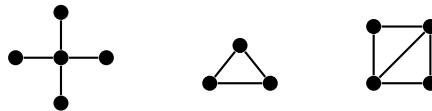


Obs: nedan lösningar är förslag; matematik handlar till stor del om resonemang och förklaringar, och det kan finnas många olika korrekta sätt att förklara något på.

Samma grad

En *graf* är en samling punkter (som kallas *hörn*) där vissa av punkterna är ihopkopplade med linjer (som kallas *kanter*).



Graden av ett hörn är antalet linjer som möts i den pricken – alltså hur många andra hörn den är kopplad till.

Visa att det i varje graf (oavsett hur hörnen är kopplade med kanter) alltid finns minst två hörn som har samma grad.

Strategi: postfacksprincipen (pigeonhole principle)!

När man har en massa objekt (här: hörn) och ska visa att två av dem har en viss egenskap gemensamt (här: grad), då är postfacksprincipen en bra sak att tänka på. Den säger att om man fördelar n objekt mellan m ”fack”, och $n > m$, så måste minst två av objekten hamna i samma fack.

Låt oss kalla antalet hörn i grafen för n , och anta att $n \geq 2$ (att grafen har åtminstone två hörn borde ha stått uttryckligen i frågan!). Vilka möjliga grader kan ett hörn ha? Varje hörn kan ha högst $n - 1$ kanter, dvs. grad högst $n - 1$, och kan ha grad minst 0 (om hörnet inte är kopplat till något annat hörn). Alltså är de möjliga graderna $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Det är n möjliga grader totalt, men i en given graf kan det inte finnas både ett hörn med grad 0 och ett hörn med grad $n - 1$, eftersom det skulle innebära att det ena hörnet inte är kopplat till något annat hörn, medan det andra hörnet är kopplat till alla andra hörn, inklusive det första. Alltså finns det högst $n - 1$ möjliga grader som hörnen kan ha (antingen $0, 1, 2, \dots, n - 2$ eller $1, 2, \dots, n - 1$), men det finns n hörn, så enligt postfacksprincipen måste minst två av hörnen ha samma grad.

Extra: vi definierade kanter som (raka) linjer här, vilket innebär att det inte kan finnas mer än en kant mellan två hörn, och att det inte kan finnas kanter som börjar och slutar i samma hörn. Om vi tillåter flera kanter mellan hörn, eller en kant från ett hörn till sig självt, stämmer påståendet fortfarande då?

Större potens

Vilket tal är störst: 99^{100} eller 100^{99} ?

Strategi: prova mindre tal!

Dessa tal är så stora (nästan 200 siffror långa) att det är svårt att jämföra dem direkt. Låt oss testa med mindre tal för att få någon sorts känsla:

n	n^{n+1}	$(n+1)^n$
1	$1^2 = 1$	$2^1 = 2$
2	$2^3 = 8$	$3^2 = 9$
3	$3^4 = 81$	$4^3 = 64$
4	$4^5 = 1\,024$	$5^4 = 625$

För $n = 1$ och $n = 2$ är det $(n+1)^n$ som är pyttelite större än n^{n+1} , men sedan verkar det vända. Talen verkar inte heller ligga särskilt nära varandra, vilket kan hjälpa oss i vår lösning: vi behöver kanske inte vara jättenoggranna i uppskattningar i vår jämförelse.

Eftersom potenser är definierade via upprepad multiplikation, så skriver vi om olikheten som vi vill visa:

$$100^{99} < 99^{100} \iff \frac{100^{99}}{99^{99}} < 99 \iff \left(\frac{100}{99}\right)^{99} < 99.$$

(Pilen $\iff$ är en *ekvivalenspil* som kan läsas ”om och endast om”. Den används här för att visa att alla dessa olikheter är ekvivalenta: om en är sann så är de alla sanna.)

Nu kommer vi ihåg att vi tror att den första olikheten är sann med råge, och därför är $(100/99)^{99}$ kanske inte bara mindre än 99, utan *mycket* mindre. Så vi provar grova uppskattningar för att försöka få enklare tal:

$$\left(\frac{100}{99}\right)^{99} = \left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{100}{99}\right) \cdots \left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{100}{99}\right) < \left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{99}{98}\right) \left(\frac{98}{97}\right) \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{1}\right).$$

(Detta gäller eftersom $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ för alla $n \geq 2$.) Produkten i den högra delen är *teleskoperande*: varje nämnare förutom den sista kan förkortas med nästa täljare, och vi kan beräkna produkten exakt:

$$\left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{99}{98}\right) \left(\frac{98}{97}\right) \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{1}\right) = \frac{100}{1} = 100.$$

Detta är inte tillräckligt bra, eftersom vi vill visa att $(100/99)^{99} < 99$, inte att det är mindre än 100. Men det är nära, och en enkel justering ger oss det vi behöver: genom att lämna den sista faktorn i produkten oförändrad ser vi att

$$\left(\frac{100}{99}\right)^{99} < \left(\frac{100}{99}\right) \left(\frac{99}{98}\right) \left(\frac{98}{97}\right) \cdots \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{100}{99}\right) = \frac{100}{2} \cdot \frac{100}{99} = 50 \cdot \frac{100}{99} < 99.$$

Alltså stämmer det att $\left(\frac{100}{99}\right)^{99} < 99$, och därmed att $100^{99} < 99^{100}$.

