# Funktionalanalys D 1

## Kap. 1. Normerade rum

1. Ett normerat rum $N$, är ett linjärt rum med en reellvärd funktion kallad normen. Givet ett element $x \in N$ brukar normen av $x$ betecknas $\|x\|$. Normen skall (för att vara en norm) ha följande egenskaper.

(i) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, $\quad a \in \mathbb{R}$, $x \in N$ (homogenitet

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\quad x,y \in N$ (subadditivitet)

(iii) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$, $\quad x \in N$.

Kommentar: Av (i) följer $\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$.
Av (ii) följer sedan $0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2 \cdot \|x\|$, dvs. $\|x\| \geq 0$.

Om en formel eller ett påstående innehåller flera olika normerade rum, $N_1$, $N_2$, ..., skriver man ofta $\|x\|_{N_1}$, $\|x\|_{N_2}$, ..., för att ange vilken norm och vilket normerat rum som avses.

Exempel på normerade rum:

I. Mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$, är ett normerat rum om vi sätter $\|x\| = |x|$, dvs. det vanliga absolutbeloppet.

II. Det linjära rummet $\mathbb{R}^n$ är ett normerat rum om vi sätter

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}.$$

III. Rummet $C[0,1]$ av kontinuerliga funktioner på det slutna intervallet $[0,1]$ är ett normerat rum om vi sätter $\|f\| = \max|f(x)|$, $0 \leq x \leq 1$.

IV. Låt $\ell^1$ vara mängden av alla följder av reella tal $\underline{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, sådana att $\Sigma |x_k| < \infty$. $\ell^1$ är ett linjärt rum om vi definierar

$$a \cdot \underline{x} + b \cdot \underline{y} = \{ax_k + by_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \underline{x}, \underline{y} \in \ell^1, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$\ell^1$ är ett normerat rum om vi sätter $\|\underline{x}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

V. Andra linjära rum av talföljder (med samma linjära operationer som i $\ell^1$), som också är normerade rum är

$$\ell^2 = \{\{x_k\} \,|\, \Sigma x_k^2 < \infty\}, \qquad \|\underline{x}\| = (\Sigma x_k^2)^{1/2}.$$

$$\ell^\infty = \{\{x_k\} \,|\, \sup |x_k| < \infty, 1 < k\}, \qquad \|\underline{x}\| = \sup |x_k|.$$

$$c_o = \{\{x_k\} \,|\, x_k \to 0\}, \qquad \|\underline{x}\| = \sup |x_k| = \max |x_k|.$$

$$c = \{\{x_k\} \,|\, \{x_k\} \text{ konvergent}\}, \qquad \|\underline{x}\| = \sup |x_k|.$$

VI. Om $N$ är ett normerat rum, kan vi bilda nya normerade rum av följder ur $N$, t.ex. $\ell_N^1 = \{\{x_k\} \,|\, x_k \in N, \ \Sigma \|x_k\|_N < \infty\}$, $\|\underline{x}\| = \Sigma \|x_k\|_N$.

VII. Om $N$ är ett normerat rum, och om $M$ är ett linjärt delrum av $N$, så är $M$ ett normerat rum om vi sätter $\|x\|_M = \|x\|_N$, $x \in M \subset N$.

VIII. Om $V$ och $V'$ är vektorrum så är mängden $V \times V'$, dvs. mängden av alla par $(v,v')$ ett linjärt rum om vi definierar

$$a\cdot(v,v') + b(w,w') = (av+bw,\ av'+bw').$$

Detta rum brukar skrivas $V \oplus V'$.

Om nu $N$ och $N'$ är normerade rum, så finns flera naturliga normer på $N + N'$. De viktigaste är $\|(v,v')\| = \max\{\|v\|,\|v'\|\}$, och $(v,v') = \|v\| + \|v'\|$.

Definition (1.1.1): Låt $N_1$ och $N_2$ vara normerade rum, och låt $T: N_1 \to N_2$ vara en linjär avbildning. $T$ sägs vara begränsad om det finns $K$, så att

$$\|Tx\|_{N_2} \leq K\cdot\|x\|_{N_1},\quad x \in N_1,\ \text{eller alternativt, om}$$
$$\|Tx\|_{N_2} \leq K,\ \text{för alla}\ x \in N_1,\ \text{sådana att}\ \|x\|_{N_1} \leq 1.$$

Definition (1.1.2): Om $T: N_1 \to N_2$ är en begränsad linjär avbildning definierar vi normen av $T$ såsom

$$\|T\| = \sup \|Tx\|_{N_2},\quad x \in N_1,\ \|x\|_{N_1} \leq 1.$$

Anm: En linjär avbildning kallas ofta en linjär operator eller bara en operator. Mängden av alla begränsade linjära avbildningar från $N_1$ till $N_2$ brukar betecknas $L(N_1,N_2)$.

Övning: Visa att $L(N_1,N_2)$ är ett linjärt rum och att den norm som definieras i definition (1.1.2) ger en norm i $L(N_1,N_2)$.

Om $T: N_1 \to N_2$ och $S: N_2 \to N_3$ är begränsade linjära avbildningar, så definierar vi $S \circ T: N_1 \to N_3$ genom $(S \circ T)(x) = S(Tx)$ dvs.

$$N_1 \xrightarrow{T} N_2 \xrightarrow{S} N_3.$$

Det är lätt att se att $S \circ T$ är en begränsad linjär avbildning och att

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|.$$

Definition (1.1.3): En begränsad linjär avbildning $T: N_1 \to N_2$ sägs vara invertibel om det finns en begränsad linjär avbildning $S: N_2 \to N_1$, så att

$$S \circ T(x) = x,\ x \in N_1 \quad \text{och} \quad T \circ S(y) = y,\ y \in N_2.$$

$S$ kallas då för inversen till $T$ och betecknas ofta $T^{-1}$.

Definition (1.1.4): Två normerade rum $N_1$ och $N_2$ sägs vara isometriskt isomorfa om det finns en invertibel linjär avbildning $T: N_1 \to N_2$ sådan att

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = 1.$$

Anm. 1: Detta innebär att $\|x\| = \|T^{-1}\| \cdot \|T(x)\| \leq \|Tx\| \leq \|x\|$, dvs. $\|Tx\| = \|x\|$ för alla $x$ i $N_1$ och på samma sätt $\|T^{-1}y\| = \|y\|$ för $y$ i $N_2$. En linjär avbildning $T$ sådan att $\|Tx\| = \|x\|$ för alla $x$ kallas en isometri.

Anm. 2: Om de normerade rummen $N_1$ och $N_2$ är isometriskt isomorfa, finns det som regel ingen anledning att skilja dem åt och vi skriver därför som regel helt enkelt $N_1 = N_2$.

2. Till ett normerat rum hör på ett naturligt sätt en topologi, dvs. vi kan definiera öppna mängder, slutna mängder, konvergenta följder och kontinuerliga funktioner. (Observera att nedanstående definitioner ger den vanliga topologin i $\mathbb{R}$.)

Definition (1.2.1): Låt $N$ vara ett normerat rum.

a) Om $x \in N$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, så sätter vi

$$B(x,r) = \{y \in N \mid \|x - y\| < r\}.$$

$B(x,r)$ kallas det öppna klotet med radie $r$ och medelpunkt $x$.

b) En delmängd $0 \subset N$ sägs vara öppen om för varje $x$ i $N$ det finns $r > 0$ så att $B(x,r) \subset 0$.

c) En följd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sägs vara konvergent med gränspunkten $z$, om

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - z\| = 0.$$

Vi skriver ofta $\lim x_k = z$.

d) En punkt $z$ sägs vara hopningspunkt till mängden $E \subset N$, om det finns en följd $\{x_k\}$, $x_k \in E$, sådan att $\lim x_k = z$.

e) Mängden av hopningspunkter till en mängd $E \subset N$ betecknas $\overline{E}$. Mängden $E$ sägs vara sluten om $E = \overline{E}$. (Observera att $E \subset \overline{E}$.)

Med hjälp av ovanstående begrepp skall vi nu fortsätta studiet av normerade rum och vi börjar med att knyta an till exempel VII ovan. Där konstaterade vi att ett delrum av ett normerat rum självt är ett normerat rum. Nu finns emellertid för linjära rum (ej nödvändigtvis normerade) ett annat begrepp av samma betydelse som delrumsbegreppet, nämligen begreppet kvotrum.

Låt därför $V$ vara ett linjärt rum och låt $M$ vara ett delrum. Vi skall beskriva kvotrummet $V/M$. Vi börjar med att observera att relationen $R$ definierad genom $xRy$ omm (om och endast om) $x - y \in M$ är en ekvivalensrelation på $V$, (som vi skriver $x \underset{M}{\sim} y$), ty

(i) $x - x = 0 \in M$, dvs. $x \underset{M}{\sim} x$,

(ii) $y - x = -(x - y)$, dvs. $y \underset{M}{\sim} x$ om $x \underset{M}{\sim} y$, och

(iii) $x - z = (x - y) + (y - z)$, dvs. $x \underset{M}{\sim} z$ om $x \underset{M}{\sim} y$ och $y \underset{M}{\sim} z$.

Antag nu att $x \overset{}{\underset{M}{\sim}} x'$ och att $y \underset{M}{\sim} y'$, då är $ax + by \underset{M}{\sim} ax' + by'$, ty

$$ax + by - (ax' + by') = a(x - x') + b(y - y') \in M$$

emedan $M$ är ett delrum. Detta innebär att mängden av ekvivalensklasser är ett linjärt rum. För att lättare kunna arbeta med dessa ekvivalensklasser noterar vi först att om $x \underset{M}{\sim} y$, så är $x - y = m \in M$, dvs. $y = x + (-m)$. Alla element i den ekvivalensklass som innehåller $x$ kan alltså skrivas som $x + m$ för något $m$ i $M$. Vi skall därför beteckna den ekvivalensklass som innehåller $x$ med

$$\{x + M\} .$$

Det är lätt att se att ovanstående linjära operationer uppfyller axiomen för ett linjärt rum och detta ger oss

Definition (1.2.2): Låt $V$ vara ett linjärt rum och låt $M$ vara ett delrum av $V$. Kvotrummet $V/M$ är mängden av ekvivalensklasser $\{x+M\}$, $x \in V$, med den linjära struktur som definierats ovan.

Om nu $N$ är ett normerat rum, och om $M$ är ett delrum av $N$ förefaller det rimligt att fråga om $N/M$ också är ett normerat rum. Nu bör denna fråga preciseras så att frågan är om normen i $N$ kan användas för att definiera en norm i $N/M$. För att förstå lösningen på detta problem observerar vi först att funktionen $T: N \to N/M$ definierad genom $Tx = \{x+M\}$ är en linjär avbildning. Om avbildningen $T$ skall vara begränsad med normen $K$ måste därför villkoret

$$\|\{x+M\}\|_{N/M} \leq K \cdot \inf \{\|y\|, y \in \{x+M\}\}$$

vara uppfyllt. Vi skall därför definiera

$$(*) \qquad \|\{x+M\}\|_{N/M} = \inf \{\|y\| , y \in \{x+M\}\}$$

och vi ser att då är $\|T\| = 1$. Frågan är nu bara om $(*)$ verkligen ger en norm på $N/M$. Vi börjar därför med att konstatera att

(i) $\|a\{x+M\}\|_{N/M} = |a| \cdot \|\{x+M\}\|_{N/M}$ om $x \in N$, $a \in \mathbb{R}$, och att

(ii) $\|\{x+M\} + \{y+M\}\|_{N/M} = \|\{x+y+M\}\|_{N/M} \leq \|\{x+M\}\|_{N/M} + \|\{y+M\}\|_{N/M}$.

Vidare är $\|\{x+M\}\|_{N/M} \geq 0$ för alla $\{x+M\}$ i $N/M$, och $\|\{0+M\}\|_{N/M} = 0$. Däremot är det inte alltid säkert att $\|\{x+M\}\|_{N/M} = 0$ endast om $\{x+M\} = \{0+M\}$.

Exempel: $\ell^1$ är ett delrum av $\ell^2$, ty $\Sigma |x_k| < \infty \Longrightarrow \Sigma x_k^2 < \infty$. I kvotrummet $\ell^2/\ell^1$ är emellertid $\|\{x+\ell^1\}\|_{\ell^2/\ell^1} = \inf \{\|x+y\|_{\ell^2}, y \in \ell^1\} = 0$ för alla $x$ i $\ell^2$.

Övning: Visa detta.

Lyckligtvis är det lätt att ange villkor på $M$ som garanterar att ovanstående definition verkligen ger en norm på $N/M$. Villkoret antyds av följande

Lemma (1.2.3): $\|(x+M)\|_{N/M} = 0 \iff x \in \overline{M}$.

Bevis: $\Leftarrow$ ) Om $x \in \overline{M}$ finns en följd $\{x_k\}$, $x_k \in M$, sådan att $\|x - x_k\|_N \to 0$, dvs. $\inf \{\|x - y\|, y \in M\} = 0$.

$\Rightarrow$ ) Om $\|(x+M)\|_{N/M} = 0$, så finns det för varje naturligt tal $k$ ett $x_k \in M$, så att $\|x - x_k\| < 1/k$, men då är naturligtvis $x = \lim x_k$, dvs. $x \in M$. Q.

Av lemmat följer omedelbart följande

Sats (1.2.4): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $M$ vara ett delrum. Definitionen $\|(x+M)\|_{N/M} = \inf \{\|(x+m)\|, m \in M\}$ ger en norm på $N/M$ omm $M$ är ett slutet delrum av $N$.

Lite avkoppling: Räkning med ekvivalensklasser

Det är i matematiska sammanhang vanligt att ett sökt (komplicerat) begrepp definieras med hjälp av ekvivalensklasser (i termer av enklare begrepp). Sådana definitioner är avskräckande för den ovane, men är som regel mycket lätta att arbeta praktiskt med. Exempelvis definieras som bekant ett rationellt tal som en ekvivalensklass (av par av hela tal). "Alla vet" att $3/4 = 45/60 = 75/100$, detta därför att alla dessa uttryck representerar samma ekvivalensklass. Räkning med ekvivalensklasser brukar vara som räkning med rationella tal, dvs. man väljer något element ur den givna ekvivalensklassen och räknar på. Ibland, speciellt då operationer skall definieras, måste man dessutom kontrollera att ett annat val av representant eller representanter leder till samma ekvivalensklass i svaret. Exempelvis är som bekant $3/4 + 1/5 = 45/60 + 12/60 = 75/100 + 20/100$ varvid det första uttrycket används vid räkning i grundskolan, det andra vid räkning i minuter och det tredje vid räkning i ören.

Ett sammanhang där det är naturligt att räkna med ekvivalensklasser är i problem om delbarhet hos naturliga tal.

Exempel: $4^m + 7^n$ är aldrig delbart med 3.
$4^m + 11^n$ är delbart med 3 om $n$ är udda.

Bevis: $4^k = (3+1)^k = A\cdot 3 + 1$, $7^k = (2\cdot 3 + 1)^k = B\cdot 3 + 1$,
$11^k = (4\cdot 3 - 1)^k = C\cdot 3 + (-1)^k$,
dvs. $4^m + 7^n = D\cdot 3 + 2$, medan $4^m + 11^n = E\cdot 3$ om $n$ udda,
$= F\cdot 3 + 2$ om $n$ jämnt.

Övning: Visa att $11^{19} + 19^{11}$ är delbart med 2, 3 och 5 men ej med 4.

## Kap. 2. Kontinuerliga linjära avbildningar

1. Vi observerade i förra kapitlet att givet ett normerat rum $N$, så kan man på ett naturligt sätt definiera en topologi i $N$. Nu är den främsta anledningen till att man inför topologier att man vill kunna tala om kontinuerliga funktioner och sådana sysslade vi ju inte alls med. Däremot sysslade vi något med linjära funktioner som var begränsade. Vi ska inleda detta kapitel med att visa följande viktiga sats, som säger att för en linjär avbildning (= funktion $T: N_1 \to N_2$, där $N_1$ och $N_2$ är normerade rum, så gäller

$$T \text{ kontinuerlig} \iff T \text{ begränsad.}$$

I själva verket gäller t.o.m. följande ännu något starkare

Sats (2.1.1): Låt $N_1$ och $N_2$ vara normerade rum, och låt $T: N_1 \to N_2$ vara en linjär avbildning. Då är följande egenskaper hos $T$ ekvivalenta:

a) $T$ är begränsad,

b) $T$ är kontinuerlig,

c) $T$ är kontinuerlig i en punkt.

Bevis: Självklart gäller b) $\Longrightarrow$ c). Vi ska därför visa att a) $\Longrightarrow$ b) och att c) $\Longrightarrow$ a).

a) $\Longrightarrow$ b). Antag $Tx_o = y_o$ och välj $\varepsilon > 0$. Vi ska finna $\delta > 0$ så att

$$x \in B(x_o,\delta) \Longrightarrow Tx \in B(y_o,\varepsilon).$$

Eftersom $T$ är begränsad finns $K$ så att $\|Tx\|_{N_2} \leq K \cdot \|x\|_{N_1}$. Tag $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Om nu $x \in B(x_o,\delta)$ så är $x' = x - x_o$, $\|x'\| < \delta$, och $\|Tx'\| < K \cdot \delta$, dvs. $\|Tx - Tx_o\| < \varepsilon$, dvs. $T$ är kontinuerlig.

c) $\Longrightarrow$ a). Antag att $T$ är kontinuerlig i $x_o$, och välj $\varepsilon = 1$. Tag $\delta$ så att $x \in B(x_o,\delta) \Longrightarrow Tx \in B(Tx_o,1)$ och sätt $K = 1/\delta$. Om nu $\|x\| < 1$, så är $x = K(x_o + x/K - x_o)$, dvs. $Tx = K(T(x_o + x/K) - Tx_o)$ och då är $\|Tx\| \leq K(\|T(x_o + x/K) - Tx_o\|) = K$, så att $T$ är begränsad. Q.

Vi observerade i kap. 1 att om $N_1$ och $N_2$ är normerade rum så är även det linjära rummet $L(N_1,N_2)$ av begränsade linjära avbildningar (dvs. enligt sats (2.1.1) kontinuerliga linjära avbildningar) ett normerat rum. Vi ska i detta kapitel speciellt studera rummet $L(N,\mathbb{R})$ av kontinuerliga linjära avbildningar från det normerade rummet $N$ till det normerade rummet $\mathbb{R}$. Vi börjar med att införa några nya beteckningar.

(i) En linjär avbildning $f: N \to \mathbb{R}$ kallas en linjär funktional, eller ibland en linjär form.

(ii) Det normerade rummet $L(N,\mathbb{R})$ av kontinuerliga linjära funktionaler betecknas $N^*$ och kallas det till $N$ hörande duala rummet.

(iii) Om $x \in N$ och $f \in N^*$ ska vi skriva $\langle f,x\rangle$ eller $\langle f,x\rangle_N$ för att ange värdet av funktionen $f$ i punkten $x$.

2. Vi ska ägna huvuddelen av detta kapitel till att bestämma det duala rummet till några av de normerade rum som infördes i kap. 1.

A. Bestämning av $c_o^*$:

Vi ska visa att $c_o^* = \ell^1$, och börjar med att konstatera att om $\underline{a} = \{a_k\} \in \ell^1$ så kan vi definiera en begränsad linjär funktional $f_a : c_o \to \mathbb{R}$ genom

$$\langle f_a, \underline{x}\rangle = \Sigma\, a_k x_k, \qquad \underline{x} = \{x_k\} \in c_o. \tag{2.2.1}$$

Vi ser att $f_a$ är begränsad ty $|\langle f_a,\underline{x}\rangle| = |\Sigma a_k x_k| \le \Sigma |a_k||x_k| \le$

$$\le (\Sigma |a_k|)\cdot(\sup|x_k|) = \|\underline{a}\|_{\ell^1}\cdot\|x\|_{c_o}, \text{ dvs. } \|f_a\|_{c_o^*} \le \|\underline{a}\|_{\ell^1}.$$

För att visa omvändningen ska vi använda oss av vad som brukar kallas den "naturliga basen" i $c_o$ (eller i $\ell^1$, $\ell^2$ eller $\ell^\infty$). Vi skriver därför

$$\underline{e}_j = \{\delta_{jk}\}_{k=1}^{\infty} = \begin{cases} 1 & \text{om } k = j \\ 0 & \text{om } k \neq j \end{cases}. \tag{2.2.2}$$

Vi ser att $\underline{e}_j \in c_o$, och även $\ell^1$ och $\ell^2$ och att $\|\underline{e}_j\| = 1$ i alla dessa rum. Låt nu $f \in c_o^*$ och sätt $a_k = \langle f,\underline{e}_k\rangle$. Vi ska visa $f = f_a$ som i (2.2.1).

För att slutföra beviset ska vi införa det linjära rummet $E_o$ bestående av alla talföljder sådana att $x_k \neq 0$ endast för ändligt många $k$. Dvs. $x \in E_o$ endast om det finns något $N$ så att $x_k = 0$ om $k > N$. Vi observerar också att $E_o \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset c_o \subset \ell^\infty$.

Om nu $x \in E_o$ så är $x = \sum_{k=1}^{N} x_k \underline{e}_k$, och då är

$$\langle f,x\rangle = \langle f, \sum_{k=1}^{N} x_k \underline{e}_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k\langle f,\underline{e}_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k = \langle f_a,x\rangle.$$

Med hjälp av rummet $E_o$ visar vi också att $\|\underline{a}\|_{\ell^1} \le \|f\|_{c_o^*}$, ty om så ej är fallet finns det $N$, så att

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| > \|f\|_{c_o^*}.$$

Välj då $y \in E_o$ genom $y_k = \begin{cases} \operatorname{sign}(a_k) & k \le N \\ 0 & k > N \end{cases}$. Då är $\|y\|_{c_o^*} = 1$ medan

$$|\langle f,y\rangle| = |\langle f_a,y\rangle| = \sum_{k=1}^{N} |a_k| > \|f\|\cdot\|y\|,$$

vilket strider mot förutsättningen.

Det återstår att visa att $\langle f,x\rangle = \langle f_a,x\rangle$ för alla $x$ i $c_o$. För att göra detta ska vi införa en följd av linjära avbildningar $P_N$ definierade på $c_o$ (eller $\ell^1$, $\ell^2$ eller $\ell^\infty$) och med värden i $E_o$. $P_N$ definieras på följande sätt:

Givet $\underline{x} = \{x_k\} \in c_o$, så definieras $P_N(x) = \{x_k^N\}_{k=1}^{\infty}$ genom

$$x_k^N = \begin{cases} x_k & \text{om } k \leq N \\ 0 & \text{om } k > N \end{cases} .$$

Om nu $\underline{x} \in c_o$ och $\varepsilon > 0$ är givet så finns $N$ så att $|x_k| < \varepsilon/(2\|f\|)$ om $k > N$. Vi ska visa att $|\langle f - f_a, \underline{x}\rangle| < \varepsilon$. Nu är $\underline{x} = P_N(\underline{x}) + (\underline{x} - P_N(\underline{x}))$, där $N$ som ovan. Då är

$$\langle f - f_a, \underline{x}\rangle = \langle f - f_a, P_N(\underline{x}) + (\underline{x} - P_N(\underline{x}))\rangle = \langle f - f_a, P_N(\underline{x})\rangle + \langle f - f_a, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle =$$

$$= \langle f, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle - \langle f_a, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle$$

eftersom $(f - f_a, P_N(\underline{x})) = 0$. Men då är

$$|\langle f - f_a, \underline{x}\rangle| \leq |\langle f, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle| + |\langle f_a, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle| < 2 \cdot \|f\| \cdot (\varepsilon/2 \cdot \|f\|) = \varepsilon .$$

Detta visar att

$$\langle f, \underline{x}\rangle = \langle f_a, \underline{x}\rangle$$

för alla $\underline{x}$ i $c_o$, dvs. $f = f_a$. Q.

B. Bestämning av $(\ell^1)^*$:

Vi ska visa att $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, och börjar med att konstatera att om $\underline{a} = \{a_k\} \in \ell^\infty$ så kan vi definiera en begränsad linjär funktional $f_a$: $\ell^1 \to \mathbb{R}$ genom

(2.2.3) $\langle f_a, \underline{x}\rangle = \Sigma\, a_k x_k$, $\underline{x} = \{x_k\} \in \ell^1$.

