Klasslärarkandidaters räkneförmåga*.

R Sandberg & B-O Ljung (1990). *Musikämnet i nationell utvärdering*. Teoretisk referensram, utvärderingsmodell och praktiskt genomförande.

B-O Ljung (1990). *Matematiken i nationell utvärdering*. Vad barnen tycker om matematik i årskurs 5.

E Oscarsson, B Rosén & B-O Ljung (1990). *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på tvååriga gymnasielinjer*.

B-O Ljung & A Pettersson (1990). *Matematiken i nationell utvärdering*. Kunskaper och färdigheter i årskurserna 2 och 5.

G Ljung (1991). *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1985–1989*. Analys av innehåll och resultat.

B-O Ljung, E Oscarsson & B Rosén (1991). *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gymnasielinjer*.

A Pettersson (red.) (1994). *Centrala prov i matematik på SE-linjerna 1989–1993*. Analys av innehåll och resultat.

H Westin (1994). *Matematiken i nationell utvärdering*. Analys av gruppuppgifter genomförda av elevgrupper i årskurs 9 vårterminen 1992.

A Pettersson (red.) (1995). *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1990–1994*. Analys av innehåll och resultat.

K Kjellström (1996). *Matematik A*. Resultat och analyser av det första nationella kursprovet i matematik.

K Ek & A Pettersson (1996). *Matte är ett härligt ämne – men hur räcker jag till?* Analys av lärarnas svar i de nationella utvärderingarna i matematik 1989, 1992 och 1995.

A Pettersson (1997). *Matematiken i utvärdering av grundskolan 1995*. Analys av elevernas arbeten med mer omfattande matematikuppgifter i åk 9.

H Westin (1997). *Matematiken i utvärdering av grundskolan 1995*. Analys av elevernas lösningar på standardprovet i åk 9.

H Westin (1999). *Farväl standardprov*. Standardproven i matematik 1973–1997 för åk 9. Jämförelse av resultat på uppgifter som återkommit genom åren.

PRIM-gruppen (1999). *PRIM-gruppens matematikuppgifter för årskurs 9 använda vid prov och utvärderingar på nationell nivå 1987–1999*.

B-O Ljung (2000). *Standardproven – 53 år i skolans tjänst*.

G Svingby & S Svingby (red.) (2001). *Bedömning av kunskap och kompetens*. Konferensrapport från konferens om bedömning av kunskap och kompetens 17–19 november 1999.

S Lindqvist (2003). *Elevers uppfattningar och upplevelser av bedömning i matematik i skolår 5*.

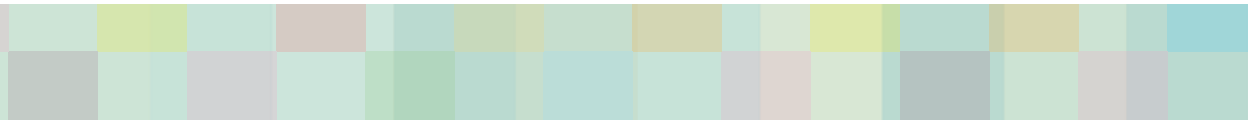
R Mannerfeldt (2004). *Fatta att man kan vara trött!* Skolerfarenheter och skolprestationer bland elever med björkpollenallergi i skolår 8.

B-O Ljung (2005). *Karriär på prov*. Mitt LHS i ett femtioårsperspektiv.

L de Ron & M Feldt (2006). *Bedöma och lära i hem- och konsumentkunskap*.

G Olofsson (2006). *Likvärdig bedömning?* En studie av lärares bedömning av elevarbeten på ett nationellt prov i matematik kurs A.

En mer fullständig förteckning över PRIM-gruppens publikationer finns på www.su.se/primgruppen/



Institutionen för matematikämnets
och naturvetenskapsämnenas didaktik,
Stockholms universitet



Stockholms
universitet

ISBN: 978-91-979516-6-1