Extra: vi visade ovan att $\left(\frac{100}{99}\right)^{99}$ är mindre än 99, men hur stort är det egentligen? Talet kan skrivas

$$\left(1 + \frac{1}{99}\right)^{99},$$

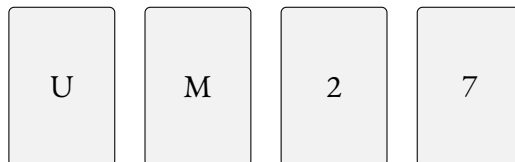
och det visar sig att talen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

närmar sig ett visst tal när n blir större och större. Detta tal kallas *Eulers tal* eller *Nepers tal*, och dyker upp så pass ofta i matematik att det har fått en egen symbol: e . Denna konstant är ungefär 2.71828, och för vårt tal ovan gäller $\left(1 + \frac{1}{99}\right)^{99} \approx 2.705$.

Kortregler

På ett bord ligger fyra kort:



Varje kort har en bokstav på ena sidan och en siffra på den andra. Du får höra regeln

“Om en konsonant står på ena sidan, så står ett jämnt tal på den andra.”

Vilka av korten måste du vända för att säkert kunna avgöra om regeln stämmer?

Strategi: tänk på vad det skulle innebära att regeln inte stämmer!

Regeln säger att varje konsonant måste ha ett jämnt tal på andra sidan. Det enda sättet denna regel kan *brytas* på är om det finns ett kort med en konsonant på ena sidan och ett udda tal på andra sidan. Det betyder att vi behöver vända korten M och 7:

- Vi behöver vända på kortet med bokstaven M för att se om det står ett jämnt tal på andra sidan: om det inte gör det så bryts regeln.
- Vi behöver vända på kortet med siffran 7 för att se om det står en konsonant på andra sidan: om det gör det så bryts regeln.

Det spelar ingen roll vad det står på andra sidan av kortet med bokstaven U, eftersom U är en vokal och regeln bara gäller konsonanter. Kortet med siffran 2 behöver vi inte vända, eftersom det inte kan bryta mot regeln oavsett vad som står på andra sidan.

Extra: detta är en instans av *Wasons selection task*, som visar att det är viktigt att man tänker till när det gäller att dra logiska slutsatser: man behöver tänka igenom logiken och se upp för att t.ex. ”bekräfta konsekventen”.

Ett långt tal

Vi bildar ett tal genom att vi tar talen 1, 2, 3, ..., 98, 99 och sätter ihop deras siffror: talet är alltså 1234...9899. Hur många siffror har talet? Är talet en multipel av 9?

Strategi: räkna antalet siffror och använd delbarhetsregeln för 9!

Talen 1 till 9 har 1 siffra vardera, så de bidrar med 9 siffror. Talen 10 till 99 har 2 siffror vardera, och det finns 90 sådana tal, så de bidrar med 180 siffror. Totalt har alltså det långa talet $9 + 180 = 189$ siffror.

För att avgöra om det långa talet är en multipel av 9 kan vi använda delbarhetsregeln för 9: ett tal är en multipel av 9 om och endast om summan av dess siffror är en multipel av 9. Summan av siffrorna i det långa talet är lika med summan av siffrorna i talen 1 till 99. Para ihop dessa tal, förutom 99, enligt

$$(1, 98), (2, 97), (3, 96), \dots, (10, 89), (11, 88), \dots, (49, 50).$$

I varje par summerar tiotalssiffrorna till 9 (där tiotalssiffran tolkas som 0 hos 1–9), och detsamma för entalssiffrorna. Tillsammans med siffrorna i talet 99 så kan den totala siffersumman alltså skrivas som en summa av en massa 9:or, och är därmed en multipel av 9. Alltså är det ursprungliga långa talet en multipel av 9.

Extra: hur många 9:or är det i siffersumman om man organiserar det hela enligt ovan? Vad är den faktiska siffersumman? Kan du tänka på denna uppgift med hjälp av *modulär aritmetik*, om du känner till det?