Vi ser att $f_a$ är begränsad ty

$$|\langle f_a, x\rangle| \leq \Sigma |a_k| \cdot |x_k| \leq (\sup |a_k|) \cdot (\Sigma\, |x_k|) = \|\underline{a}\|_{\ell^\infty} \cdot \|\underline{x}\|_{\ell^1} ,$$

dvs.

$$\|f_a\|_{(\ell^1)^*} \leq \|\underline{a}\|_{\ell^\infty} .$$

För att visa omvändningen ska vi nu åter använda oss av den "naturliga basen" och av det linjära rummet $E_o$. Givet $f \in (\ell^1)^*$ definierar vi som i A ovan en talföljd $\underline{a} = \{a_k\}$ genom $a_k = \langle f, \underline{e}_k\rangle$. Vi ska visa att $f = f_a$. Vi konstaterar först att för alla $k$ är $a_k = \langle f, \underline{e}_k\rangle \leq$ $\leq \|f\|_{(\ell^1)^*} \cdot \|\underline{e}_k\|_{\ell^1} = \|f\|$, dvs. $\underline{a} \in \ell^\infty$ och $\|\underline{a}\| \leq \|f\|$.

Vi konstaterar härnäst att om $\underline{x} \in E_o$, så finns det $N$, så att $\underline{x} = \sum_{k=1}^{N} x_k \underline{e}_k$, och då är $\langle f, \underline{x}\rangle = \langle f_a, \underline{x}\rangle$.

Om nu slutligen $\underline{x} \in \ell^1$ och $\varepsilon > 0$ är givet, så finns $N$, så att $\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon/2 \cdot \|f\|$, dvs. $\|\underline{x} - P_N(\underline{x})\|_{\ell^1} < \varepsilon/2\, \|f\|$. Då är

$$|\langle f - f_a, \underline{x}\rangle| = |\langle f - f_a, P_N(\underline{x}) + (\underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle| \leq |\langle f, \underline{x} - P_N(\underline{x})\rangle| +$$

$$+ |\langle f_a, (\underline{x} - P_N(\underline{x}))\rangle| < \varepsilon ,$$

dvs. $f = f_a$. Q.

C. Bestämning av $(\ell^2)^*$ :

I detta avsnitt ska vi visa att det linjära rummet $\ell^2$ (se sektion (1.1), exempel V) är ett normerat rum, och att $(\ell^2)^* = \ell^2$. Rummet $\ell^2$ består av alla följder $\underline{x} = \{x_k\}$ av reella tal, sådana att $\Sigma\, x_k^2 < \infty$, och vi påstod i kap. 1 att funktionen

$$\|\underline{x}\| = (\Sigma\, x_k^2)^{1/2}$$

är en norm på $\ell^2$. För att visa att så verkligen är fallet, konstaterar vi först att villkoren (i) och (iii) i definitionen av en norm uppenbarligen är uppfyllda. Däremot är subadditiviteten (villkor (ii)) inte lika uppenbar. För att visa denna behöver vi först följande

Lemma (2.2.4): (Cauchy-Schwarz-Bunyakowskis olikhet, jfr lemma (6.1.2) Låt $\{a_k\}_{k=1}^N$ och $\{b_k\}_{k=1}^N$ vara ändliga följder av reella tal. Då är

(2.2.5) $\quad (\Sigma\, a_k b_k)^2 \le (\Sigma\, |a_k| \cdot |b_k|)^2 \le (\Sigma\, a_k^2) \cdot (\Sigma\, b_k^2)$

eller

$$|(\Sigma\, a_k b_k)| \le (\Sigma\, a_k^2)^{1/2} \cdot (\Sigma\, b_k^2)^{1/2} .$$

Bevis: Den första olikheten är uppenbar, och för att visa den andra antar vi för att förenkla beteckningarna att alla $a_k$ och $b_k$ är positiva. Vi skriver först $A = \Sigma\, a_k^2$, $B = \Sigma\, b_k^2$ och $C = \Sigma\, a_k b_k$, och definierar sedan ett andragradspolynom $f(t)$ genom

$$f(t) = \Sigma\, (a_k - t b_k)^2 = \Sigma\, a_k^2 - 2t\, \Sigma\, a_k b_k + t^2\, \Sigma\, b_k^2 = A - 2tC + t^2 B .$$

Vi ser nu först att om $B = 0$, så är alla $b_k = 0$ och då är även $C = 0$, så att olikheten är uppfylld. I annat fall ser vi att $f(t) \ge 0$ för alla $t$, och att

$$Bf(t) = AB - 2t\, CB + t^2 B^2 = (tB - C)^2 + (AB - C^2) \ge 0 .$$

Väljer vi nu $t = C/B$ så är $AB - C^2 \ge 0$, vilket är den sökta olikheten. Q.

Korollarium (2.2.6): Om $\underline{a}$ och $\underline{b}$ är element i $\ell^2$, så är serien $\Sigma\, a_k b_k$ absolut-konvergent, och $(\underline{a},\underline{b}) = \Sigma\, a_k b_k \le \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|$ .

Korollarium (2.2.7): Om $\underline{a}$ och $\underline{b}$ båda tillhör $\ell^2$, så är $\|\underline{a}+\underline{b}\| \le \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|$ .

Bevis:
$$\|\underline{a}+\underline{b}\|^2 = (\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\underline{b}) = (\underline{a},\underline{a}) + 2(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{b},\underline{b}) =$$
$$= \|\underline{a}\|^2 + 2(\underline{a},\underline{b}) + \|\underline{b}\|^2 \le \|\underline{a}\|^2 + 2\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| + \|\underline{b}\|^2 =$$
$$= (\|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|)^2 .$$

Detta visar att $\ell^2$ verkligen är ett normerat rum. Med hjälp av korollarium (2.2.6) kan bestämningen av $(\ell^2)^*$ genomföras ungefär likadant som bestämningen av $(c_o)^*$ och $(\ell^1)^*$ ovan.

Övning (2.2.8): Genomför detta. (Ledning: Den enda svårigheten är att visa att $\|\underline{a}\|_{\ell^2} \leq \|f\|_{(\ell^2)^*}$ (vi använder beteckningarna enligt A.)För att visa detta, välj $y = P_N(\underline{a})$, där $N$ är lämpligt.)

Övning (2.2.8'): $(\ell^\infty)^*$ kan ej bestämmas med ovanstående metod. Varför?

Övning (2.2.9): (För hela denna övning jfr införandet av Riemannintegralen i Analys A1.) Med våra nuvarande kunskaper kan vi inte (åtminstone inte utan stora svårigheter och komplicerade räkningar) bestämma $C[a,b]^*$. Denna övning kan dock betraktas som en förberedelse för en bestämning av $C[a,b]^*$.

a) En ändlig delmängd $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ av $[a,b]$ sägs vara en indelning av $[a,b]$ om $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$. Vi ska skriva $|\Delta| = \sup\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq N\}$.

b) En reellvärd funktion $F$ på $[a,b]$ sägs vara av begränsad variation med totalvariationen $V_F[a,b]$ om

$$\sup_{\Delta} \sum_{k=0}^{N} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = V_F[a,b] \quad \text{där} \quad F(x_{-1}) = 0 .$$

c) Låt $f$ vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och låt $F$ vara en funktion av begränsad variation på $[a,b]$. För varje indelning $\Delta$ av $[a,b]$ ska vi skriva

$$S(f,\Delta,F) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})) .$$

Visa att för varje $\varepsilon > 0$, så kan vi finna $\delta > 0$, så att om $|\Delta| < \delta$ och $|\Delta'| < \delta$, så är $|S(f,\Delta,F) - S(f,\Delta',F)| < \varepsilon$.

(Ledning: Utnyttja både att $f$ är likformigt kontinuerlig och att $F$ är av begränsad variation.)

d) Av c) följer att $I_F(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta,F)$ existerar. Vi ska skriva

$$I_F(f) = \int_a^b f(x)\,dF(x) .$$

Visa att $I_F(f+g) = I_F(f) + I_F(g)$ och att $I_F(af) = aI_F(f)$. Detta innebär att $I_F(f)$ beror linjärt på $f$, dvs. att $I_F$ är en linjär funktional på $C[a,b]$.

e) Visa att $|I_F(f)| \leq (V_F[a,b]) \cdot \|f\|_{C[a,b]}$. Detta visar att $I_F$ är en begränsad linjär funktional på $C[a,b]$, dvs. att $I_F \in C[a,b]^*$, och att $\|I_F\| \leq V_F[a,b]$.

Övning (2.2.10): Om $F$ är av begränsad variation på $a$, $b$ så är uppenbarligen funktionen $V(x) = V_F[a,x]$ växande på $[a,b]$.

a) Visa att även funktionerna $F^+(x) = \frac{1}{2}(V(x) + F(x))$ och $F^-(x) = \frac{1}{2}(V(x) - F(x))$ är växande på $[a,b]$.

b) Visa att om $f$ är en kontinuerlig funktion på $a$, $b$ sådan att $0 \leq f(x) \leq 1$ för alla $x$ på $[a,b]$, så är

$$-F^-(b) \leq I_F(f) \leq F^+(b) .$$

c) Visa att om $F(x) = 0$, då $a < x < c$, $F(x) = 1$ då $c \leq x \leq b$, så är $I_F(f) = f(c)$.

3. Vi ska avsluta detta kapitel med att införa några allmänna begrepp som hör ihop med kontinuerliga linjära avbildningar. Vi börjar med att än en gång notera att om $N_1$, $N_2$ och $N_3$ är normerade rum och om $T_1: N_1 \to N_2$ och $T_2: N_2 \to N_3$ är begränsade linjära avbildningar med normer $\|T_1\|$ och $\|T_2\|$, så kan vi definiera en avbildning $T_2 \circ T_1$ genom

$$N_1 \xrightarrow{T_1} N_2 \xrightarrow{T_2} N_3$$

dvs. $(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$.

Man inser att $T_2 \circ T_1$ är en begränsad linjär avbildning från $N_1$ till $N_3$, och att $\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_2\| \cdot \|T_1\|$.

Vi ska nu studera specialfallet då $N_3$ är det normerade rummet $\mathbb{R}$. Samtidigt ska vi byta beteckningar och skriva $f$ för $T_2$ och (bara) $T$ för $T_1$. Detta ger oss diagrammet

$$N_1 \xrightarrow{T} N_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Om vi använder våra tidigare införda beteckningar för linjära funktionaler kan detta skrivas

$$(f \circ T)(x) = \langle f, Tx \rangle_{N_2}.$$

Av det ovanstående följer alltså att $f \circ T$ är en begränsad linjär funktional på $N_1$, dvs. att $f \circ T \in N_1^*$. Vi konstaterar därmed att den linjära avbildningen $T$ till varje funktional $f$ i $N_2^*$ tillordnar en linjär funktional $f \circ T$ i $N_1^*$, men detta är själva definitionen av att $T$ bestämmer en avbildning, som vi ska beteckna med $T^*$ från $N_2^*$ till $N_1^*$. Avbildningen $T^*$ bestäms av identiteten

(2.3.1) $\langle T^* f, x \rangle_{N_1} = \langle f, Tx \rangle_{N_2}$.

Övning (2.3.2): Visa att $T^*$ är linjär och att $\|T^*\| \leq \|T\|$.
(I själva verket råder likhet, men det kan vi inte bevisa förrän i nästa kapitel.)

Övning (2.3.3): Visa att $(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^*$.

Två andra begrepp som hör naturligt samman med linjära avbildningar är "kärnan" och "bilden". Låt därför $T: N_1 \to N_2$ vara en linjär avbildning. Vi ska skriva

(2.3.4) $\quad \mathrm{Ker}\,(T) = \{x \in N_1 \,|\, Tx = 0\}$

och

(2.3.5) $\quad \mathrm{Im}\,(T) = \{y \in N_2 \,|\, \text{det finns } x \in N_1, \text{ så att } y = Tx\}$.

Det är nu lätt att se att Ker (T) är ett slutet delrum av $N_1$ medan, som framgår av nedanstående exempel, Im (T) ej behöver vara ett slutet delrum av $N_2$.

Exempel (2.3.6): Vi börjar med att konstatera att om $\{x_k\} = \underline{x} \in \ell^1$, dvs. om $\Sigma |x_k| < \infty$ så är även $\Sigma x_k^2 < \infty$. Detta betyder att det finns en linjör avbildning $T: \ell^1 \to \ell^2$, given helt enkelt av $T(\underline{x}) = \underline{x}$. Det är lätt att se att för denna linjära avbildning T så är

$$\ell^1 = \text{Im } (T) \neq \overline{\text{Im } (T)} = \ell^2 .$$

Vi ska strax se att för linjära funktionaler är sambandet mellan Ker (f) och f särskilt enkelt. Vi börjar med följande

Definition (2.3.7): Låt V vara ett vektorrum. Ett delrum M i V sägs vara ett hyperplan om dim (V/M) = 1, dvs. om för givet $a \notin M$, och för alla x i V, det finns $t \in \mathbb{R}$, och $m \in M$, så att

$$x = t \cdot a + m .$$

Övning (2.3.8): Visa att om M är ett hyperplan i V så beror t och m entydigt och linjärt av x.

Vi har nu först följande enkla

Sats (2.3.9): Låt N vara ett normerat rum, och låt $f: N \to \mathbb{R}$ vara en begränsad linjär funktional, då är antingen $f = 0$, eller så är Ker (f) ett slutet hyperplan i N.

Bevis: Om $f = 0$ har vi inget att bevisa. I annat fall finns $a \in N$, så att $f(a) = 1$. Låt $x \in N$ och sätt

$$m = x - f(x) \cdot a .$$

Då är $f(m) = f(x) - f(x) \cdot f(a) = 0$, dvs. $m \in \text{Ker}(f)$, och per definition är $x = f(x) \cdot a + m$. Att Ker(f) sluten följer av att f är kontinuerlig, ty $m_k \in \text{Ker}(f)$, $m_k \to m \Longrightarrow f(m) = \lim f(m_k) = 0$. Q.// Omvänt gäller även

Sats (2.3.10): Låt N vara ett normerat rum, och låt M vara ett slutet hyperplan i N och låt $a \in N$, $a \notin M$. Då finns en (entydigt bestämd) linjär funktional $f: N \to \mathbb{R}$ sådan att $f(a) = 1$ och Ker (f) = M. Denna linjära funktional är dessutom kontinuerlig.

Bevis: Vi definierar $f(x) = t$, där $x = t \cdot a + m$, med $m \in M$. Av övning (2.3.8) följer att f är linjär, och vi ska visa att f också är begränsad. Vi antar motsatsen och konstaterar att detta innebär att det finns en följd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in N$, sådana att $\|x_k\| \leq 1$, medan $|f(x_k)| \geq k$, dvs.

$$x_k = f(x_k) \cdot a - m_k \quad \text{där} \quad \|x_k\| \leq 1 ,$$

men då är

$$\|a - m_k / f(x_k)\| = \|x_k / f(x_k)\| \leq 1/k .$$

Men detta betyder att $m_k / f(x_k) \to a$, dvs. att $a \in \overline{M}$, vilket strider

mot förutsättningen att $M$ är slutet och att $a \notin M$. Q.

Övning (2.3.11): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $f$ och $g$ vara kontinuerliga linjära funktionaler på $N$, sådana att $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$. Visa att det finns $r \in \mathbb{R}$, så att $f(x) = r \cdot g(x)$ för alla $x$ i $N$.

Anm: Satserna (2.3.9) och (2.3.10) säger tillsammans med övning (2.3.11) att varje linjär funktional bestämmer ett slutet hyperplan och att omvänt varje slutet hyperplan bestämmer (nästan entydigt) en linjär funktional.

## Kap. 3. Hahn-Banachs sats. Banachrum.

1. I detta kapitel ska vi studera en av funktionalanalysens viktigaste satser, nämligen Hahn-Banachs sats. Beviset av satsen är både långt och på sätt och vis svårt. För att motivera läsaren för ett närmare studium av beviset ska vi därför först formulera satsen och ange några av dess konsekvenser innan vi går in på beviset.

**Sats (3.1.1):** (Hahn-Banachs sats) Låt $N$ vara ett normerat rum, låt $M$ vara ett delrum och låt $f: M \to \mathbb{R}$ vara en begränsad linjär funktional på $M$. Då finns en begränsad linjär funktional $\tilde{f}: N \to \mathbb{R}$ sådan att

$$\tilde{f}|_M = f \quad \text{(dvs. } \tilde{f}(m) = f(m) \text{ då } m \in M\text{)}$$

och

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| .$$

**Korollarium (3.1.2):** Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $x \in N$. Då finns en linjär funktional $f \in N^*$, så att $\|f\| = 1$, och så att $f(x) = \|x\|$.

**Bevis:** Låt delrummet $M$ vara "den räta linjen genom $x$", dvs.

$$M = \{y \in N \mid y = t \cdot x, \ t \in \mathbb{R}\} .$$

Vi definierar $g$ på $M$ genom

$$g(tx) = t \cdot \|x\| .$$

Då är $g$ linjär på $M$ och $\|g\| = 1$.

Enligt Hahn-Banachs sats finns då $g$ på $N$ så att $\|\tilde{g}\| = 1$ och så att $\tilde{g}(x) = g(x) = \|x\|$. Då är $\tilde{g}$ vår sökta funktional $f$. Q.

**Korollarium (3.1.3):** Låt $N_1$ och $N_2$ vara normerade rum, låt $T: N_1 \to N_2$ vara en begränsad linjär avbildning och låt $T^*$ vara den adjungerade operatorn från $N_2^*$ till $N_1^*$. Då är $\|T^*\| = \|T\|$.

**Bevis:** Vi vet redan att för varje $f \in N_2^*$, så är $\|T^* f\| = \|f \circ T\| \leq \|f\| \cdot \|T\|$, dvs. vi vet redan att $\|T^*\| \leq \|T\|$. För att visa den omvända olikheten väljer vi $\varepsilon > 0$. Enligt definitionen av $\|T\|$ finns då $x \in N$, så att $\|x\| \leq 1$, och $\|Tx\| > \|T\| - \varepsilon$. Tag nu $f \in N_2^*$ så att $\|f\| = 1$, och så att

$$\langle f, Tx \rangle_{N_2} = \|Tx\| .$$

Då är även

$$\langle T^* f, x \rangle_{N_1} = \langle f, Tx \rangle_{N_2} = \|Tx\| > \|T\| - \varepsilon ,$$

men eftersom $\|x\| \leq 1$ är då $\|T^* f\| > \|T\| - \varepsilon$, och eftersom $\|f\| = 1$, är då $\|T^*\| > \|T\| - \varepsilon$. Eftersom detta gäller för varje $\varepsilon > 0$ är då $\|T^*\| \geq \|T\|$, dvs. $\|T^*\| = \|T\|$. Q.

2. För vår nästa tillämpning av Hahn-Banachs sats behöver vi ett nytt begrepp, nämligen annihilator-begreppet.

Definition (3.2.1): Låt $N$ vara ett normerat rum med dualt rum $N^*$, låt $M$ vara ett delrum av $N$ och låt $P$ vara ett delrum av $N^*$. Vi ska skriva

$$\mathrm{Ann}(M) = M^\circ = \{f \in N^* \mid f(m) = 0 \text{ för alla } m \text{ i } M\}$$
$$\mathrm{Ann}'(P) = {}^\circ P = \{x \in N \mid p(x) = 0 \text{ för alla } p \text{ i } P\}.$$

Vi ska bevisa följande

Sats (3.2.2): Låt $N$ vara ett normerat rum, och låt $M$ vara ett delrum. Då är
(i) $M^* = (\overline{M})^* = N^*/M^\circ$ och
(ii) $(N/\overline{M})^* = M^\circ$.

Bevis: Vi konstaterar först att om $f \in N^*$ så gäller $f|_M \in M^*$. Om dessutom $g \in M^\circ$, så är $(f+g)(m) = f(m) + g(m) = f(m)$ för alla $m$ i $M$. Med andra ord så ger hela ekvivalensklassen $\{f+M^\circ\}$ upphov till samma linjära funktional på $M$. Dessutom ger $f_1$ och $f_2$ samma funktional på $M$ endast om $f_1 - f_2 \in M^\circ$, dvs. om de tillhör samma ekvivalensklass. Vidare är naturligtvis för varje $f \in N^*$,

$$\|f|_M\|_{M^*} \leq \|f\|_{N^*},$$

så att

$$\|\{f+M^\circ\}\|_{M^*} \leq \inf\{\|g\|_{N^*} \mid g \in \{f+M^\circ\}\} = \|\{f+M^\circ\}\|_{N^*/M^\circ}$$

Om å andra sidan $f \in M^*$, så kan vi finna $\tilde{f} \in N^*$, sådan att $\tilde{f}|_M = f$. Detta innebär att varje funktional i $M^*$ ges av någon funktional i $N$, dvs. närmare bestämt av en ekvivalensklass i $N^*/M^\circ$. Väljer vi dessutom $\tilde{f}$ så att $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ så ser vi att normerna är lika. Detta visar att $M^* = N^*/M^\circ$. Vi ska återkomma till beviset av att $M^* = \overline{M}^*$, efter att först ha visat (ii).

För att visa (ii) antar vi för enkelhets skull att $M$ är slutet $(= \overline{M})$ så att $N/M$ verkligen är ett normerat rum. Låt sedan $f \in (N/M)^*$ Det är lätt att se att definitionen

$$\tilde{f}(x) = f(\{x+M\})$$

entydigt bestämmer en linjär funktional på $N$, och att $\|\tilde{f}\|_{N^*} = \|f\|_{(N/M)^*}$ vilket betyder att $(N/M)^*$ kan uppfattas som ett delrum av $N^*$. Det är också klart att $f(m) = 0$ för alla $m$ i $M$, dvs. att $f \in M^\circ$. Omvänt gäller naturligtvis att om $f \in M^\circ$ så är $f(x+m) = f(x)$ för alla $m$ i $M$, så att $f$ verkligen ger en linjär funktional på $N/M$.

För att slutligen visa att $M^* = \overline{M}^*$ ska vi införa några nya begrepp och börjar med följande

Definition (3.2.3): Låt $N$ vara ett normerat rum. En följd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sägs vara en Cauchyföljd i $N$ om för varje $\varepsilon > 0$ det finns $K$ så att om $n, m > K$ är $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Exempel: Varje konvergent följd (se def. (1.2.2)c)) är en cauchyföljd.

Definition (3.2.4): Ett normerat rum $N$ sägs vara fullständigt om varje cauchyföljd i $N$ är konvergent. Ett fullständigt normerat rum sägs ofta vara ett Banachrum.

Exempel: a) Det är en direkt följd av Cauchys konvergenskriterium att $\mathbb{R}$ är ett Banachrum.

b) $C[0,1]$, $\ell^1$, $\ell^2$, $c_0$ och $\ell^\infty$ är Banachrum.

För att något antyda betydelsen av fullständighetsbegreppet ska vi visa följande

Lemma (3.2.5): Låt $M$ vara ett delrum av det normerade rummet $N$, låt $B$ vara ett Banachrum, och låt $T: M \to B$ vara en begränsad linjär avbildning. Då finns enn (en och endast en) linjär avbildning $\overline{T}: \overline{M} \to B$, sådan att $\overline{T}|_M = T$. Dessutom är $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Bevis: Vi konstaterar först att om $\{x_k\}$ är en cauchyföljd i $M$, så är $\{Tx_k\}$ en cauchyföljd i $B$, ty $\|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \leq \|T\| \cdot \|x_m - x_n\| < \varepsilon$ om $\|x_m - x_n\| < \varepsilon/\|T\|$. Eftersom $B$ är ett Banachrum är då följden $\{Tx_k\}$ konvergent. Om nu $x \in \overline{M}$ så finns någon cauchyföljd $\{x_k\}$ ur $M$ sådan att $\lim x_k = x$. Vi definierar $\overline{T}x$ som $\lim Tx_k$. Denna definition av $\overline{T}$ kan förefalla godtycklig eftersom det kan finnas olika cauchyföljder ur $M$ som båda konvergerar mot $x$. Det är emellertid en enkel räkning att visa att om $\lim x_k = \lim y_k$ så är även $\lim Tx_k = \lim Ty_k$ vilket innebär att $\overline{T}x$ ej beror av den valda följden, utan är entydigt bestämd av $x$ i $\overline{M}$. För att så visa att $\|\overline{T}\| = \|T\|$ observerar vi helt enkelt att för varje $x \in \overline{M}$ kan vi välja en cauchyföljd $\{x_k\}$ ur $M$, sådan att $\lim x_k = x$, och sådan att $\|x_k\| \leq \|x\|$ för alla $k$. Om nu $x \in \overline{M}$, $\|x\| \leq 1$, så är därför $\|\overline{T}x\| \leq \sup \|Tx_k\| \leq \|T\|$, dvs. $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$, men uppenbarligen är även $\|\overline{T}\| \geq \|T\|$, så att $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Q.

Korollarium (3.2.6): Låt $M$ vara ett delrum av det normerade rummet $N$. Då är $M^* = \overline{M}^*$.

Bevis: Eftersom $\mathbb{R}$ är ett Banachrum, så bestämmer varje $f$ i $M^*$ entydigt en linjär funktional $\overline{f}$ på $\overline{M}$. Om omvänt $f \in \overline{M}^*$ så bestämmer $f|_M$ entydigt $\overline{f}$ i $\overline{M}^*$, men då är uppenbarligen $\overline{f} = f$, och detta innebär att $M^* = \overline{M}^*$. Q.

3. Vi observerade i Kap. 1 att om $N_1$ och $N_2$ är normerade rum, så är även $L(N_1,N_2)$ ett normerat rum. Det är av stor betydelse inom funktionalanalysen att även följande skärpning av denna observation gäller.

Sats (3.3.1): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $B$ vara ett Banachrum. Då är $L(N,B)$ ett Banachrum.

Bevis: Låt $\{T_k\}$ vara en cauchyföljd ur $L(N,B)$. Då är för varje $x$ i $N$ $\{T_kx\}$ en cauchyföljd i $B$. Vi kan därför definiera $T = \lim T_k$ genom $Tx = \lim T_kx$ för varje $x$ i $N$. Det är uppenbart att $T$ är linjär, och vidare är $\|T\| = \lim \|T_k\| < \infty$, d.v.s. $T \in L(N,B)$, vilket visar att det normerade rummet $L(N,B)$ är fullständigt. Q.

Korollarium (3.3.2): Om $N$ är ett normerat rum så är $N^*$ ett Banachrum.

Eftersom $N^*$ alltså är ett normerat rum, och till yttermera visso ett Banachrum, har alltså även $N^*$ ett dualt rum $(N^*)^*$, eller enklare $N^{**}$. Även om vi fullständigt känner både $N$ och $N^*$ är det ofta svårt att ge en god beskrivning av $N^{**}$, exempelvis så är beskrivningen av $(\ell^\infty)^*$ i många avseenden otillfredsställande. Dock ger nedanstående sats god information om en viktig del av $N^{**}$.

Sats (3.3.3): Låt $N$ vara ett normerat rum, då finns en linjär avbildning $j: N \to N^{**}$, sådan att $\|j(x)\|_{N^{**}} = \|x\|_N$ för alla $x$ i $N$.

(Detta betyder att $N$ kan uppfattas som ett delrum av $N^{**}$).

Bevis: Givet $x$ i $N$ så definierar vi en linjär funktional $j(x)$ i $N^{**}$ genom

$$\langle j(x),f\rangle_{N^*} = \langle f,x\rangle_N .$$

Det är klart att $j(x)$ beror linjärt av $x$ så att avbildningen $j$ är linjär, vidare är per definition

$$|\langle j(x),f\rangle| \leq \|f\|\cdot\|x\| ,$$

vilket innebär att $\|j(x)\| \leq \|x\|$. För att slutligen se att $\|j(x)\| \geq \|x\|$, använder vi Hahn-Banachs sats och väljer $f$ i $N^*$, så att $\|f\| = 1$, och så att $\langle f,x\rangle = \|x\|$, eller att $(j(x),f) = \|x\|$, d.v.s. $\|j(x)\| \geq \|x\|$. Q.

En enkel men viktig egenskap hos Banachrum ges av följande

Lemma (3.3.4): Låt $M$ vara ett slutet delrum av ett Banachrum $B$. Då är $M$ och $B/M$ båda Banachrum.

Bevis: Att $M$ är ett Banachrum följer helt enkelt av att varje cauchyföljd i $M$ konvergerar mot något i $B$, och eftersom $M$ är slutet så ligger gränspunkten i $M$. För att visa att $B/M$ är ett Banachrum skall vi använda följande användbara karakterisering av Banachrum.

Lemma (3.3.5): Låt $N$ vara ett normerat rum. $N$ är ett Banachrum omm varje serie $\Sigma x_k$, sådan att $\Sigma \|x_k\| < \infty$, är konvergent.

Bevis: Det är klart att om $\Sigma \|x_k\| < \infty$ så är följden $\{s_n\}$, där $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ en cauchyföljd, så att om $N$ är ett Banachrum så är serien $\Sigma x_k$ konvergent. För att visa omvändningen (d.v.s. att villkoret är tillräckligt) låter vi $\{x_k\}$ vara en cauchyföljd i $N$. Vi observerar nu först att om någon delföljd ur den givna följden är konvergent så konvergerar också den ursprungliga mot samma gränspunkt. Vi väljer nu $\varepsilon_j = 2^{-j}$, och väljer $K_j$ så att $n,m > K_j \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon_j$. Följden $\{x_{K_j}\}$ är en delföljd ur den ursprungliga, och vi kan skriva

$$x_{K_j} = \sum_{n=1}^{j} y_n \quad \text{där} \quad y_n = x_{K_n} - x_{K_{n-1}} \quad \text{om} \quad n > 1,$$

medan $y_1 = x_{K_1}$. Då är $\|y_n\| < 2 \cdot 2^{-n}$ om $n > 1$, så att enligt förutsättningen är serien $\Sigma y_n$ konvergent, och detta bevisar lemmat.

Vi kan nu fullfölja beviset av att $B/M$ är ett Banachrum. Om nämligen $\Sigma\{x_k + M\}$ är en serie i $B/M$, sådan att $\Sigma \|\{x_k + M\}\|_{N/M} < \infty$, så väljer vi $y_k \in \{x_k + M\}$, så att $\|y_k\|_N < 2 \cdot \|\{x_k + M\}\|_{N/M}$. Detta betyder att $\Sigma \|y_k\| < \infty$, så att $\Sigma y_k$ är konvergent med gränspunkt $y$. Men då konvergerar $\Sigma\{x_k + M\}$ mot gränspunkten $\{y + M\}$. Q.

Vi skall avsluta denna diskussion om Banachrum med att konstatera att varje normerat rum kan uppfattas som ett tätt delrum av ett Banachrum. Mer precist gäller följande

Sats (3.3.6): Låt $N$ vara ett normerat rum. Då finns ett Banachrum $B_N$ och en linjär avbildning $i_N: N \to B_N$, så att

$$\|i_N(x)\|_{B_N} = \|x\|_N \quad \text{för alla} \quad x \quad \text{i} \quad N, \quad \text{och så att} \quad \overline{\text{Im}(i_N)} = B_N.$$

Bevis: Eftersom $N^{**}$ är ett Banachrum, så är även $\overline{\text{Im}(j)} \subset N^{**}$ ett Banachrum. Men per definition är $\text{Im}(j)$ tätt i $\overline{\text{Im}(j)}$. Q.

Anm.: Sats (3.3.6) är synnerligen användbar eftersom den innebär att man som regel inte har någon anledning att syssla med normerade rum som inte är Banachrum. Dock är det bevis vi givit av satsen och den därav erhållna karakteriseringen som ett delrum av $N^{**}$ inte den mest användbara. Den viktiga egenskapen hos rummet $B_N$ och den som man skall ha i åtanke är att varje punkt i $B_N$ är gränspunkt till någon cauchyföljd (eller någon serie) ur $N$.

Slutligen bör det påpekas att i allmänhet så är $\overline{\text{Im}(j)} \neq N^{**}$ även om $N$ är ett Banachrum. Om emellertid $\text{Im}(j) = N^{**}$ så sägs $N$ (som då är ett Banachrum) vara reflexivt. Ett exempel på ett reflexivt rum är $\ell^2$.

Övning (3.3.7): Visa att $C[a,b]$ är ett Banachrum.

(Ledning: Visa att om $f_k$ är en Cauchyföljd i $C[a,b]$ så är följden likformigt konvergent. Utnyttja satsen att "en likformigt konvergent följd av kontinuerliga funktioner konvergerar mot en kontinuerlig funktion".)

Övning (3.3.8): En funktion $\varphi$ på $[a,b]$ sägs vara vänsterkontinuerlig om för varje $x \in [a,b]$ och varje $\varepsilon > 0$, det finns $\delta > 0$, så att $|\varphi(t)-\varphi(x)| < \varepsilon$ om $x - \delta < t \leq x$, vilket är detsamma som att $\varphi(x) = \lim\{\varphi(t) \mid t \to x,\ t < x\}$. Vi skall skriva $D(a,b)$ för det linjära rummet av begränsade vänsterkontinuerliga funktioner på $[a,b]$. Rummet $D(a,b)$ är ett normerat rum, om vi sätter

$$\|\varphi\|_{D(a,b)} = \sup\{|\varphi(x)| \mid a \leq x \leq b\}.$$

Visa att $D(a,b)$ är ett Banachrum. (Ledning: Låt $\varphi_k$ vara en cauchyföljd ur $D(a,b)$, då konvergerar $\varphi_k$ likformigt mot en begränsad funktion $\psi$. För att visa att $\psi$ är vänsterkontinuerlig välj först $k$ så att

$$\sup |\varphi_k(x) - \psi(x)| < \varepsilon/2,$$

sedan för givet $x$, ett $\delta > 0$, så att

$$|\varphi_k(t) - \varphi_k(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{om} \quad x - \delta < t < x.$$

Övning (3.3.9): En funktion $\varphi$ på $[a,b]$, sägs vara en trappstegsfunktion (eller en enkel funktion) om det finns en indelning $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ där $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_N = b$, och reella tal $\{c_k\}_{k=1}^{N}$, så att $\varphi(a) = c_0$ och $\varphi(x) = c_k$ om $x_{k-1} < x \leq x_k$.

Vi skall beteckna mängden av alla trappstegsfunktioner på $[a,b]$ med $E(a,b)$. Visa att $E(a,b)$ är ett delrum av $D(a,b)$, och att för varje $f \in C[a,b]$, och varje $\varepsilon > 0$, så finns $\varphi \in E(a,b)$ så att

$$\sup\{|f(x) - \varphi(x)| \mid a \leq x \leq b\} < \varepsilon.$$

Övning (3.3.10): (Riesz's representationssats, bestämning av $C[a,b]^*$). Före lösandet av denna övning, läs övning (2.2.9). För att förenkla våra beteckningar skall vi i det följande skriva $C$, $D$ och $E$ för rummen $C[a,b]$, $D(a,b)$ och $E(a,b)$.

Låt $L \in C^*$, enligt Hahn-Banach's sats så finns $\underline{L} \in D^*$, så att $\underline{L}|_C = L$, och så att $\|\underline{L}\| = \|L\|$. Definiera en funktion $F$ på $\mathbb{R}$ genom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < a \\ \underline{L}(\chi_{[a,x]}) & \text{om } a \leq x \leq b \\ F(b) & \text{om } x > b \end{cases}$$

där

$$\chi_{[a,x]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } a \leq t \leq x \\ 0 & \text{om } x < t \leq b \end{cases}.$$

a) Visa att $F$ är av begränsad variation och att $V_F(a,b) = \|L\|$.

(**Ledning:** Om $\Delta = \{x_k\}$ är en indelning av $[a,b]$ så finns en trappstegsfunktion $\varphi$, med språng endast i några av punkterna ur $\Delta$, och med $\varphi(x) = \pm 1$ för alla $x$, sådan att

$$\sum_{k=0}^{N} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \underline{L}(\varphi) .\ )$$

**b) Visa att** om $f \in C$, och om $\Delta$ är en indelning av $[a,b]$, så är

$$S(f,\Delta,F) = \underline{L}(\psi) ,$$

där $\psi$ är en viss trappstegsfunktion.

**c) Visa att** givet $\varepsilon > 0$, så finns $\delta > 0$, sådant att om $|\Delta| < \delta$, så är dels $\|f - \psi\|_D < \varepsilon/(2\cdot\|L\|)$, dels $|S(f,\Delta,F) - I_F(f)| < \varepsilon/2$.

Härav följer att för alla $f$ i $C$, så är

$$L(f) = \underline{L}(f) = I_F(f) = \int_a^b f(x)dF(x) .$$

Detta är Riesz's representationssats.

## Kap. 4. Hahn-Banachs sats (bevis).

1. I detta kapitel ska vi bevisa Hahn-Banachs sats. Samtidigt vill vi påpeka att innehållet i detta kapitel delvis skiljer sig avsevärt från resten av kursen, att det mycket väl kan läsas kursivt och att det vid första genomläsningen mycket väl kan överhoppas helt.

Beviset består av två delar. Den första är av räknemässig eller geometrisk natur, medan den andra delen är abstrakt mängdteoretisk. Den första delen av beviset består av följande

**Lemma (4.1.1):** Låt $M$ vara ett delrum av ett normerat rum $N$, låt $f: M \to \mathbb{R}$ vara en begränsad linjär funktional, och låt $x_o \in N$, $x_o \notin M$, och låt slutligen $M'$ vara det delrum av $N$ som uppspänns av $x_o$ och $M$, d.v.s.

$$M' = \{x \in N \mid x = t \cdot x_o + m\}.$$

Då finns en linjär funktional $f': M' \to \mathbb{R}$, sådan att $f'|_M = f$ och så att $\|f'\| = \|f\|$.

**Bevis:** Om $\|f\| = 0$, så är $f = 0$ på $M$ och vi kan definiera $f = 0$ på hela $M'$. I annat fall kan vi anta att $\|f\| = 1$, ty annars sätter vi $g = f/\|f\|$, bestämmer $g'$ och sätter $f' = \|f\| \cdot g'$. Av linearitetens följer nu att $f'(tx_o + m) = t \cdot f'(x_o) + f'(m) = t \cdot f'(x_o) + f(m)$, d.v.s. $f'$ är bestämd på hela $M'$ av $f$:s värden på $M$ samt av talet $f'(x_o)$. Vi kallar talet $f'(x_o)$ för $a$ och vi ska alltså visa att det finns ett reellt tal $a$, sådant att för alla reella tal $t$ och alla $m$ i $M$

$$|t \cdot a + f(m)| \leq \|t \cdot x_o + m\|.$$

Enligt förutsättning gäller detta (oberoende av $a$) då $t = 0$. Då $t \neq 0$ kan vi dividera båda leden med $t$, samtidigt döper vi om $m/t$ till $-m$. Den sökta olikheten är då

$$|a - f(m)| \leq \|x_o - m\|,$$

d.v.s.

$$\|x_o - m\| \leq a - f(m) \leq \|x_o - m\|,$$

eller

$$f(m) - \|x_o - m\| \leq a \leq f(m) + \|x_o - m\|.$$

Om detta ska gälla för alla $m$ i $M$, så är tydligen

$$\sup \{f(m) - \|x_o - m\| \mid m \in M\} \leq a \leq \inf \{f(n) + \|x_o - n\|, \; n \in M\}.$$

För att visa att det finns ett sådant $a$ räcker det alltså att visa att för alla $m,n$ i $M$ så är

$$f(n) + \|x_o - n\| - (f(m) - \|x_o - m\|) = f(n-m) + \|n - x_o\| + \|x_o - m\| \geq 0.$$

Men nu är $\|n - x_o\| + \|x_o - m\| \geq \|n - m\|$, så att

$$f(n-m) + \|n - x_o\| + \|x_o - m\| \geq \|n - m\| - |f(n-m)| \geq 0$$

enligt förutsättningarna på $f$. Detta visar att

$$\sup\{f(m) - \|x_o - m\| \mid m \in M\} = c \leq C = \inf\{f(n) + \|x_o - n\| \mid n \in M\},$$

och för alla $a$ sådana att $c \leq a \leq C$, gäller tydligen att den linjära funktionalen $f'_a$ given av

$$f'_a(tx_o + m) = ta + f(m)$$

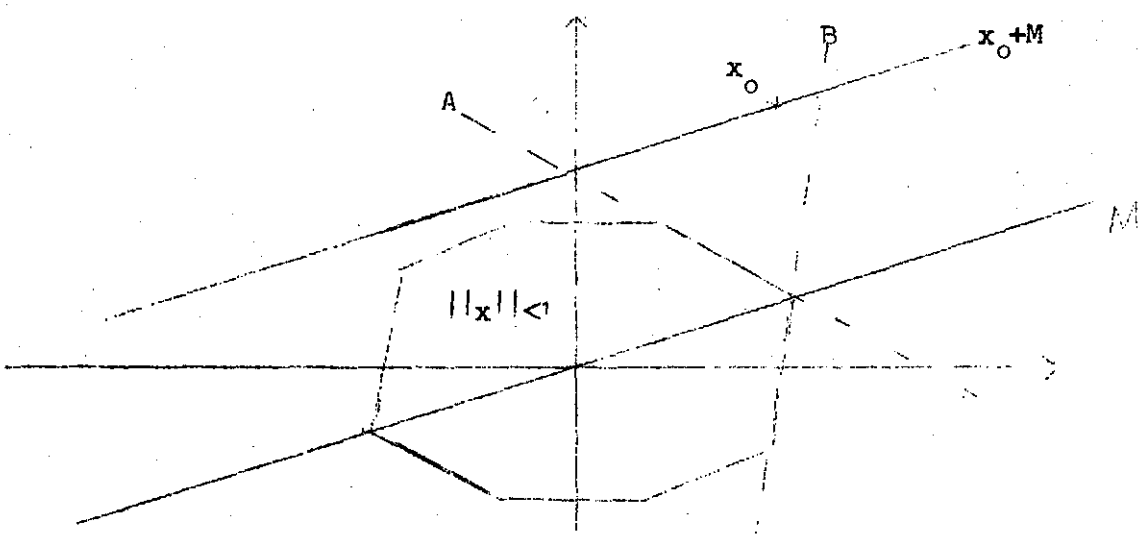
har norm $\leq 1$. Detta be visar lemmat. Q.

2. Vi påstod i inledningen till detta kapitel att första delen av beviset var av räknemässig eller geometrisk natur. Ovan har vi gett ett "räknemässigt" bevis av lemmat, och för att visa den "geometriska naturen" ska vi nedan ge inte ett geometriskt bevis, men väl en geometrisk illustration av det föregående räknemässiga beviset i det fall då $\dim(M) = 1$.

I nedanstående figur är punkten $x_o$, delrummet $M$ och delmängden $x_o + M$ angivna. Vidare är det skuggade området det så kallade enhetsklotet $K$ i $M'$. Vi refererar sedan till den avslutande anmärkningen i Kap. 2 där vi noterade att en linjär funktional är "nästan bestämd" av sin kärna. Nu är det lätt att inse att $f$ i själva verket är helt bestämd av mängden

$$H(f) = \{x \mid f(x) = 1\}.$$

Man inser också att $\|f\| \leq 1$ om $\|x\| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1$, d.v.s. om $H(f)$ ej skär det öppna enhetsklotet. I figuren nedan kan vi alltså lägga linjen $H(f)$ godtyckligt mellan linjerna $A$ och $B$. (Man inser också av figuren att om linjen $M$ vrids en aning så är linjen $H(f)$ entydigt bestämd. Den geometriska tolkningen av lemmat är helt enkelt att det i en situation som den nedan, med ett enhetsklot $K$ och en linje $M$ genom detta, så finns det alltid en tangent till $K$ i den punkt där $M$ skär randen till $K$.)



3. För att slutföra beviset av Hahn-Banachs sats behöver vi några nya begrepp. Det första av dessa ges i följande

Definition (4.3.1): Låt $X$ vara en mängd. En partiell ordning $\leq$, är en relation på $X$ (d.v.s. för vissa $x,y$ i $X$ gäller $x \leq y$) sådan att
(i) för alla $x$ i $X$ är $x \leq x$ ($\leq$ är reflexiv)
(ii) om för några $x,y$ i $X$, $x \leq y$ och $y \leq x$ så är $x = y$ ($\leq$ är antisymmetrisk)
(iii) om för några $x,y,z$ i $X$, $x \leq y$ och $y \leq z$ så är $x \leq z$ ($\leq$ är transitiv).
En mängd med en partiell ordning sägs vara en partiellt ordnad mängd.

Exempel: a) De reella talen med sin vanliga ordning är en partiellt ordnad mängd.
b) En partiell ordning på $\mathbb{R}^2$ erhåller vi om vi definierar $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ omm $x_1 \leq x_2$ (i $\mathbb{R}$) och $y_1 \leq y_2$ (i $\mathbb{R}$), d.v.s. om $(x_2,y_2)$ ligger rakt ovanför, rakt till höger, eller ovanför och till höger om $(x_1,y_1)$.

c) På en godtycklig mängd $X$ finns alltid den "triviala" partiella ordningen där $x \leq y$ endast om $x = y$.

d) Låt $E$ vara en mängd och låt $X = P(E)$ vara mängden av delmängder av $E$. För delmängder $x,y$ av $E$ definierar vi nu

$$x \leq y \text{ omm } x \subset y .$$

e) Den partiellt ordnade mängd som vi behöver för beviset av H-B's sats erhålls på följande sätt. Mängden $X$ består av alla par $(V,f_V)$ där $V$ är ett delrum av $N$ som innehåller $M$ och där $f_V$ är en linjär funktional på $V$ sådan att $f_V|_M = f$ och $\|f_V\| = \|f\|$. Vi definierar sedan

$$(V,f_V) \leq (W,f_W) \text{ omm } V \subset W \text{ och } f_W|_V = f_V .$$

Övning: Visa att villkoren (i), (ii) och (iii) i Definition (4.3.1) verkligen är uppfyllda för den "partiella ordning" som angivits i e).

Från den vanliga analysen är vi vana vid vad som menas med att en delmängd $E$ av $\mathbb{R}$ är begränsad, nämligen att $E$ är begränsad om $E$ har en övre begränsning. Det är naturligtvis klart att samma definition kan användas även för allmänna partiellt ordnade mängder. Vi ska alltså säga att en delmängd $E$ av den partiellt ordnade mängden $(X, \leq)$ är uppåt begränsad om den har en övre begränsning, d.v.s. om det finns $B$ i $X$, så att för alla $e$ i $E$, $e \leq B$.

Nästa begrepp vi behöver ges i

Definition (4.3.2): Låt $(X, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. Ett element $m$ i $X$ sägs vara ett maximalt element om $m \leq x \Longrightarrow m = x$, d.v.s.

om inget element i $X$ är större än $m$. (Observera att vi inte kräver att $m$ ska vara större än alla andra element.)

Exempel: I exemplen a) och b) ovan finns inga maximala element. I exempel c) är varje element maximalt. I exempel d) är delmängden $E$ av $E$ ett maximalt element.

I exempel e) ovan gäller följande: Om $(V,f_V)$ är ett maximalt element så är $V = N$, ty annars finns $x_o$ i $N$, sådant att $x_o \notin V$, och vi kan använda lemma (4.1.1) för $V$, $f_V$ och det delrum $V'$ som uppspänns av $V$ och $x_o$.

För att slutföra beviset av H-B's sats räcker det alltå att visa att den partiellt ordnade mängd $(X, \leq)$ som definierats i exempel e) ovan verkligen har något maximalt element.

För att göra detta behöver vi till att börja med ännu ett nytt begrepp, nämligen

Definition (4.3.3): En kedja $K$ i en partiellt ordnad mängd $(X, \leq)$ är en delmängd av $X$ sådan att om $x$, $y$ båda ligger i $K$, så är $x$ och $y$ jämförbara, dvs. då är antingen $x \leq y$ eller $y \leq x$. Om $X$ själv är en kedja sägs $X$ vara linjärt ordnad.

Exempel: I exempel a) ovan är varje delmängd, och speciellt hela $\mathbb{R}$ en kedja. Observera att varje delmängd av en kedja är en kedja. I exempel b) kan vi erhålla en kedja på följande sätt:

Låt $E$ vara en delmängd av $\mathbb{R}$, låt $v$ vara en växande funktion på $E$ och låt $K$ vara grafen av $v$, dvs.

$$K = \{x,v(x) \mid x \in E\}.$$

I exempel c) ovan är $K$ en kedja omm $K$ består av högst en punkt. I exempel d) är det "svårt" att explicit ange en kedja, men om mängden är ändlig är det lätt att se att de mängder vi får då vi tar bort en punkt i taget utgör en kedja.

I vårt huvudexempel e) slutligen är vi egentligen helt ointresserade av hur kedjorna ser ut.

För att förbereda läsaren på vad som komma skall så observerar vi nu att i de fall (dvs. i exemplen c) och d) ovan) där vi konstaterat att det finns maximala element, så är varje kedja uppåt begränsad.

4. Vad vi nu till sist behöver är ett villkor som garanterar att en given partiellt ordnad mängd verkligen har åtminstone ett maximalt element. Detta är nu något som vår hittillsvarande matematik och de axiom den bygger på helt enkelt inte räcker till för. Vad vi behöver är därför inget mindre än ytterligare ett axiom, nämligen det så kallade

urvalsaxiomet. Vi ska använda en version av detta axiom som brukar kallas Zorn's lemma, och som är den i praktiken mest användbara versionen.

Axiom: (Zorns lemma) Låt $(X,\leq)$ vara en partiellt ordnad mängd sådan att varje kedja i $X$ är uppåt begränsad. Då innehåller $X$ något maximalt element.

Vi vill använda Zorns lemma på den partiellt ordnade mängd som definierats i e) ovan, och ser att det fortfarande återstår en sak att bevisa, nämligen att varje kedja är uppåt begränsad. Vi ska formulera detta som ett lemma och konstaterar samtidigt att då vi bevisat lemmat så har vi också bevisat H-B's sats.

Lemma (4.4.1): Låt $K$ vara en kedja i den partiellt ordnade mängd $(X,\leq)$ som definierats i e) ovan. Då är $K$ uppåt begränsad.

Bevis: Låt $K$ vara en kedja i $X$. Enligt definitionen av den partiella ordningen i $X$ består $K$ av par $(V,f_V)$ sådana att om $(V,f_V)$ och $(W,f_W)$ båda tillhör $K$ så är antingen $V \subset W$ och $f_W|_V = f_V$ eller $W \subset V$ och $f_V|_W = f_W$. För att visa att $K$ har en övre begränsning ska vi alltså hitta ett delrum $U$ av $N$ sådant att $(V,f_V) \in K \Longrightarrow$ $\Longrightarrow V \subset U$ och en linjär funktional $f_U$ på $U$ (med $\|f_U\| = \|f\|$) sådan att $(V,f_V) \in K \Longrightarrow f_U|_V = f_V$. Vi börjar med att definiera $U$ genom

$$U = \bigcup_{(V,f_V)\in K} V$$

dvs. $U$ är föreningsmängden av alla de delrum som hör till element i kedjan. $U$ är uppenbarligen en delmängd av $N$, men det finns a priori ingen anledning varför $U$ skulle vara ett delrum. Redan om $K$ bara består av två element, dvs. om $V_1$ och $V_2$ båda är delrum av $V_3$ så är $V_1 \cup V_2$ i allmänhet inte ett delrum av $V_3$, men (och detta är poängen även i vårt allmännare fall) $V_1 \cup V_2$ är ett delrum omm $V_1 \subset V_2$ eller $V_2 \subset V_1$. För att visa att $U$ är ett delrum räcker det att visa att om $x$ och $y$ båda ligger i $U$, och om $a$ och $b$ är reella tal, så ligger $ax + by$ i $U$. Eftersom $x$ och $y$ ligger i $U$ finns det alltså delrum $V_x$ och $V_y$ sådana att $x \in V_x$ och $y \in V_y$. Eftersom $K$ är en kedja är då rummen $V_x$ och $V_y$ jämförbara, och efter en eventuell omdöpning kan vi anta att $V_x \subset V_y$, dvs. både $x$ och $y$ ligger i $V_y$. Men då ligger också uppenbarligen $ax + by$ i $V_y$ och därmed i $U$.

Vår nästa uppgift är nu att definiera $f_U$ och vi ska se att vi egentligen inte har något val. Om nämligen $x \in U$ ligger $x$ i något $V$ sådant att $(V,f_V) \in K$ och eftersom $f_U|_V = f_V$ så måste vi ha $f_U(x) = f_V(x)$. Nu är naturligtvis inte paret $(V,f_V)$ bestämt av $x$,

men vi ska se att värdet av funktionen $f_U$ i punkten $x$ inte beror av valet av $(V,f_V)$. Antag nämligen att $x$ också ligger i $W$, där $(W,f_W) \in K$, då är dels $V \subset W$ eller $W \subset V$, men dessutom är $f_V(x) = f_W(x)$. Och detta visar att vår konstruktion ovan verkligen ger en väldefinierad funktion på hela $U$. Man visar att $f_U$ är linjär på samma sätt som man visar att $U$ är ett delrum. Vad slutligen normen av $f_U$ beträffar, så konstaterar vi bara att om $x$ ligger i $U$ så ligger $x$ i något $V$ och då är

$$|f_U(x)| = |f_V(x)| \leq \|f_V\| \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\|, \quad \text{dvs.} \quad \|f_U\| \leq \|f\|,$$

och därmed är vårt lemma visat, vi kan använda Zorns lemma på vår partiellt ordnade mängd, denna har ett maximalt element som måste vara av typen $(N,f_N)$, $f_N$ är vår sökta funktional och Hahn-Banachs sats är bevisad. Q.

## Kap. 5. Några allmänna begrepp

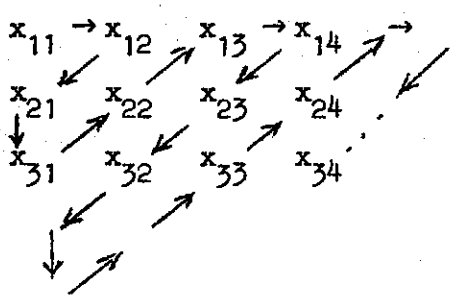
(Uppräkneliga mängder, separabla normerade rum, konvexa mängder, svag konvergens.)

1. Uppräkneliga mängder. En mängd $X$ sägs vara uppräknelig om det finns en funktion från de naturliga talen till $X$ vars värdeförråd är hela $X$. Detta är det samma som att säga att elementen i $X$ kan ordnas i en följd $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ så att alla element kommer med.

I detta sammanhang bör det också påpekas att även om den mängd som ska ordnas för uppräkning är en delmängd av de reella talen och därför redan är ordnade så kan de inte alltid uppräknas i den ordning de står. Exempelvis är mängden av alla hela tal uppräknelig, eftersom om vi räknar $0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots$, så kommer förr eller senare varje givet tal med i vår uppräkning. Däremot kan vi naturligtvis inte räkna upp dem från vänster, eftersom vi inte har någonstans att börja, och vi kan inte heller räkna upp de positiva först och de negativa sedan, för vi blir ju aldrig färdiga med de positiva. En viktig egenskap när det gäller uppräknelighet, är att om mängden $X$ består av en uppräknelig mängd av uppräkneliga mängder så är mängden $X$ själv uppräknelig. Detta framgår klart av nedanstående schema: $X = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\}$$
$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots\}$$
$$X_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots\}$$
$$\vdots$$

$X =$



dvs. $X = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{14}, \ldots, x_{41}, x_{51}, \ldots\}$

En konsekvens av detta, och att mängden av hela tal, mängden av halva tal, mängden av tredjedels tal, etc., alla är uppräkneliga, är att mängden av alla rationella tal är en uppräknelig mängd. Med ungefär samma schema som ovan kan man också visa att om mängderna $X$ och $Y$ båda är uppräkneliga så är även mängden $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ uppräknelig. Av detta, och av att mängden av rationella tal är uppräknelig följer att mängden av alla "rationella punkter i planet" $\mathbb{Q}^2$ är uppräknelig. Därmed är även $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^4$, etc. uppräkneliga mängder.

Kombinerar vi nu detta med vår observation ovan att en uppräknelig mängd av uppräkneliga mängder är uppräknelig, så betyder detta att mängden av alla ändliga följder av rationella tal, eller om man så vill, mängden av alla följder $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, sådana att alla $x_i$ är rationella tal och endast ändligt många av dem är skilda från 0, är en uppräknelig mängd. Naturligtvis är också varje delmängd av en uppräknelig mängd uppräknelig.

För att erhålla exempel på mängder som inte är uppräkneliga ska vi först visa att mängden av alla delmängder av de naturliga talen inte är en uppräknelig mängd. För att bevisa detta måste man anta motsatsen, d.v.s. att det finns en uppräkning av alla delmängderna och därefter påvisa en mängd som aldrig kom med. Låt därför $E_1, E_2, E_3, \ldots$ vara en uppräkning av (antar vi) alla delmängder av de naturliga talen. Låt sedan $E'$ vara mängden av alla de naturliga tal $n$ sådana att $n \notin E_n$. Det är då klart att $E'$ inte kan vara någon av de uppräknade mängderna, ty om $E' = E_k$ så betyder detta att $k \notin E'$, eftersom $k \notin E_k$ gäller då att $k \in E'$, d.v.s. att $k \in E_k$, d.v.s. att $k \notin E'$. Hur vi än vänder oss har vi alltså ändan bak; vi konstaterar därmed att $E'$ inte kan vara lika med $E_k$ och därmed kom aldrig mängden $E'$ med i vår uppräkning, vilket strider mot vårt ursprungliga antagande. Detta bevisar att mängden av delmängder av de naturliga talen inte är uppräknelig.

Det argument vi använt i detta bevis är en variant av "Russel's paradox" som bevisar att det inte finns någon "mängd av alla mängder".

Om vi nu observerar att varje delmängd av de naturliga talen kan representeras av en följd av nollor och ettor $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, där $x_n = 1$ om $n \in E$, medan $x_n = 0$ om $n \notin E$, så betyder detta att vi har bevisat att mängden av alla följder av nollor och ettor inte är uppräknelig. Slutligen konstaterar vi att varje följd av nollor och ettor entydigt representerar ett reellt tal genom

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots = x_1/10 + x_2/100 + \ldots .$$

Detta betyder att mängden av alla reella tal har en delmängd som inte är uppräknelig, men eftersom varje delmängd av en uppräknelig mängd är uppräknelig, betyder detta att inte heller mängden av alla reella tal är uppräknelig. Ovanstående tre exempel är några av standardexemplen på icke uppräkneliga mängder.

2. I termer av uppräknelighetsbegreppet ska vi nu införa en klass av normerade rum, som innehåller förutom alla ändligtdimensionella rum också vad som skulle kunna kallas de "minsta oändligtdimensionella normerade rummen".

Definition (5.2.1): Ett normerat rum $N$ sägs vara separabelt om det finns en uppräknelig delmängd $E$ sådan att $\overline{E} = N$.

Exempel:

a) Eftersom mängden av rationella tal $\mathbb{Q}$ är uppräknelig och $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, så är $\mathbb{R}$ ett separabelt rum.

b) Eftersom $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ så är också $\mathbb{R}^n$ separabelt.

c) $\ell^1$ är separabelt, ty låt $E_o(\mathbb{Q})$ vara mängden av alla följder av rationella tal sådana att endast ändligt många tal i följden är $\neq 0$. Vi såg i avsnitt (5.1) att denna mängd är uppräknelig. Å andra sidan är det också lätt att se att $\overline{E_o(\mathbb{Q})} = \ell^1$.

d) Uppenbarligen gäller att om $M$ är ett separabelt delrum av det normerade rummet $N$, så är även $\overline{M}$ ett separabelt delrum. Speciellt betyder detta att om $N$ är ett separabelt normerat rum, så är även Banachrummet $B_N$ (se Sats (3.3.6)) ett separabelt rum.

e) Om $N$ är ett separabelt rum, om $T: N \to M$ är en begränsad linjär avbildning, och om $\overline{\mathrm{Im}(T)} = M$ så är $M$ separabelt.

f) Det normerade rummet $C[0,1]$ är ett separabelt rum, ty enligt Weierstrass' approximationssats är mängden av alla polynom (med rationella koefficienter, om så önskas) tät i $C[0,1]$ och eftersom vår uppräkneliga mängd $E_o(\mathbb{Q})$ kan uppfattas som precis mängden av polynom med rationella koefficienter $(\{x_1, x_2, \ldots\} = x_1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot t^2 + \ldots)$ så är $\overline{E_o(\mathbb{Q})} = C[0,1]$.

g) På ungefär samma sätt som i Exempel c) ovan kan man även visa att även rummen $\ell^2$, $c_o$ och $c$ är separabla. Med ungefär samma resonemang kan man också visa att om $N$ är ett separabelt normerat rum, så är även t.ex. rummet $\ell^1(N)$ av absolutkonvergenta serier i $N$, och rummet $C([0,1],N)$ av kontinuerliga funktioner på det slutna intervallet $[0,1]$ med värden i $N$ ett separabelt rum. (Om $f \in C([0,1],N)$ sätter vi $\|f\|_{C([0,1],N)} = \max\{\|f(t)\|_N \mid 0 \leq t \leq 1\}$.)

Övning: Bevisa några väl valda delar av ovanstående påståenden.

Av e) ovan (som f.ö. är mycket lätt att visa) följer bl.a. att om $M$ är ett slutet delrum av det separabla rummet $N$, så är kvotrummet $N/M$ också separabelt. Egendomligt nog är det faktiskt mer komplicerat att visa att även ett delrum av ett separabelt rum är separabelt. Vi ska visa detta som en följd av att i själva verket är varje delmängd $E$ av ett separabelt rum $N$ en separabel mängd - i den meningen att det finns en uppräknelig delmängd $X$ av $E$ sådan att $\overline{X} \supset E$. Samtidigt bör det påpekas att den givna mängden $E$ kan vara helt utan linjär struktur, och att även den linjära strukturen hos det normerade rummet $N$ är helt utan betydelse. Detta gör det naturligt att införa följande

Definition (5.2.2): Ett metriskt rum $(X,d)$ är en mängd $X$ tillsammans

med en reellvärd funktion $d$ på $X \times X$ med följande egenskaper:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (triangelolikheten).

Anm. Eftersom $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2 \cdot d(x,y)$ ser vi att $d(x,y) > 0$ om inte $x = y$.

Exempel:

a) Ett normerat rum $N$ är ett metriskt rum om vi sätter $d(x,y) = \|x - y\|$.

b) En delmängd $X'$ av ett metriskt rum är ett metriskt rum om vi sätter $d'(x',y')$ $(x',y' \in X') = d(x',y')$. Speciellt betyder detta att varje delmängd av ett normerat rum är ett metriskt rum.

c) Mängden $\mathbb{R}^{\infty}$ av alla följder av reella tal är ett metriskt rum om vi definierar för $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ och $\underline{y} = \{y_1, y_2, \dots\}$,

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot (|x_k - y_k| / (1 + |x_k - y_k|)).$$

I metriska rum kan man på samma sätt som i normerade rum införa en topologi genom att definiera (jfr. Definition (1.2.1) ) öppna klot, öppna mängder, konvergenta följder, hopningspunkter och slutna höljen. Den vanliga definitionen av kontinuerliga reellvärda funktioner på en delmängd av $\mathbb{R}$ kan också användas för att definiera kontinuerliga funktioner mellan metriska rum. På samma sätt som för normerade rum kan man också definiera cauchyföljder i ett metriskt rum, och fullständiga normerade rum. Dessutom kan man också visa att varje metriskt rum kan inbäddas isometriskt i ett fullständigt metriskt rum, där det är tätt. Naturligtvis sägs också ett metriskt rum vara separabelt om det innehåller en tät uppräknelig delmängd. Vi kan nu visa följande

Sats (5.2.3): Varje delmängd av ett separabelt metriskt rum är ett separabelt metriskt rum.

Bevis: Låt $E$ vara en delmängd av det metriska rummet $(M,d)$ och låt $X$ vara en uppräknelig tät delmängd av $M$. Vi skriver $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ och vi definierar

$$B_{ik} = \{m \in M \mid d(x_i,m) < 1/k\}.$$

Mängden av alla dessa klot är uppräknelig, och vi bildar en uppräknelig delmängd av $E$ på följande sätt:

Om $B_{ij} \cap E$ är icke-tom väljs $e_{ij}$ godtyckligt ur $E \cap B_{ij}$, om $B_{ij} \cap E$ är tom väljs $e_{ij}$ godtyckligt i $E$. Mängden $E'$ av alla dessa $\{e_{ij}\}$ är då en uppräknelig delmängd av $E$, och vi ska visa att den också är tät. Vi ska alltså visa att för varje $e \in E$ så finns en följd ur $E'$ som konvergerar mot $e$. Men eftersom mängden $X$ är tät i $M$, så kan vi

för varje naturligt tal $k$ hitta $x_{i_k}$ så att $d(e,x_{i_k}) < 1/k$. Men då är

$$d(e,e_{ik}) \leq d(e,x_{i_k}) + d(x_{i_k},e_{ik}) < 2/k,$$

eftersom $E \cap B_{ik}$ ej är tom, och detta visar att $e \in \overline{E'}$ d.v.s. att $E'$ är tät i $E$.

Med hjälp av Sats (5.2.3) kan vi nu visa att rummet $\ell^\infty$ ej är separabelt. För att göra detta ska vi använda vår gamla välbekanta mängd av alla följder av nollor och ettor. Vi ska beteckna denna mängd med $\mathbb{D}$, vi noterar att $\mathbb{D}$ kan uppfattas som en delmängd av $\ell^\infty$, samt att om $d$ och $d'$ ligger i $\mathbb{D}$, så är $\|d - d'\|_\infty = 1$ om ej $d = d'$. Men det betyder att ingen äkta delmängd av $\mathbb{D}$ kan vara tät i $\mathbb{D}$, och eftersom $\mathbb{D}$ ej är uppräknelig så är $\mathbb{D}$ ej separabel, vilket enligt Sats (5.2.3) innebär att $\ell^\infty$ ej kan vara separabelt.

Övning (5.2.4): Låt $M$ vara ett metriskt rum. En följd $\underline{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ ur $M$ sägs vara en cauchyföljd om $d(x_m,x_n) \to 0$ då $m$ och $n$ går mot $\infty$, d.v.s. om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett naturligt tal $N$ så att $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ om både $m$ och $n$ är större än $N$. Två cauchyföljder $\underline{x}$ och $\underline{y}$ sägs vara ekvivalenta om $d(x_k,y_k) \to 0$. Vi ska beteckna mängden av ekvivalentsklasser av cauchyföljder ur $M$ med $\underline{M}$. Visa att funktionen $\underline{d}: \underline{M} \times \underline{M} \to \mathbb{R}$ given av

$$\underline{d}(\underline{x},\underline{y}) = \lim d(x_k,y_k)$$

är en metrik på $\underline{M}$.

Övning (5.2.5): Låt $\underline{x}$ vara en cauchyföljd ur $\underline{M}$, d.v.s. $\underline{x} = \{\underline{x}_k\}_{k=1}^\infty$ av (ekvivalensklasser av) cauchyföljder ur $M$. Låt nu för varje $k$, $\{x_{ik}\}_{i=1}^\infty$ vara en cauchyföljd ur $M$ som representerar ekvivalensklassen $\underline{x}_k$, och låt $\underline{y}$ vara den ekvivalensklass som representeras av följden $\{y_k\} = \{x_{kk}\}$. Visa att följden $\underline{x}_k$ av cauchyföljder konvergerar mot cauchyföljden $\underline{y}$ i metriken $\underline{d}$.

Detta visar att $\underline{M}$ är ett fullständigt metriskt rum, och eftersom $M$ kan inbäddas isometriskt i $\underline{M}$ såsom mängden av konstanta följder ger övningarna (5.2.4) och (5.2.5) tillsammans en isometrisk inbäddning av ett givet metriskt rum $M$ i ett fullständigt metriskt rum. Observera att detta även ger ett nytt bevis av att varje normerat rum kan inbäddas i ett Banachrum.

Övning (5.2.6): Visa att om $N^*$ är separabelt så är även $N$ separabelt.

Ledning: Låt $\{f_k\}$ vara en tät uppräknelig delmängd av $N^*$ och välj en följd $\{x_k\}$ ur $N$ så att $\|x_k\| \leq 1$, och $\langle f_k,x_k\rangle > \frac{\|f_k\|}{2}$. Låt $E$ vara mängden av alla $x$ i $N$ som kan skrivas som en ändlig summa $\Sigma r_k x_k$ där alla $r_k$ är rationella. Då är mängden $E$ uppräknelig. Visa med hjälp av Hahn-Banachs sats att $\overline{E} = N$.

De flesta normerade rum som studeras inom vanlig analys är separabla och separabla rum är också ofta lättare att handskas med än icke-separabla (se t.ex. Sats (5.5.3) nedan). Däremot är definitionen av separabilitet ofta otymplig i tillämpningar och det är angeläget att ha alternativa beskrivningar av separabla rum. En sådan beskrivning ges av följande

Kriterium (5.2.7): Låt $N$ vara ett Banachrum. Då är

$N$ separabelt $\Longleftrightarrow$ det finns en följd, ev. ändlig, av delrum $\{M_k\}$, sådana att $M_k \subset M_{k+1}$, $\dim(M_k) = k$ och rummet $V = \cup M_k$ är tätt i $N$.

Bevis: $\Longrightarrow$. Låt $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en uppräknelig tät delmängd av $N$. Vi definierar $M_n'$ som det delrum av $N$ som uppspänns av $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Vi konstaterar då först att $X \subset \cup M_n' = V$, och eftersom $\overline{X} = N$, så är a fortiori $\overline{V} = N$. Vi konstaterar sedan att $M_n' \subset M_{n+1}'$ och att antingen är $M_{n+1}' = M_n'$ eller så är $\dim(M_{n+1}') = \dim(M_n') + 1$. Detta betyder att vi kan välja en delföljd $M_{n_k}'$ ur $M_n'$ så att $\dim(M_{n_k}') = k$. Därefter sätter vi $M_k = M_{n_k}'$, och vi har erhållit den sökta följden.

$\Longleftarrow$. Vi konstaterar först att varje ändligt-dimensionellt rum är separabelt, ty om $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ är en bas så är mängden av alla $q_1 e_1 + q_2 e_2 + \ldots + q_n e_n$ där $q_i$ rationella, en tät uppräknelig delmängd. Låt nu $M_k$ vara den givna följden och låt $X_1, X_2, \ldots$ vara täta uppräkneliga delmängder av $M_1, M_2, \ldots$. Enligt vad vi visade i sektion 5.1 så är då $X = \cup X_k$ uppräknelig, och vidare är $\overline{X}_k = M_k \subset \overline{X}$, vilket betyder att $M_k \subset \overline{X}$, men då är även $\overline{\cup M_k} \subset \overline{X}$, d.v.s. $\overline{X} = N$.

Övning (5.2.8): Visa på ungefär samma sätt som ovan följande påstående: Om $M$ är ett delrum av ett separabelt Banachrum, så finns en följd av delrum $M = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ sådana att $\dim(M_k / M_{k-1}) = 1$, och så att $\cup M_k$ är ett tätt delrum av $B$.

Övning (5.2.9): (Hahn-Banach's sats för separabla rum. Alternativt bevis utan användning av Zorn's lemma).

Låt $B$ vara ett Banachrum, låt $M$ vara ett delrum av $B$, och låt $f$ vara en begränsad linjär funktional på $M$, varvid vi för enkelhets skull kan anta att $\|f\| = 1$. Låt $M_k$ vara en följd av delrum med de egenskaper som anges i Övning (5.2.8) och sätt $N = \cup M_k$. Visa med induktion och Lemma (4.1.1) att det finns en följd linjära funktionaler

$$f_i : M_i \to \mathbb{R}$$

sådana att $f_i|_{M_{i-1}} = f_{i-1}$, och så att $\|f_i\| = 1$.

Eftersom varje punkt i $N$ ligger i något $M_k$ kan vi definiera en linjär funktional $\tilde{f} : N \to \mathbb{R}$ genom $\langle \tilde{f}, x \rangle_N = \langle f_k, x \rangle_{M_k}$ om $x \in M_k$.

Enligt ovanstående konstruktion beror detta värde ej på i vilket delrum $M_k$ som punkten $x$ antas ligga, d.v.s. $\tilde{f}$ är väldefinierad på $N$, och det är lätt att se att $\|\tilde{f}\| = 1$. Använd kontinuiteten hos $\tilde{f}$ (eller vilket är detsamma Lemma (3.2.5)) för att visa att $\tilde{f}$ kan utvidgas till hela $B$.

3. Vårt nästa begrepp som är av geometrisk natur, ges i följande

Definition (5.3.1): Låt $V$ vara ett vektorrum. En delmängd $C$ av $V$ sägs vara konvex om

$$x,y \in C,\ 0 \leq t \leq 1 \implies t\cdot x + (1-t)\cdot y \in C.$$

Exempel på, och egenskaper hos konvexa mängder:

a) En delmängd $C$ av $\mathbb{R}$ är konvex endast om $C$ är ett intervall (tomt, ändligt eller oändligt).

b) En delmängd av $\mathbb{R}^2$ är konvex om den skär varje rät linje i ett intervall. (Detta är endast en verbal omformulering av definitionen av konvexitet, och gäller därmed allmänt i alla vektorrum.)

c) Ett delrum av ett vektorrum är en konvex mängd.

d) I ett normerat rum är det öppna enhetsklotet (d.v.s. $\{x \mid \|x\| < 1\}$) en konvex mängd.

e) I ett normerat rum är tillslutningen av en konvex mängd också konvex.

f) Om $C_1$ och $C_2$ är konvexa, så är $C_1 \cap C_2$ konvex.

g) Om $C$ och $D$ är konvexa, så är

$$C - D = \{x \mid x = c - d,\ c \in C,\ d \in D\}$$

en konvex mängd. Om vi observerar att en enpunktsmängd är konvex, innebär detta bl.a. att $-C = \{0\} - C$, och "$C + a$" $= C - \{-a\}$ är konvexa.

h) Låt $V$ och $W$ vara vektorrum och låt $T: V \to W$ vara en linjär avbildning. Om $C$ är en konvex mängd i $V$ och $D$ en konvex mängd i $W$, så är

$$T(C) = \{x \in W \mid x = Tc,\ c \in C\} \quad \text{konvex i } W \text{ och}$$

$$T^{-1}(D) = \{x \in V \mid Tx = d,\ d \in D\} \quad \text{konvex i } V.$$

i) Om $E$ är en godtycklig delmängd av ett vektorrum $V$, så kallas den minsta konvexa delmängd av $V$ som innehåller $E$, för det konvexa höljet av $E$. Vi ska skriva $C(E)$ för att beteckna det konvexa höljet av $E$. Eftersom skärningen av en godtycklig familj konvexa mängder är konvex (bevisas som f) ovan), så kan $C(E)$ definieras som skärningen av alla konvexa mängder i $V$ som innehåller $E$.

j) Om $E$ är en godtycklig delmängd av ett vektorrum $V$, ska vi definiera

$$C_N(E) = \{v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{N} t_i e_i, \quad e_i \in E, \ t_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} t_i = 1\} .$$

Vi observerar nu att $C_N(E) \subset C_{N+1}(E)$, att varje konvex mängd som innehåller $E$ också måste innehålla alla $C_N(E)$, samt att $\cup C_N(E)$, $N \in \mathbb{N}$, är konvex. $\cup C_N(E)$ är konvex, ty om $v \in C_N(E)$, $w \in C_M(E)$, och om $x = t \cdot v + (1-t)w$, $0 \leq t \leq 1$, så ligger $x$ i $C_{N+M}(E)$. Detta betyder att $C(E) = \cup C_N(E)$.

Övning: Bevisa några väl valda delar av ovanstående påståenden. (För beviset av exempel d) måste man använda villkoren på en norm, alla de övriga bevisen utnyttjar endast definitionen av konvexitet.)

Som framgår av ovanstående definition och exempel kan konvexa mängder definieras i allmänna vektorrum. De är dock lättare att studera i normerade rum, och en anledning till detta är nedanstående sats som vi ger utan bevis. (Beviset är visserligen egentligen endast en enkel tillämpning av Hahn-Banachs sats, men det kräver en till sitt geometriska innehåll något starkare version av denna.)

Sats (5.3.2): Låt $C$ vara en öppen konvex mängd i ett normerat rum $N$ och låt $x$ vara en punkt i $N$ utanför $C$. Då finns $f \in N^*$ så att

$$f(x) \leq \inf \{f(c) \mid c \in C\} .$$

Korollarium (5.3.3): Låt $C$ och $D$ vara öppna konvexa mängder i ett normerat rum, sådana att $C \cap D = \emptyset$. Då finns en linjär funktional $f \in N^*$, så att

$$\inf \{f(c) \mid c \in C\} \geq \sup \{f(d) \mid d \in D\} .$$

Bevis: Vi observerar först att

$$C \cap D = \emptyset \iff 0 \notin C - D .$$

Detta betyder enligt sats (5.3.2) att det finns $f \in N^*$ så att

$$f(c) - f(d) = f(c-d) \geq f(0) = 0$$

för alla $c \in C$ och $d \in D$, men detta är precis vad vi behöver bevisa.

Övning (5.3.4): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $C$ vara en öppen konvex mängd i $N$, sådan att $0 \in C$. Vi definierar en funktion $p$: $N \to \mathbb{R}$ genom

$$p(x) = \inf \{t \mid t > 0 \text{ och } \tfrac{1}{t} \cdot x \in C\} .$$

Visa följande egenskaper hos funktionen $p$.

(i) $p(ax) = ap(x)$, om $a \in \mathbb{R}^+$ och $x \in N$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(iii) $p(x) < 1 \implies x \in C$.

Jfr definitionen av norm. Funktionen $p$ (eller kanske bättre $p_C$) kallas den till $C$ hörande Minkowski-funktionalen.

En funktion med egenskaperna (i) och (ii) i övning (5.3.4) kallas en konvex funktional.

Övning (5.3.5): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $p: N \to \mathbb{R}^+$ vara en kontinuerlig konvex funktional. Sätt

$$C = \{x \in B \mid p(x) < 1\} .$$

Visa att $C$ är öppen och konvex samt att $p$ är den till $C$ hörande Minkowski-funktionalen.

Övning (5.3.6): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $M$ vara ett hyperplan i $N$, dvs. $\dim (N/M) = 1$. Låt vidare $p: N \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig konvex funktional. Låt slutligen $f: M \to \mathbb{R}$ vara en linjär funktional sådan att

$$f(x) \leq p(x) , \qquad \text{då } x \in M .$$

Visa att det finns en linjär funktional $\tilde{f}$ på $N$, sådan att $\tilde{f}|_M = f$, och så att $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ då $x \in N$.

Ledning: Läs först igenom beviset av lemma (4.1.1). Välj sedan $x_o \in N$, $x_o \notin M$. Det gäller att bestämma $a = f(x_o)$, så att

$$t \cdot a + f(m) \leq p(tx_o + m)$$

för alla $t$ i $R$ och alla $m \in M$. Eftersom man får dividera med det positiva talet $|t|$ är detta ekvivalent med att

$$a - f(m) \leq p(x_o - m) \quad \text{och} \quad -a + f(n) \leq p(-x_o + n) .$$

Man ska alltså finna $a$ sådant att

$$f(n) - p(-x_o + n) \leq a \leq f(m) + p(x_o - m) .$$

Att detta går visas sedan på samma sätt som i beviset av lemma (4.1.1).

Övning (5.3.7): (Hahn-Banachs för konvexa funktionaler) Låt $N$ vara ett normerat rum, låt $p: V \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig konvex funktional, låt $M$ vara ett delrum av $V$ och låt $f: M \to \mathbb{R}$ vara en linjär funktional, sådan att $f(x) \leq p(x)$ då $x \in M$. Visa antingen med hjälp av Zorns lemma eller som i övning (5.2.9) (om $N$ antas separabelt) att det finns en linjär funktional $\tilde{f}: N \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) \leq p(x)$ för alla $x \in N$, och så att $\tilde{f}|_M = f$.

Övning (5.3.8): Bevisa sats (5.3.2).

Ledning: Antag först att $0 \in C$ och låt $p$ vara Minkowski-funktionalen till $C$. Sätt $M = \{m \mid m = tx, t \in \mathbb{R}\}$, och definiera $f$ på $M$ genom $f(tx) = -t$. Utvidga denna funktional till hela $N$ med hjälp av H-B's sats för konvexa funktionaler och visa att den på så sätt erhållna funktionalen uppfyller fordringarna i satsen. Om $0 \notin C$, så tag $c \in C$ godtyckligt och använd det just visade på mängden $C - c$ och punkten $x - c$.

Övning (5.3.9): Låt $N$ vara ett normerat rum, låt $E$ vara en godtycklig mängd i $N$ och låt $F$ vara en öppen mängd i $N$. Visa att mängden $E - F$ är öppen. Visa med hjälp härav att det i korollarium (5.3.3) räcker att förutsätta att en av mängderna är öppen.

Övning (5.3.10): Låt $C$ vara en sluten konvex mängd i ett normerat rum $N$ och låt $x$ vara en punkt i $N$ utanför $C$. Visa att det då finns $f \in N^*$ så att

$$f(x) < \inf \{f(c) \mid c \in C\} .$$

Ledning: Eftersom $x$ inte tillhör den slutna mängden $C$, så finns ett öppet klot $B(x,r)$, så att $C \cap B(x,r) = \emptyset$. Använd övning (5.3.9).

4. Vi ska avsluta detta kapitel med att studera det begrepp som ges i nedanstående definitioner.

Definition (5.4.1): Låt $B$ vara ett Banachrum med dualt rum $B^*$. Låt $\{x_k\}$ vara en följd ur $B$. Följden $\{x_k\}$ sägs vara svagt konvergent mot $x$ om för varje $f \in B^*$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x) .$$

Definition (5.4.2): Låt $B$ vara ett Banachrum med dualt rum $B^*$. Låt $\{f_k\}$ vara en följd ur $B^*$. Följden $\{f_k\}$ sägs vara svagt *-konvergent mot $f$ om för varje $x$ i $B$,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) .$$

Exempel: a) Vi börjar med att rekapitulera definitionen av den "naturliga basen" $E = \{\underline{e}_k\}_{k=0}^{\infty}$ i $c_o$ (jfr sektion 2.2), där

$$\underline{e}_k = \{\delta_{kn}\}_{n=0}^{\infty} \text{ (där } \delta_{kn} = 1 \text{ om } k = n, \ \delta_{kn} = 0 \text{ f.ö.)}.$$

Vi konstaterar nu först att, om $i \neq j$, så är $\|\underline{e}_i - \underline{e}_j\|_{c_o} = 1$, så att följden $E = \{\underline{e}_k\}$ är ej konvergent i $c_o$. Om nu $\underline{f} = \{f_k\} \in c_o^* = \ell^1$ så är $\Sigma |f_k| < \infty$, vilket speciellt betyder att $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$.
Men detta är precis det samma som att för varje $\underline{f} \in c_o^*$ så är $\lim_{k\to\infty} \underline{f}(\underline{e}_k) = 0$, dvs. följden $E$ går svagt mot $0$.
b) Följden $E$ kan även uppfattas som en följd i $\ell^1$, $\ell^2$ eller $\ell^\infty$. I dessa rum är som i $c_o$, $\|e_i - e_j\| \geq 1$ om $i \neq j$ så att $E$ inte är (norm-)konvergent. Med ungefär samma resonemang som i a) kan man emellertid visa att följden $E$ är

(i) svagt *-konvergent mot $0$ i $\ell^1$,

(ii) svagt konvergent (= svagt *-konvergent) mot $0$ i $\ell^2$ och

(iii) svagt *-konvergent mot $0$ i $\ell^\infty$.

(Visa detta som övning.)

c) Vi definierar $\underline{f} \in \ell^\infty$ genom $\underline{f} = \{f_k\}_{k=0}^\infty$ där

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{om } k \text{ jämnt} \\ 0 & \text{om } k \text{ udda.} \end{cases}$$

Då är följden $\underline{f}(\underline{e}_k)$ ej konvergent vilket visar att $E$ ej är svagt konvergent i $\ell^1$.

Övning (5.4.3): a) Vi definierar en följd $F$ ur $\ell^1$, genom $F = \{\underline{f}_n\}_{n=0}^\infty$, där $\underline{f}_n = \{f_{nk}\}_{k=0}^\infty$ och $f_{nk} = 1/n$ om $0 \leq k < n$, 0 f.ö. Visa att följden $F$ är svagt $*$-konvergent mot 0.

b) Vi definierar en följd $F$ ur $\ell^2$ ungefär som i a) men med den skillnaden att $f_{nk} = 1/\sqrt{n}$ om $0 \leq k < n$, och 0 f.ö. Visa att denna följd konvergerar svagt mot 0 i $\ell^2$.

c) Låt $B$ vara Banachrummet $C[0,1]$. (Vi har hittills sysslat mycket litet med rummet $C[0,1]$, detta mycket därför att vi inte bestämt $C[0,1]^*$.) Om $a$ är ett reellt tal, $0 \leq a \leq 1$, definierar vi en funktional $\delta_a$ på $C[0,1]$ genom $\delta_a(f) = f(a)$. Visa att $\delta_a \in C[0,1]^*$, dvs. att $\delta_a$ är linjär och begränsad.

Vidare definierar vi funktionaler $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ på $C[0,1]$ genom

$$I_n(f) = n \cdot \int_0^{1/n} f(x)dx .$$

Visa att $I_n \in C[0,1]^*$, samt att följden $I_n$ är svagt $*$-konvergent mot $\delta_0$.

5. Vi ska avsluta detta kapitel med att visa några satser som i viss mån sammanknyter de begrepp som införts i kapitlet. Samtidigt visar dessa satser att även om begreppen svag konvergens, och svag $*$-konvergens påminner mycket om varandra, så har de dock i vissa avseenden helt olika egenskaper. Vår första sats gäller dock för såväl svag konvergens som svag $*$-konvergens.

Sats (5.5.1): Låt $B$ vara ett Banachrum med dualrummet $B^*$. Låt vidare följden $\{x_k\}$ ur $B$ vara svagt konvergent mot $y$, och låt följden $f_k$ ur $B^*$ vara svagt $*$-konvergent mot $g$. Då är

a) $\|y\| \leq \underline{\lim}\, \|x_k\|$ och

b) $\|g\| \leq \underline{\lim}\, \|f_k\|$.

Bevis: Vi bevisar först b) och konstaterar att om $g = 0$ så är påståendet sant. I annat fall så finns enligt definitionen av normen i $B^*$, för varje $\varepsilon > 0$, något $x \in B$, $\|x\| \leq 1$, så att $|g(x)| \geq \|g\| - \varepsilon$. Men eftersom $\lim f_k(x) = g(x)$, så är för $k$ tillräckligt stort,

$$|f_k(x)| > \|g\| - 2\varepsilon ,$$

vilket visar att $\|f_k\| > \|g\| - 2\varepsilon$. Beviset av a) är analogt, dock använder vi i stället för definitionen av norm, H-B's sats för att finna en funktional $f$, sådan att $\|f\| = 1$, och $f(y) = \|y\|$.

Vår nästa sats bygger på sats (5.3.2) och gäller endast för svag konvergens.

Sats (5.5.2): Låt $C$ vara en sluten konvex mängd i Banachrummet $B$, och låt $\{x_k\}$ vara en svagt konvergent följd ur $C$ med gränspunkt $y$. Då ligger $y$ i $C$.

Bevis: Vi ska använda sats (5.3.2) och eftersom denna redan är given utan bevis, så påstår vi, också utan bevis, att den kan skärpas därhän att om $C$ är sluten, konvex och $x \notin C$, så finns $f \in B^*$ så att

$$f(x) < \inf \{f(c) \mid c \in C\} .$$

Men detta betyder att varje punkt i $B$ som inte ligger i $C$ kan avskäras från $C$ och därmed från följden $\{x_k\}$ av en linjär funktional ur $B^*$, och detta innebär att $y$ måste ligga i $C$.

I vår sista sats, slutligen, ska vi återknyta bekantskapen med det första begrepp vi införde i detta kapitel, nämligen separabilitet. Vi vill också påpeka att denna sats ej gäller för svag konvergens.

Sats (5.5.3): Låt $B$ vara ett separabelt Banachrum, och låt $F = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd ur $B^*$ (följden $F$ sägs vara begränsad om det finns ett reellt tal $M$, så att $\|f_k\| \leq M$ för alla $k$.) Då kan man utvälja en svagt $*$-konvergent delföljd $F'$ ur $F$.

Före beviset av sats (5.5.3) ska vi bevisa några lemmor. Det första av dessa är också användbart och av intresse i sig självt.

Lemma (5.5.4): Låt $B$ vara ett Banachrum och låt $N$ vara ett tätt delrum av $B$. Låt vidare $F$ vara en begränsad följd ur $B^*$ och antag att för alla $n$ i $N$, så är

$$\lim_{k\to\infty} f_k(n) = g(n) .$$

Då ligger $g$ i $B^*$ och följden $F$ är svagt $*$-konvergent mot $g$.

Bevis: Vi ska först visa att $g(m+n) = g(m) + g(n)$ och att $g(an) = ag(n)$. Eftersom $f_k(x)$ går mot $g(x)$ för varje $x$ i $N$, så kan vi välja $K_m$, $K_n$ och $K_{m+n}$ så att $|f_k(m) - g(m)| < \varepsilon/3$ om $k > K_m$ och motsvarande för $n$ och $m+n$. Väljer vi nu $K = \max(K_m, K_n, K_{m+n})$ så är

$$|g(m+n) - g(m) - g(n)| =$$

$$= |g(m+n) - f_k(m+n) + f_k(m+n) - f_k(m) + f_k(m) - g(m) - f_k(n) + f_k(n) - g(n)| \leq$$

$$\leq |g(m+n) - f_k(m+n)| + |f_k(m) - g(m)| + |f_k(n) - g(n)| + |f_k(m+n) - f_k(m) - f_k(n)| <$$

$$< 3 \cdot (\varepsilon/3) + 0 = \varepsilon , \quad \text{om } k > K .$$

Detta visar att $g(m+n) - g(m) - g(n) = 0$.

På motsvarande sätt väljs $K_n$, $K_{an}$ och $K = \max(K_n, K_{an})$ och man visar att $g(an) - ag(n) = 0$. Detta visar att $g$ är linjär på $N$. Vidare är för alla $n$ i $N$,

$$|g(n)| = \lim |f_k(n)| \leq M \cdot \|n\|,$$

vilket visar att $g$ är begränsad. Enligt lemma (3.2.5) så finns då $\bar{g}$ på $\bar{N}$ $(= B)$ entydigt så att $\bar{g}|_N = g$. Om vi nu stryker över strecket över $g$, så kan vi alltså uttrycka saken så att $g \in B^*$, och fortfarande är $\|g\| \leq M$. Det återstår att visa att $f_k(x) \to g(x)$ då $k \to \infty$ för alla $x$ i $B$. Tag därför $x$ i $B$ och välj $\varepsilon > 0$. Eftersom $N$ är tätt i $B$, så kan vi hitta $n$ i $N$, så att $\|x - n\| < \varepsilon/3M$, och eftersom vi vet att $f_k(n) \to g(n)$ så finns det $K$, så att $|f_k(n) - g(n)| < \varepsilon/3$ om $k > K$. Då är

$$\begin{aligned} |g(x) - f_k(x)| &= |g(x) - g(n) + g(n) - f_k(n) + f_k(n) - f_k(x)| \leq \\ &\leq |g(x) - g(n)| + |g(n) - f_k(n)| + |f_k(n) - f_k(x)| < \\ &< M \cdot \|x - n\| + \varepsilon/3 + M \cdot \|n - x\| < \varepsilon, \text{ om } k > K, \end{aligned}$$

och detta visar lemmat.

I vårt andra lemma ska vi visa att sats (5.5.3) är sann om Banachrummet $B$ är ändligt-dimensionellt.

Lemma (5.5.5): Låt $M$ vara ett ändligt-dimensionellt normerat rum, och låt $F$ vara en begränsad följd ur $M^*$. Då kan man utvälja en svagt $*$-konvergent delföljd $F'$ ur $F$.

Bevis: För att förenkla beteckningarna ska vi anta att $\|f_k\| \leq 1$, för alla $f_k$ i $F$. Låt nu $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en bas i $M$, och vi kan anta att även $\|e_i\| \leq 1$, för alla $e_i$ i basen. Vi konstaterar sedan att talföljden $\{f_k(e_1)\}_{k=1}^{\infty}$ är begränsad. Enligt Bolzano-Weierstrass sats kan vi utvälja en konvergent delföljd $\{f_{k_i}(e_1)\}_{j=1}^{\infty}$. Låt detta vara en ny följd $F_1 = \{f_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$, där $f_{1j} = f_{k_j}$ ovan.

Ur $F_1$ kan vi nu utvälja en konvergent delföljd $F_2 = \{f_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$, så att $f_{2j}(e_2)$ är konvergent. Vi utväljer sedan konvergenta delföljder $F_3, F_4, \ldots, F_n$. $F_n$ är vår sökta följd $F'$. Antag nu att

$$g(e_i) = \lim_{k \to \infty} f'_k(e_i) = a_i.$$

Vi definierar $g$ på hela $M$ genom linearitet, dvs.

$$g(x) = g(t_1e_1 + t_2e_2 + \ldots + t_ne_n) = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n.$$

Då är $g$ en linjär funktional på hela $M$, och för att visa att $f'_k(x) \to g(x)$ för alla $x$ i $M$, kan vi använda ungefär samma resonemang som i lemma (5.5.4). Härav följer också att $|g(x)| = \lim |f_k(x)| \leq \|x\|$, dvs. att $\|g\| \leq 1$. Detta visar lemmat.

Till sist kan vi nu ge

Bevis av sats (5.5.3): Låt $M_k$ vara en följd av delrum som uppfyller villkoren i lemma (5.2.7) och låt $F$ vara den givna följden. Ur följden $F|_{M_1} = \{f_k|_{M_1}\}$ kan vi nu enligt lemma (5.5.5) utvälja en delföljd $F_1$ så att $F_1|_M$ konvergerar för alla $x$ i $M_1$. Ur $F_1$ kan vi sedan utvälja en delföljd $F_2$ som konvergerar för alla $x$ i $M_2$, etc. Detta ger oss en följd utav följder $F = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \ldots$, där

$F_0 = \{f_{0k}\} = \{f_k\}$, $F_1 = \{f_{1j}\} = \{f_{k_j}\}$, $F_2 = \{f_{2j}\} = \{f_{1k_j}\}$

etc. Låt nu $F'$ vara "diagonalföljden" $f'_k = f_{kk}$ enligt ovan. Eftersom följden $F'$ från och med index $k$ är en delföljd av $F_k$, så konvergerar $F'$ för alla $x$ i $M_k$. Detta betyder alltså att $F'$ konvergerar för alla $x$ i $\cup M_k = N$. Men eftersom $N$ är tätt i $B$, så kan vi använda lemma (5.5.4) och konstaterar att följden $F'$ är svagt $*$-konvergent. Detta bevisar satsen.

## Kap. 6. Hilbertrum

1. I detta kapitel ska vi införa, och inleda ett studium av en klass av normerade rum som visat sig speciellt användbara för tillämpningar inom fysiken, och som också är de rum där ett geometriskt betraktelsesätt visat sig mest framgångsrikt. Den klass av rum vi ska införa kallas inre-produktrum, ett fullständigt inre-produktrum kallas Hilbertrum. Vi börjar med följande

Definition (6.1.1): Låt $V$ vara ett vektorrum. En inre-produkt i $V$ är en reellvärd funktion på $V \times V$. Om $x$ och $y$ ligger i $V$ brukar funktionens värde i punkten $(x,y)$ skrivas $(x|y)_V$ eller enklare $(x|y)$. Denna funktion ska ha följande egenskaper:

(i) $(x|y) = (y|x)$ (symmetrisk)

(ii) $(ax + by|z) = a(x|z) + b(y|z)$ $x,y,z \in V$, $a,b \in \mathbb{R}$ (bilinjär)

(iii) $(x|x) > 0$ om $x \neq 0$ (positivt definit).

Anm.: Villkoret (ii) kräver endast att inre-produkten är linjär i första variabeln, men på grund av symmetrin är

$$(x|ay+bz) = (ay+bz|x) = a(y|x) + b(z|x) = a(x|y) + b(x|z),$$

vilket innebär att inre-produkten är linjär också i den andra variabeln och därmed är bilinjär.

Ett vektorrum $V$ med en inre produkt, sägs vara ett inre-produktrum. Vi ska strax visa att ett inre-produktrum också är ett normerat rum om vi sätter $\|x\| = (x|x)^{1/2}$. För att se att detta verkligen ger en norm på $V$, noterar vi först att enligt (iii) är $(x|x) \geq 0$, så att $(x|x)^{1/2}$ verkligen är ett väldefinierat positivt tal. Av (iii) följer också att $\|x\| = 0 \iff x = 0$, dvs. villkoret (iii) i definitionen av en norm är uppfyllt. Vidare är $\|ax\| = (ax|ax)^{1/2} = (a^2(x|x))^{1/2} = |a| \cdot \|x\|$, vilket visar att även villkoret (i) är uppfyllt. Att även villkoret (ii) (dvs. att $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$) är uppfyllt är däremot inte alldeles uppenbart. För att visa detta behöver vi först följande

Lemma (6.1.2): (Schwarz' olikhet, jfr lemma (2.2.5)) I ett inre-produktrum är för alla $x$ och $y$

$$(x|y)^2 \leq (x|x)\cdot(y|y) \quad \text{(eller } |(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|\text{)}.$$

Bevis: Enligt förutsättning är funktionen $f(t) = (x - ty|x - ty) \geq 0$, men vi har också

$$f(t) = (x|x) - 2t(x|y) + t^2(y|y).$$

Om nu $(y|y) = 0$ så är alltså även $(x|y) = 0$. Annars är

$$(y|y)f(t) = (t(y|y) - (x|y))^2 + ((x|x)(y|y) - (x|y)^2) \geq 0.$$

Väljer vi nu $t = (x|y)/(y|y)$ så har vi den sökta olikheten. Q.

Korollarium (6.1.3): I ett inre-produktrum är för alla $x$ och $y$,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Bevis: $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq$

$$\leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Detta visar att varje inre-produktrum är normerat. Q.

En sats som vi kommer att behöva är

Sats (6.1.3): (Parallellogramlagen). I ett inre-produktrum är för alla $x$ och $y$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Bevis: $(x+y|x+y) + (x-y|x-y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) + (x|x) - 2(x|y)$

$$+ (y|y) = 2(x|x) + 2(y|y) . \quad Q.$$

Anm.: Ur beviset för sats (6.1.3) ser vi också att

$$(*) \qquad (x|y) = \tfrac{1}{4}\cdot(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) .$$

I själva verket kan det bevisas att i ett normerat rum där parallellogramlagen gäller, ger (*) en inre-produkt och den ur denna erhållna normen är den ursprungliga.

Efter denna diskussion om geometrin i två-dimensionella delrum av inre-produktrum, kan det vara dags för några exempel på inre-produktrum.

Exempel:

a) $\mathbb{R}$ är ett inre-produktrum med $(x|y) = x\cdot y$.

b) $\mathbb{R}^2$ är ett inre-produktrum med $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$, där $x = (x_1,x_2)$

c) $\mathbb{R}^n$ är ett inre-produktrum med $(x|y) = \Sigma\, x_k y_k$, där $x = (x_1, x_2, .., x_n)$

d) $\ell^2$ är ett inre-produktrum med $(\underline{x}|\underline{y}) = \Sigma\, x_k y_k$, där $\underline{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty}$.

e) I $C[a,b]$ kan vi definiera en inre-produkt genom

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Observera att den ur denna inre-produkt erhållna normen, ej är den vanliga max-normen i $C[a,b]$. Vi betecknar detta inre-produktrum med $C_2[a,b]$.

f) Låt $C(I^2)$ vara rummet av kontinuerliga funktioner på enhetskvadraten $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ i $\mathbb{R}^2$. I $C(I^2)$ definierar vi en inre-produkt genom

$$(F|G) = \int_0^1\int_0^1 F(x,y)\, G(x,y)dxdy .$$

g) Låt $K_o(\mathbb{R})$ vara rummet av kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$ "med kompakt stöd", dvs. för varje $f$ i $K_o(\mathbb{R})$ finns $N_f$ så att $f(x) = 0$ om $|x| > N$ Vi definierar en inre-produkt i $K_o(\mathbb{R})$ genom

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)dx .$$

h) Låt $E_o$ vara mängden av alla talföljder $\underline{x} = \{x_k\}$ sådana att $x_k = 0$ utom för ändligt många $k$. $E_o$ är ett inre-produktrum om vi sätter $(\underline{x}|\underline{y}) = \Sigma\, x_k y_k$.

Övning (6.1.4): Låt $N$ vara ett normerat rum där parallellogramlagen gäller. Vi definierar en reellvärd funktion $(x|y)$ på $N \times N$ genom

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Visa att denna funktion har följande egenskaper
(i) $(x|x) \geq 0$ (som synes är $\|x\| = (x|x)^{1/2}$)
(ii) $(x|y) = (y|x)$
(iii) $(tx|ty) = t^2(x|y)$ $(t \in \mathbb{R})$
(iv) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$.
Från (iv) följer då genom induktion speciellt att $(mx|ny) = mn(x|y)$ och av (iii) följer då att $(\frac{m}{n}x|y) = \frac{m}{n}(x|y)$ om $m$ och $n$ är naturliga tal. Eftersom det också följer av definitionen att $(-x|y) = -(x|y)$, så är $(ax|y) = a(x|y)$ för alla rationella tal $a$. Av kontinuitet följer då att detta gäller för alla reella tal.

2. Två vektorer $x$ och $y$ i ett inre-produktrum sägs vara ortogonala om $(x|y) = 0$. Vi skriver ofta $x \perp y$ för att beteckna detta. Observera att 0-vektorn är ortogonal mot hela rummet. En delmängd $E$ av ett inre-produktrum sägs vara ett ortogonalsystem om $(e|f) = 0$ så snart $e$ och $f$ är olika vektorer ur $E$. Om det också gäller att $(e|e) = 1$ för alla $e$ i $E$, så sägs mängden $E$ utgöra ett ON-system.

Låt nu $E$ vara ett ändligt ON-system och låt $L(E)$ vara det rum som uppspänns av $E$. Vi ska visa följande

Sats (6.2.1): Om $x = \Sigma\, x_k e_k$, $y = \Sigma\, y_k e_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $e_k \in E$, så är
(i) $\|x\|^2 = \Sigma\, x_k^2$,
(ii) $(x|y) = \Sigma\, x_k y_k$.

Bevis: Det räcker att visa (ii). För att förenkla beteckningarna använder vi Kroneckers deltafunktion

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{om } j = k \\ 0 & \text{om } j \neq k \end{cases}.$$

Vi har

$$(x|y) = (\Sigma\, x_k e_k | \Sigma\, y_j e_j) = \Sigma\, x_k y_j (e_k|e_j) = \Sigma\, x_k y_j \delta_{kj} = \Sigma\, x_k y_k. \quad Q.$$

Ett slags fortsättning på ovanstående ger

Sats (6.2.2): Låt $N$ vara ett inre-produktrum, låt $E$ vara ett ändligt ON-system i $N$ och låt $L(E)$ vara det delrum av $N$ som uppspänns av $E$. Låt vidare $x \in N$. Då finns en entydigt bestämd punkt $y_o \in L(E)$ sådan att $\|x - y_o\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in L(E)\}$.

Bevis: Skriv $y = \Sigma\, t_k e_k$. Då är

$$\|x-y\|^2 = (x-y|x-y) = (x - \Sigma\, t_k e_k | x - \Sigma\, t_k e_k) =$$
$$= (x|x) - 2\,\Sigma\, t_k (x|e_k) + \Sigma\, t_k^2 =$$
$$= (x|x) - \Sigma\, (x|e_k)^2 + \Sigma\, (t_k - (x|e_k))^2 .$$

Väljer vi nu $y_o = \Sigma\, (x|e_k)e_k$, och skriver $y = y_o + z$, ser vi att

$$\|x-y\|^2 = \|x - y_o - z\|^2 = \|x\|^2 - \|y_o\|^2 + \|z\|^2 ,$$

vilket naturligtvis minimeras av $z = 0$. Q.

Av beviset till satsen följer lätt följande

Korollarium (6.2.3): Med beteckningarna ovan är

(i) $\|x\|^2 = \|y_o\|^2 + \|x - y_o\|^2$,

(ii) $x - y_o \perp y$, för alla $y$ i $L(E)$. $y_o$ kallas projektionen av $x$ på $L(E)$.

Det enkla beviset lämnas som övning.

Det framgår av ovanstående räkningar att talen $(x|e_k)$ spelar en viktig roll i studiet av ON-system. Dessa tal kallas ofta för de till vektorn $x$ hörande Fourierkoefficienterna med avseende på ON-systemet $E$.

Av sats (6.2.1) och korollarium (6.2.3) samt definitionen av $y_o$ följer nu också följande berömda

Korollarium (6.2.4): (Bessels olikhet). Låt $E$ vara ett ändligt ON-system i ett inre-produktrum $N$, och låt $x \in N$. Då är

$$\Sigma\, (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2$$

med likhet endast om $x \in L(E)$.

Vi har hittills i detta avsnitt studerat sådana ändligt-dimensionella delrum av inre-produktrum som uppspänns av ändliga ON-system. Nedanstående proposition visar att sådana delrum inte är särskilt speciella.

Sats 6.2.5): Låt $N$ vara ett inre-produktrum och låt $M$ vara ett ändligt-dimensionellt delrum av $N$. Då finns ett ändligt ON-system $E$ i $M$, så att $L(E) = M$.

Bevis: (Gram-Schmidts ortonormeringsprocess). Vi ska visa satsen med induktion över dimensionen av $M$. Vi konstaterar först att om $\dim(M) = 1$ så finns $x \neq 0$ i $M$. Sätt $e = \frac{x}{\|x\|}$ och låt $E$ vara det system som består endast av $e$. Då är $M = L(E)$ vilket visar satsen om $\dim(M) = 1$. Antag nu att satsen visats för alla rum av $\dim \leq n-1$, och låt $M$ vara ett delrum av $\dim n$. Låt nu $M'$ vara ett delrum av $M$ med $\dim(M') = n-1$. Då finns enligt antagande ett ON-system $E'$ i $M'$

så att $M' = L(E')$ samt något $x \notin M'$. Om nu $y_o$ är projektionen av $x$ på $L(E')$ är enligt korollarium (6.2.3), vektorn $x_o = x - y_o$ ortogonal mot $L(E')$, och vi kan definiera $e_n = x_o/\|x_o\|$, och sedan $E = E' \cup \{e_n\}$. Då är $M = L(E)$. Q.

Av beviset följer också det intuitivt självklara faktum att dim (M) är lika med antalet element i ON-systemet $E$.

Vi ska nu övergå till att studera ON-system som ej behöver vara ändliga och vi ska börja med följande

Definition (6.2.6): Ett ON-system $E$ i ett inre-produktrum $N$ sägs vara komplett om $x \perp e \implies x = 0$, dvs. om $(x|E) = 0$ för alla $e \in E \implies x = 0$.

De flesta inre-produktrum som studeras inom t.ex. fysikaliska tillämpningar av funktionalanalysen är separabla. Vidare underlättas de flesta räkningar som behöver göras genom införandet av Fourierkoefficienter, och därför är följande sats av stor betydelse i praktiken.

Sats (6.2.7): Låt $N$ vara ett oändligt-dimensionellt separabelt inre-produktrum. Då är varje ON-system i $N$ uppräkneligt och dessutom finns det ett komplett ON-system $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Bevis: För alla $e, f \in E$ är $\|e - f\| = \sqrt{2}$, så att om $E$ ej är uppräknelig så är $E$ en icke-separabel delmängd av $N$. För att visa att det finns ett komplett ON-system ska vi använda kriterium (5.2.7). Enligt detta finns det en följd delrum $\{M_k\}$, så att $\cup M_k$ är tätt i $N$. Enligt sats (6.2.5) finns det då en följd $E_k$ av ON-system sådana att $M_k = L(E_k)$. Av beviset av sats (6.2.5) framgår det också att dessa ON-system kan väljas så att

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\} = E_{k-1} \subset E_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k\}.$$

Sätter vi nu $E = \cup E_k$ så är tydligen $L(E) = \cup L(E_k) = \cup M_k$ tätt i $N$. För att visa att det på detta sätt konstruerade ON-systemet $E$ är komplett antar vi att för något $x$ i $N$, $(x|e_k) = 0$ för alla $e_k \in E$. Eftersom $\cup L(E_k)$ är tätt i $N$, finns det en följd $x_n \in L(E_n)$ så att $\|x - x_n\| \to 0$, och väljer vi nu varje $x_n$ på bästa sätt, dvs. som projektionen av $x$ på $L(E_n)$ så är alltså alla $x_n = 0$, vilket betyder att även $x = 0$. Q.

En viktig egenskap hos kompletta ON-system är att Bessels olikhet övergår i likhet.

Sats (6.2.8): Låt $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara ett fullständigt ON-system i ett separabelt (oändligt-dimensionellt) inre-produktrum och låt $x \in N$. Då är $\|x\|^2 = \Sigma (x|e_k)^2$.

Bevis: Låt $x_n$ vara projektionen av $x$ på $L(E_n)$, där $E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Enligt korollarium (6.2.3) är då

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2$$

och eftersom $L(E)$ är tätt i $N$ går $\|x - x_n\|$ mot 0. Det betyder att $\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2$ och enligt sats (6.2.1) är

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k)^2$$

och detta visar satsen. Q.

Exempel: En viktig typ av inre-produktrum erhålles på följande sätt. Låt $[a,b]$ vara ett intervall i $\mathbb{R}$ och låt $p(x)$ vara en positiv funktion på $[a,b]$. Låt vidare $C_2([a,b],p)$ vara rummet av kontinuerliga funktioner på $[a,b]$, och sätt

$$(f|g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, p(x)dx .$$

Denna typ av inre-produktrum har införts bland annat i samband med studiet av flera fysikaliskt viktiga differentialekvationer. De ON-system som bildas t.ex. vid Gram-Schmidts ortogonalisering av följden $1, x, x^2, \ldots$ har gett upphov till flera viktiga ON-system av polynom. Nedan ska vi ange några exempel med olika intervall $[a,b]$ och olika viktsfunktioner $p$.

| $[a,b]$ | $p$ | |
|---|---|---|
| $[-1,1]$ | $1$ | Legendrepolynom |
| $[-1,1]$ | $(1-x^2)^{-1/2}$ | Tchebycheffpolynom |
| $[0,\infty]$ | $e^{-x}$ | Lagrangepolynom |
| $[-\infty,\infty]$ | $e^{-x^2}$ | Hermitepolynom. |

3. Vi har tidigare i vårt studium av allmänna normerade rum infört en särskild benämning för fullständiga sådana och kallat dessa Banachrum. Analogt med detta ska vi kalla ett inre-produktrum som också är ett Banachrum (i den av den inre produkten givna normen) för att Hilbertrum. Vi visade i sats (3.3.6) att varje normerat rum $N$ kan inbäddas isometriskt som ett tätt delrum av ett Banachrum $B_N$, den så kallade kompletteringen av $N$. I fortsättningen kommer vi att behöva följande

Sats (6.3.1): Låt $V$ vara ett inre-produktrum, då är kompletteringen $B_V$ ett Hilbertrum.

Bevis: Om $x$ och $y$ ligger i $B_V$ så finns Cauchyföljder $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ ur $V$, så att $x = \lim x_n$ och $y = \lim y_n$. Då är även $(x_n|y_n)$ en Cauchyföljd (i $\mathbb{R}$) ty

$$|(x_n|y_n) - (x_m|y_m)| = |(x_n|y - y_m) + (x - x_m|y_m)| \leq$$
$$\leq (\sup\|x_n\|)\cdot\|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\|\cdot(\sup\|y_n\|) \to 0 .$$

Vi definierar $(x|y) = \lim (x_n|y_n)$.

Vi lämnar som övning åt (den intresserade) läsaren att visa, dels att denna inre-produkt verkligen är väldefinierad, dvs. ej beror av valet av Cauchyföljder, dels uppfyller villkoren i definition (6.1.1). Q.

Exempel: Av de i sektion (6.1) givna exemplen är a), b), c) och d) Hilbertrum, medan de övriga ej är det. Vi ska återkomma till kompletteringarna av dessa i nästa kapitel.

Vi ska nu inleda ett geometriskt studium av Hilbertrum och börjar med följande sats, som är helt avhängig av fullständigheten.

Sats (6.3.2): Låt $H$ vara ett Hilbertrum och låt $C$ vara en sluten konvex delmängd av $H$. Då finns enn (en och endast en) punkt $c_o$, sådan att $\|c_o\| = \inf\{\|c\| | c \in C\}$.

Bevis: Sätt $\inf\{\|c\| | c \in C\} = d$. För varje naturligt tal $k$ finns då $c_k$ så att $\|c_k\| < d + \frac{1}{k}$. Vi ska visa att följden $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i $H$. För att se detta använder vi parallellogramlagen, vilket ger

$$\|c_m + c_n\|^2 + \|c_m - c_n\|^2 = 2(\|c_m\|^2 + \|c_n\|^2)$$

dvs.

$$\left\| \frac{c_m + c_n}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{c_m - c_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|c_m\|^2 + \|c_n\|^2) < d^2 + 3d \cdot \max \{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\}.$$

Eftersom $C$ är konvex ligger $\frac{1}{2}(c_m + c_n)$ i $C$ så att $\|\frac{1}{2}(c_m + c_n\| \geq d$. Men då är $\|\frac{1}{2}(c_m - c_n)\| < 2(\max\{d/m, d/n\})^{1/2}$, vilket visar att $\{c_k\}$ är en Cauchyföljd. Låt $c_o$ vara $\lim c_k$. Då är $\|c_o\| = d$. Om även $\|y_o\| = d$ så är enligt ovanstående följden $\{c_o, y_o, c_o, y_o, \ldots\}$ en Cauchyföljd vilket innebär att $c_o = y_o$. Q.

Korollarium (6.3.3): Med beteckningar som i sats (6.2.2) så är för alla $c$ i $C$, $(c|c_o) \geq (c_o|c_o) = d^2$.

Bevis: Sätt

$$f(t) = (tc + (1-t)c_o | tc + (1-t)c_o) =$$
$$= (c_o|c_o) + 2t((c|c_o) - (c_o|c_o)) + t^2((c_o|c_o) + (c|c) - 2(c|c_o)).$$

Enligt förutsättning är $f(t) \geq f(0) = (c_o|c_o)$ då $0 \leq t \leq 1$. Men då är speciellt $f'(0) \geq 0$, dvs. $(c|c_o) - (c_o|c_o) \geq 0$. Q.

Korollarium (6.3.4): Låt $C$ vara en sluten konvex mängd i ett Hilbertrum $H$ och låt $x \in H$. Då finns $c_o$ i $C$ så att

$$\|c_o - x\| = \inf \{\|c - x\| | c \in C\} = d$$

och så att

$$(x|c_o - x) + d^2 \leq (c|c_o - x) \quad \text{för alla } c \text{ i } C.$$

Bevis: Detta följer av sats (6.2.2) och korollarium (6.2.3) använda på den slutna konvexa mängden $C - x$. Q.

Anm.: Enligt Schwarz' olikhet bestämmer varje $a$ i $H$, en linjär funktional $f_a$ på $H$ (med $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$) genom $f_a(x) = (x,a)$. Detta innebär att sista delen av korollarium (6.3.4) ger sats (5.3.2) för Hilbertrum.

Koroallarium (6.3.5): Med beteckningar som ovan är $c_o - x \perp c$, $c \in C$, om $C$ är ett slutet delrum av $H$.

Bevis: Om $(c|c_o - x) \neq 0$ så är antingen $(c|c_o - x) < 0$ eller $(-c|c_o - x) < 0$. Om t.ex. $(c|c_o - x) < 0$ kan vi då välja ett naturligt tal $n$ så att $(nc|c_o - x) < ((x|c_o - x) + d^2)$ vilket strider mot korollarium (6.3.4). Q.

Med hjälp av sats (6.3.2) och dess korollarier kan vi nu studera allmänna (ej nödvändigtvis ändligt-dimensionella) delrum av ett Hilbertrum och visa satser som motsvarar dem i avsnitt 2 ovan. För att förkorta framställningen ska vi först införa några nya beteckningar. Vi har tidigare skrivit $x \perp y$ för att ange att $x$ och $y$ är ortogonala. I fortsättningen ska vi för mängder $E, F \subset H$ skriva $E \perp F$ för att ange att $e \perp f$ om $e \in E$, $f \in F$, och givet en mängd $E \subset H$, ska vi skriva $E^{\perp} = \{f | \{f\} \perp E\}$.

Vi behöver nu först följande

Lemma (6.3.6): Låt $E$ vara en delmängd av Hilbertrummet $H$. Då är
a) $E^{\perp}$ ett slutet delrum av $H$,
b) om $E$ är ett delrum så är $E^{\perp\perp} = \bar{E}$.

Bevis: a) Vi observerar först att i varje linjärt rum så är en skärning av delrum ett delrum, och i varje normerat rum är en skärning av slutna mängder en sluten mängd. Speciellt är alltså en skärning av slutna delrum ett slutet delrum. Eftersom vidare $E^{\perp} = \bigcap_{e \in E} \{e\}^{\perp}$, räcker det alltså att att visa att varje $\{e\}^{\perp}$ är ett slutet delrum. Detta följer då av att

(i) $(ax + by|e) = a(x|e) + b(y|e) = 0$ om $x, y \in \{e\}^{\perp}$,
(ii) $(\lim x_n|e) = \lim(x_n|e) = 0$ om $x_n \in \{e\}^{\perp}$, $\{x_n\}$ konvergent.

b) Uppenbarligen är $E \subset E^{\perp\perp}$ och eftersom $E^{\perp\perp}$ är slutet är även $\bar{E} \subset E^{\perp\perp}$. Antag nu att $x \notin \bar{E}$. Då är $d(x,E) = \inf\{\|x - e\| | e \in E\} = d > 0$. Välj $e_o \in \bar{E}$ så att $\|x - e_o\| = d$. Enligt korollarium (6.3.5) är då $x - e_o \perp E$, dvs. $x - e_o \in E^{\perp}$. Speciellt är alltså $(e_o|x - e_o) = 0$, dvs. $(x|x - e_o) = (x - e_o|x - e_o) = d^2 \neq 0$, dvs. $x \notin E^{\perp\perp}$. Detta visar lemmat. Q.

Låt nu $M$ vara ett slutet delrum av ett Hilbertrum, låt $x \in H$ och låt $x_o$ vara "närmaste punkten i $M$". Vi ska i fortsättningen kalla $x_o$

för (den ortogonala) projektionen av $x$ på $M$, och vi ska skriva $P_M(x)$ för att beteckna denna punkt. Vi ska också kalla $M^\perp$ för det ortogonala komplementet till $M$, och vi ska beteckna $x - P_M(x)$ med $Q_M(x)$. Vi såg ovan att $Q_M(x) \in M^\perp$.

Vi kan nu visa följande

Sats (6.3.7): Låt $M$ vara ett slutet delrum av ett Hilbertrum $H$ och låt $x \in H$. Då är

(i) $x = P_M(x) + Q_M(x)$,

(ii) $\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|Q_M(x)\|^2$,

(iii) $P_M(x)$ och $Q_M(x)$ beror linjärt av $x$,

(iv) $Q_M(x) = P_{M^\perp}(x)$.

Bevis: (i) följer av definitionen av $Q_M(x)$. (ii) följer av att $(P_M(x)|Q_M(x)) = 0$, och för att visa (iii) observerar vi först att om $x_1, x_2 \in M$, $y_1, y_2 \in M^\perp$ och $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, så är $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, och eftersom $(x_1 - x_2 | y_2 - y_1) = 0$, är alltså $x_1 = x_2$ och $y_1 = y_2$. Å andra sidan är också

$$P_M(ax+by) + Q_M(ax+by) = ax + by =$$

$$= a(P_M(x) + Q_M(x)) + b(P_M(y) + Q_M(y)) =$$

$$= (aP_M(x) + bP_M(y)) + (aQ_M(x) + bQ_M(y)).$$

Slutligen följer (iv) av att vi kan låta $M^\perp$ och $M$ byta plats i ovanstående räkningar. Q.

Observera att korollarium (6.2.3) är ett specialfall av (ii) ovan för det fall då $M$ (eller $M^\perp$) är ändligt-dimensionellt. Att vi i det ändligt-dimensionella fallet ej behövde förutsätta fullständighet beror på att varje ändligt-dimensionell sluten delmängd av ett normerat rum är fullständig i sig.

4. Vi ska avsluta detta kapitel med att bevisa följande två satser.

Sats (6.4.1): Låt $H$ vara ett Hilbertrum och låt $f$ vara en kontinuerlig linjär funktional på $H$. Då finns en vektor $a$ i $H$ så att $f(x) = (x|a)$.

Bevis: Sätt $M = \mathrm{Ker}(f)$ och låt $e \in M^\perp$, $\|e\| = 1$. Sätt sedan $a = f(e)\cdot e$. Om nu $x \in H$, så är

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(e)} e\right) = 0, \text{ dvs. } \left(x - \frac{f(x)}{f(e)} e\right) \in M,$$

dvs. vi kan skriva $x = m + \frac{f(x)}{f(e)} e$. Men då är

$$(x|a) = f(e)\cdot(x|e) = f(e)\left[(m|e) + \frac{f(x)}{f(e)}(e|e)\right] = f(e)\left(0 + \frac{f(x)}{f(e)} \cdot 1\right) = f(x).$$

Q.

Sats (6.4.2): Varje separabelt Hilbertrum är isometriskt isomorft med $\ell^2$.

Bevis: Eftersom $H$ är separabelt finns enligt sats (6.2.7) ett komplett uppräkneligt ON-system $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Vi ska konstruera begränsade linjära avbildningar $S: \ell^2 \to H$ och $T: H \to \ell^2$ så att $\|S\| = \|T\| = 1$, och så att $S \circ T = I_H$, $T \circ S = I_{\ell^2}$. Låt $\underline{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ligga i $\ell^2$. Vi sätter

$$S(\underline{x}) = \Sigma\, x_k e_k .$$

Observera att $S(\underline{x}) \in H$, ty varje partialsumma ligger i $H$, och följden av partialsummor är en Cauchyföljd i $H$, och är därför konvergent. Omvänt sätter vi för $h \in H$, $T(h) = \{(h|e_k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Vi lämnar som övning den enkla verifikationen av att dessa avbildningar verkligen ger den sökta isometriska isomorfin.

Övning (6.4.3): Visa att varje Hilbertrum innehåller ett komplett ON-system.

Ledning: Låt $X$ vara mängden av alla ON-system i $H$. Mängden $X$ kan ges en ordning genom att $E_1 \leq E_2$ om $E_1$ är en delmängd av $E_2$. Visa att varje kedja i $X$ är uppåt begränsad. Enligt Zorns lemma finns då ett maximalt element i mängden, dvs. det finns ett ON-system $E$ som inte är innehållet i något annat. Visa med hjälp av sats (6.3.2) att $E$ är komplett.

## Kap. 7. Banachrum av integrerbara funktioner. Lebesgueintegralen.

1. I föregående avsnitt observerade vi att uttrycket

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)dx$$

är en inre produkt i rummet $C[0,1]$, varav det också följer att

$$||f||_2 = (f|f)^{1/2} = \left( \int_0^1 f^2(x)dx \right)^{1/2}$$

är en norm i $C[0,1]$. Vi skall beteckna detta inre-produktrum med $C_2[0,1]$. Ett annat uttryck som också ger en norm på $C[0,1]$ är den så kallade 1-normen

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

(Vi lämnar beviset av att detta ger en norm som övning åt läsaren.) Vi skall beteckna detta normerade rum med $C_1[0,1]$.

Vi börjar nu med att konstatera att rummen $C_1 (= C_1[0,1])$ och $C_2 (= C_2[0,1])$ ej är fullständiga.

Exempel:

(i) Sätt $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le x \le 1/2 \\ n(x-1/2) & \text{om } 1/2 \le x \le (n+2)/2n \\ 1 & \text{om } (n+2)/2n \le x \le 1 \end{cases}$.

Det är lätt att se att följden $f_n$ ej konvergerar mot någon kontinuerlig funktion, men att den likväl är en cauchyföljd i såväl $C_1$ som $C_2$.

(ii) Sätt $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{om } 0 \le x \le n^{-2} \\ x^{-(1/2)} & \text{om } n^{-2} \le x \le 1 \end{cases}$

Då är följden $f_n$ punktvis konvergent om $x \neq 0$ mot funktion $x^{-(1/2)}$, som inte ligger i $C[0,1]$, vidare är följden en cauchyföljd i $C_1$ men ej i $C_2$.

Eftersom de normerade rummen $C_1$ och $C_2$ ej är fullständiga kan de enligt vad vi tidigare visat kompletteras, dvs. de kan inbäddas isometriskt och tätt i lämpliga Banachrum. I detta kapitel skall vi studera kompletteringen av rummet $C_1$. Vi skall beteckna denna komplettering med $L^1$ (eller $L^1(0,1)$) och vi börjar med att konstatera att det bevis vi gav i kap. 3 för existensen av en komplettering för ögonblicket är svårt att använda, om inte för något annat, så åtminstone av det

enkla skälet att vi ännu inte känner det duala rummet $(L^1)^*$. Vi skall därför börja med att ge en alternativ konstruktion av kompletteringen till ett allmänt normerat rum $N$.

Sats (7.1.1): Låt $N$ vara ett normerat rum och låt $\ell^1(N)$ vara mängden av alla följder $\underline{X} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ sådana att $\Sigma||x_k|| < \infty$. $\ell^1(N)$ är ett normerat rum om vi sätter $||\underline{X}||_{\ell^1(N)} = \Sigma||x_k||$. Låt vidare $K = K(N)$ vara det delrum av $\ell^1(N)$ som består av alla följder $\underline{X} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ sådan att $||\sum_{k=0}^{n} x_k||_N \to 0$. Låt slutligen $T:N \to \ell^1(N)$ vara den linjära avbildning som ges av

$$Tx = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \text{ där } x_o = x, \text{ och } x_k = 0 \text{ om } k \geq 1,$$

låt $q_K:\ell^1(N) \to \ell^1(N)/K(N)$ vara kvotrumsavbildningen och sätt $i_N = q_K \circ T$. Då är $K(N)$ ett slutet delrum av $\ell^1(N)$, kvotrummet $\ell^1(N)/K(N)$ ett Banachrum, avbildningen $i_N:N \to \ell^1(N)/K(N)$ isometrisk, och $\mathrm{Im}(i_N)$ är tätt.

Bevis: a) Det är klart att $K$ är ett slutet delrum av $\ell^1(N)$ så att $\ell^1(N)/K$ verkligen är ett normerat rum. Vi skall beteckna detta normerade rum med $N'$.

b) Innan vi bevisar de övriga egenskaperna hos rummet $N'$ så observerar vi att rummet $\ell^1(N)$ också kan beskrivas som mängden av följder $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, sådan att $\Sigma||y_k - y_{k-1}|| < \infty$ varvid $\{y_k\}$ är partialsummorna till $\{x_k\}$ och $\{x_k\}$ är differenserna till $\{y_k\}$. Givet denna beskrivning av $\ell^1(N)$ är det lätt att se att $||q_K(\{y_k\})||_{N'} = \lim\{||y_k||_N\}$. Härav följer omedelbart att $i_N$ är en isometri. Genom att sedan ersätta en följd av partialsummor med den konstanta följden bestående av en enda "långt framskriden" partialsumma ser vi också att $\mathrm{Im}(i_N)$ är tätt i $N'$.

c) För att till sist bevisa att $N'$ är ett Banachrum så använder vi lemma (3.3.5) och antar att $\Sigma z_n$ är en serie i $N'$ sådan att $\Sigma||z_n|| < \infty$. Vi antar nu vidare att $\underline{X}_n = \{x_{nk}\}$ är element i $\ell^1(N)$ sådan att $q_K(\underline{X}_n) = z_n$ och sådan att $||\underline{X}_n|| < 2||z_n||$. Definierar vi nu $W$ i

$\ell^1(N)$ genom $w_k = \Sigma x_{ij}$, $i + j = k$, så är det lätt att se att $q_K(W) = \Sigma z_n \cdot Q$.

Vi har nu i kap. 3 och i detta kapitel konstruerat två till synes helt olika Banachrum, som båda kallats kompletteringen av N. Vår nästa sats talar nu om för oss det som även sunda förnuftet säger, nämligen att i så fall är dessa kompletteringar i någon mening likadana. "Likadana" betyder i vårt fall "isometriskt isomorfa".

Sats (7.1.2): Låt N vara ett normerat rum, låt $B_i$, $i = 1,2$, vara Banachrum och låt $T_i : N \to B_i$ vara linjära avbildningar med följande egenskaper:

a) $||T_i x||_{B_i} = ||x||_N$ (dvs. $T_i$ är isometrisk)

b) $\overline{Im(T_i)} = B_i$ (dvs. bilden av N är tät i $B_i$).

Då finns det linjära avbildningar $S : B_1 \to B_2$ och $T : B_2 \to B_1$, med följande egenskaper:

(i) $||S|| = ||T|| = 1$,

(ii) $SoT_1 = T_2$, $ToT_2 = T_1$,

(iii) $SoT = I_{B_2}$, $ToS = I_{B_1}$, dvs. speciellt är $B_1$ och $B_2$ isometriskt isomorfa.

Bevis: Vi definierar en avbildning $S_o : Im(T_1) \to B_2$ genom $S_o(x) = T_2(T_1^{-1}(x))$. På grund av (a) är $S_o$ väldefinierad och isometrisk och enligt lemma (3.2.5) kan $S_o$ utvidgas genom kontinuitet till $\overline{Im(T_1)} = B_1$. Avbildningen $T_o$ definieras på motsvarande sätt och vi låter S och T vara utvidgningarna till $B_1$ och $B_2$. Det följer ur konstruktionen att dessa avbildningar har de önskade egenskaperna. Q.

2. Med hjälp av sats (7.1.1) skall vi nu studera kompletteringen $L^1$ av rummet $C_1$. Enligt denna sats kan varje element $\varphi$ i $L^1$ representeras av en serie $\Sigma g_k$, sådan att $\Sigma \int |g_k(x)| dx < \infty$, och två serier $\Sigma g_k$ och $\Sigma h_k$ representerar samma element i $L^1$ om $\int |\sum_{k=1}^{n} (g_k - h_k)| \, dx \to 0$.

Vi skall därför börja med att studera absolutkonvergenta serier i $C_1$. Ett viktigt hjälpmedel för detta studium ges av följande

Lemma (7.2.1): (Tchebycheffs olikhet). Låt $f$ vara en positiv Riemannintegrabel funktion på $[0,1]$, och antag att

$$\int_0^1 f(x)dx < A.$$

Då finns för varje $w > 0$, en ändlig mängd av öppna intervall $\{I_j\}_{j=1}^N$, sådan att $f(x) \leq w$ om $x \notin \cup I_j$, och sådan att

$$\Sigma|I_j| < \frac{A}{w}, \quad (\text{om } I_j = (a_j,b_j) \text{ sätter vi } |I_j| = b_j - a_j).$$

Bevis: Riemannintegralen definieras med hjälp av översummor och undersummor. Förutsättningen att $I(f) = \int f < A$ innebär därför att det finns en indelning $\Delta(\Delta = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ där $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n = 1$, och $\Delta_k = x_k - x_{k-1})$, och en tillhörande översumma

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k, \quad \text{där } M_k \geq \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\},$$

sådan att $S_\Delta \leq A$.

Låter vi nu $I_j$ vara mängden av de intervall $\Delta_j^\circ = ]x_{j-1},x_j[$ för vilka tillhörande $M_j > w$, så är det uppenbart att

$$f(x) \leq w \text{ om } x \notin \cup I_j .$$

Vidare är naturligtvis

$$w\cdot(\Sigma|I_j|) < \{\Sigma M_j \Delta_j \mid \Delta_j^\circ \in \{I_j\}\} \leq \sum_{i=1}^n M_k \Delta_k = S_\Delta < A ,$$

vilket visar att $\Sigma|I_j| < \frac{A}{w} \cdot Q$ .

Med hjälp av lemma (7.2.1) kan vi nu visa att om $\Sigma g_k$ är en absolut konvergent serie i $C_1$ så är den också "på sätt och vis" konvergent i vanlig mening. Först måste vi dock precisera vad som menas med "på sätt och vis". Vad vi behöver definiera är vad vi skall mena med en "liten mängd" och vi skall börja med att säga att en delmängd $E$ av $\mathbb{R}$ är liten i Riemanns mening om det finns en ändlig familj av intervall $\{I_k\} = \{[a_k,b_k]\}$, sådan att $E \subset \cup I_k$, och sådan att $\Sigma|I_k| = \Sigma(b_k-a_k)$ är liten. Anledningen till att vi kallar en sådan mängd liten i Riemanns mening är att om $f$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$, som är 0 utanför mängden $E$ så är Riemannintegralen av $f$ liten (åtminstone i förhållande till $\max|f|$).

Vi kommer i det följande att behöva en allmännare definition av vad som skall menas med en liten mängd och inför därför följande

Definition (7.2.2): Låt $E$ vara en delmängd av $\mathbb{R}$, vi skall säga att $E$ har mått mindre än $a$ (egentligen Lebesgue-mått mindre än $a$), eller att måttet av $E$ är mindre än $a$, och vi skall skriva $m(E) < a$, om det finns en uppräknelig (eller ändlig) familj av öppna intervall $\{I_k\}$, sådana att $E \subset \cup I_k$, och sådana att $\Sigma|I_k| < a$ (där som ovan $|I_k| = |]a_k,b_k[\,| = b_k - a_k$. I termer av definition (7.2.2) kan vi nu fortsätta med

Definition (7.2.3): En delmängd $N$ av $\mathbb{R}$ sägs vara en nollmängd om för varje $\epsilon > 0$, $m(E) < \epsilon$.

En funktion som är definierad på hela intervallet $[0,1]$ utom möjligen på en nollmängd sägs vara definierad nästan överallt i $[0,1]$. Nästan överallt skrivs ofta n.ö., och ibland säger man istället att funktionen är definierad för nästan alla $x$ i $[0,1]$. På motsvarande sätt sägs en funktionsföljd konvergera n.ö. om den konvergerar utanför en nollmängd, två funktioner sägs vara lika n.ö. om de är lika utanför en nollmängd, och allmänt sägs ett påstående gälla n.ö. om det gäller för alla $x$ utom eventuellt för en nollmängd.
Det följer av definitionen att varje delmängd av en nollmängd är en nollmängd, och för att vänja oss något vid begreppet skall vi också visa följande

Sats (7.2.4): En uppräknelig förening av nollmängder är en nollmängd.

Bevis: Låt $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara nollmängder och låt $\epsilon > 0$ vara givet. Vi sätter sedan $\epsilon_i = 2^{-i} \cdot \epsilon$, och väljer för varje $E_i$ en uppräknelig familj $\{I_{ik}\}$ sådan att $E_i \subset \bigcup_k I_{ik}$, och sådan att $\sum_k |I_{ik}| < \epsilon_i$. Då är $UE_i \subset \bigcup_{i,k} I_{ik}$, familjen $\{I_{ik}\}$ är uppräknelig och $\sum_{i,k} |I_{ik}| < \epsilon$, vilket visar att $UE_i$ är en nollmängd. Q.

Vi skall nu bevisa att elementen i rummet $L^1$ kan representeras inte bara med hjälp av en serie, eller en följd av funktioner, utan också med hjälp av en enda funktion. Vad vi behöver för denna representation är följande

Sats (7.2.5): Låt $\{g_k\}$ vara ett element i $\mathcal{L}^1(C)$, dvs. antag att $||g_k||_1 < \infty$. Då är

(a) serien $\Sigma g_k(x)$ konvergent för nästan alla $x$ i $[0,1]$.

(b) om $\{g_k\} \in K$, dvs. om $||\sum_0^n g_k||_1 \to 0$, så konvergerar $\Sigma g_k(x)$ mot 0 för nästan alla x i $[0,1]$.

(c) om $\Sigma g_k(x) \to 0$ för nästan alla x i $[0,1]$, så går även $||\Sigma g_k||$ mot 0, dvs. $\{g_k\} \in K$.

Vi skall nedan först bevisa (a) och (b), medan däremot beviset av (c) kommer att kräva ytterligare förberedelser.

Bevis: (a) Eftersom en absolutkonvergent serie är konvergent räcker det att visa att $\Sigma|g_k(x)|$ konvergerar n.ö., och för att visa detta skall vi visa ett slags generalisering av Tchebycheffs olikhet. Vi skall därför välja $A > \Sigma||g_k||$, och sätter $E_w = \{x|\Sigma|g_k(x)| > w\}$, och vi skall visa att $m(E_w) < \frac{4A}{w}$. För att göra detta plockar vi först en följd av naturliga tal $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ sådana att $\sum_{n_k}^{\infty}||g_i|| < 4^{-k}\cdot A$, och vi skriver sedan

$$h_k(x) = \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} |g_i(x)| \qquad \text{(vi antar för enkelhets skull att } n_o = 0\text{)}.$$

Vi observerar nu att dels är $\Sigma h_k(x) = \Sigma|g_i(x)|$, dels är $||h_k|| < A\cdot 4^{-k}$. Vi sätter nu $w_k = w\cdot 2^{-k-1}$, och $E_k = \{x|h_k(x) > w_k\}$. Enligt lemma (7.2.1) finns det då för varje k, en ändlig familj av intervall $\{I_{kj}\}$, sådan att $E_k \subset \bigcup_j I_{kj}$ och sådana att $\Sigma_j|I_{kj}| < \frac{A\cdot 4^{-k}}{w_k} = \frac{2A}{w}\cdot 2^{-k}$. Härav följer det naturligtvis att $UE_k \subset \bigcup_{k,j} I_{kj}$, och att $\sum_{k,j}|I_{kj}| < 2\cdot\frac{2A}{w}$. Å andra sidan är det också klart att $x \in E_w \Longrightarrow x \in E_k$ för åtminstone något k, och detta visar att $E_w \subset UE_k$ dvs. att $m(E_w) < 4\cdot\frac{A}{w}$.

(b) Vi skriver $f_n = \sum_0^n g_k$, och vi konstaterar att enligt definition gäller att $\{g_k\} \in K$ om $\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x)|dx = 0$. Vi vet enligt (a) ovan att $\Sigma g_k$ konvergerar n.ö. och vi vill visa att $\varphi(x) = \Sigma g_k(x) = \lim f_n(x) = 0$ n.ö. Vi definierar nu mängden

$$N = \{x|\overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\},$$

och vi kan konstatera att $\varphi(x) = 0$ om $x \notin N$. Vi skall därför visa att $N$ är en nollmängd. Vi skall nu använda ett i dylika sammanhang vanligt knep och observerar att $N = \bigcup N_j$, där

$$N_j = \{x \mid \overline{\lim} |f_n(x)| > \tfrac{1}{j}\} , \quad j = 1,2,3,\ldots .$$

Eftersom enligt sats (7.2.4) ovan en uppräknelig förening av nollmängder är en nollmängd, räcker det därför att visa att varje $N_j$ är en nollmängd. Låt därför $\epsilon > 0$ vara givet och välj ett naturligt tal $m$ sådant att dels $||f_m||_{C_1} < \frac{\epsilon}{10j}$, dels $\sum_m^\infty ||g_k|| < \frac{\epsilon}{10j}$. Det är nu lätt att inse att om $x \in N_j$, så måste $x \in E_1 \cup E_2$, där

$$E_1 = \{x \mid |f_n(x)| > \tfrac{1}{2j}\} \quad \text{och} \quad E_2 = \{x \mid \sum_m^\infty |g_k(x)| > \tfrac{1}{2j}\} .$$

Av sats (7.2.1) följer nu att $m(E_1) < \epsilon/5$ medan enligt beviset av (a) ovan $m(E_2) < 4\epsilon/5$, och härav följer omedelbart att $m(E_1 \cup E_2) < \epsilon$. Härav följer alltså att varje $N_j$ och därför även $N$ är en nollmängd vilket bevisar (b).

3. Som ovan antytts kräver beviset av (c) vissa förberedelser. Den första av dessa är ett mycket viktigt "topologiskt" lemma, nämligen

Lemma (7.3.1): (Heine-Borel's lemma.)

Låt $F$ vara en sluten och begränsad delmängd av $\mathbb{R}$ och antag att det finns en familj $\{O\}$ av öppna mängder, sådan att varje $x \in F$ ligger i någon mängd ur $\{O\}$. Då finns det någon ändlig delfamilj $\{O_i\}_{i=1}^N$ sådan att varje $x$ i $F$ också ligger i någon av mängderna $O_i$.

Anm. En sluten och begränsad delmängd av $\mathbb{R}$ kallas ofta kompakt.

Bevis: Eftersom $F$ är begränsad finns det något reellt tal $A$, så att $F \subset [-A,A]$. Genom att till den givna familjen också tillfoga mängden $O' = \{x \mid x \notin F \text{ och } -A-1 < x < A+1\}$ så erhåller vi en större familj av öppna mängder, sådan att varje $x \in [-A,A]$ ligger i någon mängd ur familjen. Vi skall därför bevisa satsen med den extra förutsättningen att $F$ är ett intervall.

Vi skall använda satsen att en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall antar sin undre gräns.

Vi skall därför börja med att definiera en funktion på $[-A,A]$ på följande sätt. Låt $x \in [-A,A]$. Enligt antagandet finns någon öppen

mängd $O_x$ ur $\{O\}$, sådan att $x \in O_x$. Eftersom $O_x$ är öppen finns det då något symmetriskt intervall $I(x,t) = ]x-t,x+t[ \subset O_x$. Vi sätter $f(x) = \sup\{t \mid$ det finns någon mängd $O$ i $\{O\}$ sådan att $I(x,t) \subset O\}$.

Vi konstaterar först att om $f(x) > 2A$ för något $x$, så finns det helt enkelt en enda mängd som innehåller hela intervallet och då behöver vi inte bevisa något mer. I annat fall är funktionen $f$ alltså begränsad och vi skall strax se att den också är kontinuerlig. Vi observerar först att enligt förutsättningen är $f(x) > 0$ för alla $x$, om sedan $|y-x| < f(x)$ är det lätt att se att $f(y) \geq f(x) - |x-y|$ (detta därför att om $I(x,t) \subset O$, så är $I(y,t-|x-y|) \subset O$). Eftersom vi sedan kan låta $x$ och $y$ byta plats, följer det att $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$, och detta visar att $f$ är kontinuerlig. Därmed antar alltså $f$ sin undre gräns, och det innebär att $\inf\{f(x) \mid -A \leq x \leq A\} = a > 0$. Därmed följer alltså att varje $x$ i intervallet ligger i någon mängd ur $\{O\}$ som innehåller ett omkring $x$ symmetriskt intervall $I(x, a/2)$. Tar vi nu punkterna $x_k = -A, -A + \frac{a}{2}, \ldots, -A + ka/2, \ldots$ tills vi kommer fram till $A$, och sedan intervall som innehåller $I(x_k, a/2)$ ser vi att vi med ändligt många intervall täckt hela intervallet $[-A,A]$. Q.

Anm. En familj $\{O\}$ av öppna mängder som uppfyller förutsättningarna i sats (7.4.1) kallas en öppen övertäckning av mängden $F$. Det är lätt att se med exempel att om en mängd $F$ har egenskapen att man ur varje öppen övertäckning kan plocka en ändlig familj som också täcker så är $F$ sluten och begränsad. Även förutsättningen att övertäckningen är öppen är absolut nödvändig.

Med hjälp av Heine-Borels lemma kan vi nu erhålla ett viktigt samband mellan å ena sidan "små mängder" (i Lebesgue's mening) och å andra sidan Riemann-integralen av en kontinuerlig funktion.

Lemma (7.3.2): Låt $f$ vara en positiv kontinuerlig funktion på $[0,1]$ och antag att $f(x) \leq w$ för alla $x$. Antag vidare att $f(x) < b$, utom möjligen på en mängd $E$, sådan att $m(E) < a$. Då är

$$\int_0^1 f(x)dx < b + a \cdot w .$$

Bevis: Sätt $E_b = \{x \mid f(x) \geq b\}$. Då är $E_b$ en sluten delmängd av $[0,1]$, och därmed en sluten begränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Enligt förutsättning finns det en uppräknelig familj av öppna intervall $\{I_k\}$,

sådan att $E_b \subset UI_k$, och sådan att $\Sigma|I_k| < a$. Enligt Heine-Borels lemma kan vi då hitta en ändlig delfamilj $\{I'_j\}$, sådan att $E_b \subset UI'_j$. Vi kan nu hitta en överfunktion $g(x)$, och därmed en översumma $S_g$, genom att sätta

$$g(x) = w \text{ på } UI'_j \text{ och } g(x) = b \text{ f.ö.}$$

För den av $g$ givna översumman $S_g$ är då

$$S_g \leq w\cdot(\Sigma|I'_j|) + b < w\cdot a + b \ . \quad Q.$$

Innan vi återvänder till beviset av sats (7.2.5) (c), skall vi repetera några tidigare införda benämningar och också införa några nya. Vi har

$C_1$ som är det linjära rummet av kontinuerliga funktioner på $[0,1]$, normerat med $||f||_{C_1} = ||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ ,

$\ell^1(C_1)$ som är det normerade rummet av alla absolutkonvergenta serier i $C_1$, dvs. mängden av alla följder av kontinuerliga funktioner $\{g_k\}$, sådana att $\Sigma||g_k||_1 < \infty$, eller alternativt mängden av alla "partialsummor", dvs. mängden av alla följder $\{f_k\}$ sådana att $\Sigma\,||f_k - f_{k-1}||_1 < \infty$. Även om det innebär en ytterligare beteckning kan det vara praktiskt att säga att följden $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ är ett element i $bv(C_1)$ om följden $\{f_0, f_1-f_0, f_2-f_1, \ldots\}$ ligger i $\ell^1(C_1)$.

Vidare har vi

$K$ (eller $K(C_1)$) som bäst beskrivs som det delrum av $bv(C_1)$ som innehåller alla följder $\{f_k\}$ sådana att $||f_k||_1 \to 0$. Vi påminner om att $K$ är ett slutet delrum av $bv(C_1)$ eller om man så vill av $\ell^1(C_1)$.

Ett annat rum som vi också kommer att behöva skall vi benämna

$B$ och det är rummet av alla "begränsade följder" i $bv(C_1)$, dvs. mängden av alla följder $\{f_k\}$ sådana att det finns något tal $M$, sådant att $|f_k(x)| \leq M$ för alla $x$ i $[0,1]$ och för alla $k \geq 0$.

Vi observerar nu att sats (7.2.5) (a) kan tolkas så att det finns en linjär avbildning, som vi av naturliga skäl skall kalla

$\Sigma$ från $\ell^1(C_1)$ till mängden av alla nästan överallt definierade funktioner på $[0,1]$.

Vi skall skriva

$\mathcal{L}$ för att beteckna mängden av de funktioner som kan erhållas på

detta sätt. Därmed menas att en funktion $\varphi$ ligger i $\mathcal{L}$ om det finns en serie $\{g_k\}$ i $\ell^1(C_1)$, sådan att $\varphi(x) = \Sigma g_k(x)$ överallt där denna serie är konvergent.

Vidare skall vi skriva

$\mathcal{N}$ för att beteckna den delmängd av $\mathcal{L}$ som består av alla funktioner $\psi$ sådana att $\psi(x) = 0$ för nästan alla $x$. Sats (7.2.5) (b) innebär att $\Sigma$ avbildar $K$ in i $\mathcal{N}$, och detta ger oss en linjär avbildning $S$ från $L^1 = (\ell^1(C_1)/K)$ till $\mathcal{L}/\mathcal{N}$..

Vi kan nu med hjälp av lemma (7.3.2) bevisa ett specialfall av sats (7.2.5) (c), som vi skall kalla

Lemma (7.3.3): Låt $\{g_k\}$ vara ett element i $\ell^1(C_1)$, sådant att följden $\{f_k\}$ av partialsummor ligger i $B$, och sådant att $\Sigma g_k(x) = 0$ n.ö. . Då ligger $\{g_k\}$ i $K$.

Bevis: Välj $\epsilon > 0$, vi skall hitta ett naturligt tal $N_o$, sådant att

$$\int_0^1 \Big| \sum_0^n g_k(x) \Big| dx < \epsilon, \quad \text{om} \quad n > N_o .$$

Enligt förutsättning är följden av partialsummor likformigt begränsad av något tal $M$, och eftersom $\Sigma ||g_k|| < \infty$, kan vi hitta $N_o$, så att $\sum_{N_o}^{\infty} ||g_k|| < \frac{\epsilon}{24M}$. Eftersom $\lim f_k(x) = 0$ för nästan alla $x$ i $[0,1]$ är för alla sådana $x$,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{N_o}^{\infty} |g_k(x)|, \quad \text{om} \quad n > N_o .$$

Enligt beviset av sats (7.2.5) (a) är nu $\sum_{N_o}^{\infty} |g_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, utom på en mängd $E_1$ sådan att $m(E_1) < \frac{\epsilon}{3M}$. Vidare är mängden $E_o$ av alla $x$ för vilka $|f_k(x)| > \sum_{N}^{\infty} |g_k(x)|$ en nollmängd. Vi kan därför täcka mängden $E = E_o \cup E_1$ med uppräkneligt många intervall av sammanlagd längd $< \frac{\epsilon}{2M}$. Enligt lemma (7.3.3) är då

$$\int |f_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \epsilon \quad \text{om} \quad n > N_o ,$$

och detta bevisar lemmat. Q.

Vi kan nu slutföra beviset av sats (7.2.5) (c) på följande sätt: Låt $\{g_k\} \in \ell^1(C_1)$ och låt $\{f_k\}$ vara motsvarande följd av partialsummor i $bv(C_1)$, och antag att $\lim f_k(x) = 0$ n.ö.. Vi definierar nu för varje k, funktionen $\{f_k^n\}$ genom

$$f_k^n(x) = \begin{cases} n & \text{om } f_k(x) \geq n \\ f_k(x) & \text{om } -n \leq f_k(x) \leq n \\ -n & \text{om } f_k(x) \leq -n \end{cases} .$$

Vi observerar då först att

$||f_k^n - f_{k-1}^n||_1 \leq ||f_k - f_{k-1}||_1$, så att följden $\{f_k^n\}$ ligger i $bv(C_1)$. Vidare är naturligtvis för varje n, $\lim_{k \to \infty} f_k^n(x) = 0$ n.ö., och eftersom $|f_k^n(x)| \leq n$, för alla k och x, så ligger följden $\{f_k^n(x)\}$ i K. Eftersom vidare K är ett slutet delrum av $bv(C_1)$ räcker det att visa att följderna $\{f_k^n\}$ konvergerar mot följden $\{f_k\}$ såsom element i $bv(C_1)$. För att se detta, väljer vi därför $\epsilon > 0$, och tar ett N, sådant att $\sum_N^\infty ||f_k - f_{k-1}|| < \epsilon$. Därefter återstår det bara att välja n större än

$$\max_{0 \leq k \leq N} \max_{0 \leq x \leq 1} |f_k(x)|$$

för att ha

$$||\{f_k^n\} - \{f_k\}||_{bv(C_1)} < \epsilon .$$

Detta bevisar sats (7.2.5). Q.

4. Sats (7.2.5) visar att det finns en linjär 1-1 avbildning från $L^1 = \ell^1(C_1)/K$ på $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, dvs. vi kan identifiera $L^1$ med rummet $\mathcal{L}/\mathcal{N}$. Detta innebär att varje element i $L^1$ kan representeras av en funktion i $\mathcal{L}$, och att den representerande funktionen är entydig så när som på en nollmängd. Vi observerar nu närmast att om funktionen $\varphi$ ligger i $\mathcal{L}$, så har funktionen en integral, ty välj $\{g_k\}$, så att $\Sigma g_k(x) = \varphi(x)$ n.ö., då är $\Sigma \int g_k(x)dx$ konvergent, ty

$|\int g_k(x)dx| \leq \int |g_k(x)|dx = ||g_k||_1$ vilket visar att serien är absolutkonvergent och därmed också konvergent. Vidare följer det av sats (7.2.5) (c) att om även $\Sigma h_k(x) = \varphi(x)$ n.ö. så är $\Sigma \int h_k(x)dx = \Sigma \int g_k(x)dx$, vilket betyder att integralen är entydigt definierad.

Vidare är det lätt att se om man istället skriver $\varphi = \lim f_k$, där $f_k$ är följden av partialsummor att även $|\varphi|$ ligger i $\mathcal{L}$, och att $||\varphi||_{L^1} = \int |\varphi(x)|dx$.

Vi skall avsluta detta avsnitt med att ge en annan karakterisering av rummet $L^1(0,1)$, och börjar med att konstatera att per konstruktion finns det för varje $\varphi \in L^1$, och varje $\epsilon > 0$, en kontinuerlig funktion $f$, sådan att

$$\int |\varphi - f| dx < \epsilon.$$

Vi skall nu införa en klass av funktioner som är nära de kontinuerliga i en något annan mening enligt följande

Definition (7.4.1): En funktion $\varphi$ definierad n.ö. på $[0,1]$ sägs vara mätbar om för varje $\epsilon > 0$, det finns en kontinuerlig funktion $f_\epsilon$ på $[0,1]$ och en mängd $E \subset [0,1]$ sådan att $m(E) < \epsilon$, och $f_\epsilon(x) = \varphi(x)$ om $x \notin E$.

Vi skall beteckna mängden av mätbara funktioner på $[0,1]$ med $\mathcal{M}$.
Vi behöver följande egenskaper hos mängden $\mathcal{M}$:
(i) om $\varphi_1$ och $\varphi_2$ tillhör $\mathcal{M}$, och $a,b \in \mathbb{R}$ så $a\varphi_1 + b\varphi_2 \in \mathcal{M}$,
(ii) $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{M}$,
(iii) $\varphi \in \mathcal{M}$, $g \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow g\circ\varphi \in \mathcal{M}$, dvs. funktionen $g(\varphi(x))$ är mätbar.
Det är lätt att se att dessa egenskaper hos $\mathcal{M}$, följer av att motsvarande gäller i $C[0,1]$. Om vi t.ex. vill bevisa (i) väljer vi $f_1$ och $f_2$ så att $f_1 = \varphi_1$ utom på $E_1$ och $f_2 = \varphi_2$ utom på $E_2$ där $m(E_1) < \epsilon/2$, och $m(E_2) < \epsilon/2$. Då är $f_1 + f_2 = \varphi_1 + \varphi_2$ utom på $E_1 \cup E_2$ och $m(E_1 \cup E_2) < \epsilon$.

I det följande kommer vi i tillämpningarna av (iii) speciellt att använda funktionerna $g(x) = x^+, x^-, |x|$, och $a_w(x)$ där $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = \max(-x,0)$, $|x| = x^+ + x^-$ och $a_w(x) = \max(-w, \min(w,x))$ dvs.

$$a_w(x) = \begin{cases} w & \text{om } x \geq w \\ x & \text{om } -w \leq x \leq w \\ -w & \text{om } x \leq -w \end{cases}.$$

Vårt första samband mellan rummen $\mathcal{L}$ och $\mathcal{M}$ ges av följande

Sats (7.4.2): $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$.

Bevis: Låt $\varphi \in \mathcal{L}$. Vi kan då skriva $\varphi(x) = \Sigma g_k(x)$, där $g_k(x) \in C_1$ och $||g_k||_1 < 4^{-k}$ om $k > 1$. Välj nu $\epsilon > 0$, och tag $n$ så att $2^{-n} < \epsilon/2$. Sätt sedan $w_k = 2^{-k}$ om $k \geq n$ och sätt

$$h_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{om } k < n \\ a_{w_k}(g_k(x)) & \text{om } k \geq n \end{cases}.$$

Enligt Tchebycheff's olikhet är då $h_k(x) = g_k(x)$ utom på en mängd $E_k$ sådan att $m(E_k) < 2^{-k}$, $k \geq n$. Vi konstaterar sedan att $m(\cup E_k) \leq \Sigma\, m(E_k) \leq 2 \cdot 2^{-n} < \epsilon$, att $\Sigma h_k(x)$ är likformigt konvergent och därmed kontinuerlig, samt att $\Sigma h_k(x) = \Sigma g_k(x) = \varphi(x)$ om $x \notin \cup E_k$, vilket visar att $\varphi$ är mätbar. Q.

Sats (7.4.2) visar alltså att alla funktioner i $\mathcal{L}$ är mätbara. Vår nästa uppgift blir nu att visa att alla begränsade mätbara funktioner ligger i $\mathcal{L}$. Vi skall beteckna mängden av begränsade mätbara funktioner med $\mathcal{M}_B$ och skall alltså visa följande

Sats (7.4.3): $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{L}$.

Bevis: Antag att $\varphi \in \mathcal{M}$, och antag att $|\varphi(x)| \leq w$ n.ö.. Detta innebär alltså att $\varphi(x) = a_w(\varphi(x))$ n.ö., så att om $f = \varphi$ utom på en mängd $E$, så är även $a_w(f)(x) = \varphi(x)$ åtminstone nästan överallt utanför $E$. Detta innebär att vi kan välja funktionerna $f_\epsilon$ begränsade av $w$. Sätter vi nu $\epsilon_k = 2^{-k}$, och väljer $f_k$ så att $f_k = \varphi$ utom på en mängd $E_k$ sådan att $m(E_k) < \epsilon_k$ är det lätt att se att $||f_k - f_{k-1}|| < w \cdot 3 \cdot 2^{-k}$, så att $\Sigma ||f_k - f_{k-1}||_1 < \infty$. Vidare är det naturligtvis klart att $\lim f_k(x) = \varphi(x)$ n.ö. Q.

Speciellt innebär alltså sats (7.4.3) att till varje begränsad mätbar funktion $\varphi$, hör en integral $I(\varphi) = \lim \int f_k(x)dx$, där $f_k$ väljs som ovan. Om nu $\varphi$ är en positiv mätbar funktion sätter vi $\varphi_n = a_n(\varphi)$, dvs. $\varphi_n(x) = \inf(n, \varphi(x))$. Då är $\varphi_n$ integrerbar och har en integral $I(\varphi_n) \geq 0$. Vi kan sedan definiera integralen av $\varphi$ genom

$$I(\varphi) = \sup_n (I(\varphi_n))$$

vilket ger oss ett positivt tal, 0, eller $+\infty$. Man kan sedan för en godtycklig mätbar funktion definiera $I(\varphi^+)$ och $I(\varphi^-)$ och om ej

båda dessa är $+\infty$, sätter vi $I(\varphi) = I(\varphi^+) - I(\varphi^-)$. Vidare är $I(|\varphi|) = I(\varphi^+) + I(\varphi^-)$. Vi kan nu erhålla följande enkla karakterisering av $L^1$.

Sats (7.4.4): En mätbar funktion $\varphi$, definierad n.ö. på $[0,1]$ representerar ett element i $L^1$ omm $I(|\varphi|) < \infty$.

Bevis: Vi vet redan att om $\varphi \in L^1$ (dvs. om $\varphi$ representerar ett element i $L^1$) så är $\varphi$ mätbar, och $I(|\varphi|) = ||\varphi||_1 < \infty$, så det återstår att visa omvändningen. Vi observerar då först att funktionerna $\varphi_n = a_n(\varphi)$ är begränsade, mätbara och därför ligger i $L^1$. Eftersom $L^1$ är ett Banachrum räcker det därför att visa att följden $\{\varphi_n\}$ är en cauchyföljd i $L^1$. Antag därför att $m > n$. Då är $||\varphi_m - \varphi_n||_{L^1} = \int |\varphi_m - \varphi_n| = \int |\varphi_m| - \int |\varphi_n|$ och eftersom följden $I(\varphi_n)$ är monotont växande och begränsad, så är den konvergent och detta innebär att följden $\{\varphi_n\}$ är en cauchyföljd i $L^1$. Q.

5. Vi är från tidigare analyskurser vana vid att det finns ett viktigt samband mellan integration och derivation, nämligen det som ges av "integralkalkylens huvudsats": Om $f$ är en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och vi definierar $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, så är $F$ deriverbar och $F'(x) = f(x)$. Vi skall i detta avsnitt ange en liknande sats i $L^1$. Vi skall börja med att definiera ett begrepp som ger oss en starkare form av kontinuitet.

Definition (7.5.1): En funktion $f$ definierad på $[0,1]$ sägs vara absolutkontinuerlig, om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att om $\Sigma(b_k - a_k) < \delta$, så är $\Sigma|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$, för varje ändlig familj av intervall $\{I_k\} = \{(a_k, b_k)\}$.

Innan vi går vidare observerar vi nu att en absolutkontinuerlig funktion är av begränsad variation, dvs. att för varje ändlig indelning $\Delta = \{x_k\}$, där $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$, så är $\Sigma|f(x_k) - f(x_{k-1})| < M$ för något $M$ som ej beror av $\Delta$. För att se detta väljer vi först $\epsilon = 1$, och sedan något naturligt tal $K > 1/\delta$, där $\delta$ ges av antagandet om absolutkontinuitet. Gör vi nu en grundindelning $\Delta_0$,

genom $x_k = k/K$, så observerar vi att varje annan indelning kan "förfinas" med $\Delta_o$. Eftersom enligt antagande variationen över intervallet $(x_{k-1}, x_k) < 1$, så är alltså totalvariationen $< K$.

Vi ger nu delvis utan bevis nedanstående sats, som lämpligen bör rubriceras som "Lebesgue-integralkalkylens huvudsats".

Sats (7.5.2): Låt $f \in L^1(0,1)$ och sätt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Då är

(i) $F$ absolutkontinuerlig med totalvariationen $||f||_1$,

(ii) $F$ deriverbar n.ö. med derivatan $f$,

(iii) Om omvänt $G$ är en absolutkontinuerlig funktion på $[0,1]$ så är $G$ deriverbar nästan överallt $G' \in L^1$ och $G(x) = G(0) + \int_0^x G'(t)dt$.

Vi skall här endast bevisa (i). För beviset av (ii) hänvisar vi till övningarna efter nästa kapitel och för beviset av (iii) återstår inget bättre än att studera en bok i integrationsteori, förslagsvis L.I. Hedbergs kompendium eller kanske L. Carlesons kompendium.

Bevis av (i): Välj $\epsilon > 0$ och tag en kontinuerlig funktion $g$, sådan att $||f-g||_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Eftersom $g$ är kontinuerlig, så är $g$ begränsad av något tal $M$. Om nu $E = \bigcup_1^k I_j$ och $\Sigma |I_j| < \frac{\epsilon}{2M}$, så är

om $I_j = ]a_j, b_j[$

$$\Sigma \int_{a_j}^{b_j} |f(t)|dt = \Sigma \int_{a_j}^{b_j} |g(t) + (f(t) - g(t))|dt < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

vidare är $|F(b_j) - F(a_j)| \leq \int_{a_j}^{b_j} |f(t)|dt$, vilket visar att $F$ är absolutkontinuerlig.

För uppskattningen av totalvariationen observerar vi först att totalvariationen av $F$ uppenbarligen är högst $L^1$-normen av $f$, medan den omvända olikheten följer efter en approximation med en kontinuerlig funktion.

Eftersom ovanstående presentation av Lebesgueintegralen är ganska knapphändig skall vi efter nästa kapitel ge ett antal övningar som belyser teorin.

## Kap. 8. Dualitet och komplement om Lebesgueintegralen.

1. Vi skall börja detta kapitel med ett (lätt avklarat) studium av kompletteringen $L^2(0,1)$ av vårt tidigare införda inre-produktrum $C_2[0,1]$.

Låt därför $f$ vara en kontinuerlig funktion på $[0,1]$. Vi ser att

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^1 |f(t)|\cdot 1dt = (|f|| 1) \leq ||f||_2 \cdot ||1||_2 = ||f||_2 ,$$

enligt Schwarz'olikhet. Detta innebär att om $\{g_k\} \in \ell^1(C_2)$ så gäller även att $\{g_k\} \in \ell^1(C_1)$.

Detta innebär då bl.a. att $\Sigma g_k \in L^1$ och det är lätt att se att i själva verket är helt enkelt $L^2 \subset L^1$ (som funktionsrum). Eftersom $L^2$ enligt kapitel 6 är ett Hilbertrum är $(L^2)^* = L^2$. Med hjälp härav kan vi också lätt bestämma $(L^1)^*$. Låt därför $\varphi$ vara en begränsad linjär funktional på $L^1$. Då är om $f \in L^2$, $|\varphi(f)| \leq$ $\leq ||\varphi||\cdot||f||_1 \leq ||\varphi||\cdot||f||_2$, vilket innebär att $\varphi$ är en begränsad linjär funktional även på $L^2$, och eftersom $L^2$ som vi nyss anmärkte är ett Hilbertrum, så finns det $g \in L^2$, så att

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad .$$

(Formellt har vi kanske bara visat denna representation för $f$ i $L^2$, men eftersom $L^2$ bl.a. innehåller de kontinuerliga funktionerna och de är täta $L^1$ är det lätt att visa att $\varphi(f)$ ges på ovanstående sätt för alla $f$ i $L^1$).

Vi skall nu visa att utom eventuellt på en nollmängd $N$, så är $|g(x)| \leq ||\varphi||$. För att göra detta behöver vi först följande

Definition (8.1.1): Låt $E$ vara en delmängd av $[0,1]$, och definiera en funktion $1_E$, genom

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad x \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad .$$

Funktionen $1_E$ sägs vara den till mängden $E$ hörande karakteristiska funktionen. Mängden $E$ sägs vara mätbar om funktionen $1_E$ är en mätbar funktion. Om $E$ är mätbar skall vi definiera måttet av $E$, $m(E)$ genom

$$m(E) = \int_0^1 1_E(x)dx \quad .$$

Om nu $f \in L^1$, och $E$ är en mätbar mängd, så är $f \cdot 1_E$ en mätbar funktion och eftersom $|f \cdot 1_E| \leq |f|$ för alla $x$, så gäller att också $f \cdot 1_E \in L^1$. Om $E$ är en mätbar mängd kan vi därför definiera

$$\int_E f(x)dx = I_E(f) \quad \text{genom}$$

$$I_E(f) = \int_0^1 f(x)1_E(x)dx \ .$$

Vi behöver också följande

Lemma (8.1.2): Låt $f$ vara en mätbar funktion och sätt

$$E_a = \{x \mid f(x) \geq a\} \ ,$$

då är $E_a$ mätbar.

Bevis: Vi definierar en kontinuerlig funktion $g$ på $\mathbb{R}$ genom

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad x \geq a \\ x/a & \text{om} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{om} \quad x \leq 0 \end{cases} \ .$$

Då är $g$ kontinuerlig, så att $gof$ är mätbar, och vi ser att $E_a = \{x \mid gof(x) = 1\}$. Eftersom vidare en produkt av mätbara funktioner är mätbar, så är $(gof)^n$ mätbar för varje $n$, och eftersom följden $(gof)^n$ dels konvergerar punktvis mot $1_{E_a}$, dels är en cauchyföljd i $L^1$, så ligger $1_{E_a}$ i $L^1$ vilket innebär att $E_a$ är mätbar. Q.

Vi kan nu återgå till att studera vår begränsade linjära funktional $\varphi$ och dess integralrepresentation

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, g(x)dx \ .$$

Vi vill visa att $|g(x)| \leq ||\varphi||$ n.ö. och vi antar motsatsen. dvs. att $E = \{x \mid |g(x)| > ||\varphi||\}$ har positivt mått. Eftersom $E = \bigcup E_j$, där $E_j = \{x \mid |g(x)| > ||\varphi|| + \frac{1}{j}\}$, så är $E$ en nollmängd om varje $E_j$ är det. Vi antar därför att för givet $j$,

$$E_j = \{x \mid |g(x)| > ||\varphi|| + 1/j\}$$

har positivt mått. Vi kan vidare anta att mängden $E_j^+$, som är den mängd där $g > 0$ skuret med $E_j$, har positivt mått. Vi konstaterar då att

$$||1_{E_j}||_1 = \int_0^1 1_{E_j}(x)dx = \int_{E_j^+} 1\,dx, \qquad \text{medan}$$

$$\varphi(1_{E_j^+}) = \int_{E_j^+} g(x)dx > (||\varphi|| + \tfrac{1}{j}) \cdot ||1_{E_j^+}||$$

vilket strider mot förutsättningen. Därmed är varje $E_j$ en nollmängd, och detta visar att $|g(x)| \leq ||\varphi||$ n.ö., dvs. att den linjära funktionalen $\varphi$ kan representeras som ovan med en begränsad mätbar funktion. Omvänt vet vi att produkten av mätbara funktioner är mätbar, och att om $g$ är en begränsad mätbar funktion, så är $|fg| < K|f|$ för alla $x$, så att $f \in L^1 \Longrightarrow fg \in L^1$, och då ger

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 f(x)\, g(x)dx$$

en begränsad linjär funktional på $L^1$. Vi skall beteckna mängden av begränsade mätbara funktioner på $[0,1]$ med $L^\infty(0,1)$, och för $g \in L^\infty$ skall vi skriva

$$||g||_\infty = \inf \{a | E_a \text{ nollmängd}\}, \quad \text{där } E_a = \{x | \, |g(x)| > a\}.$$

En liknande räkning som den ovan visar att $||\varphi_g|| = ||g||_\infty$.

Vi har därmed infört tre viktiga Banachrum av funktioner på $[0,1]$, och samtidigt visat att $(L^1)^* = L^\infty$, $(L^2)^* = L^2$. Vi vill också påpeka att $(L^\infty)^*$ liksom $(\ell^\infty)^*$ är mycket komplicerat.

2. Vi har hittills i vår presentation av Lebesgueintegralen endast integrerat funktioner definierade på intervallet $(0,1)$ medan vi i tidigare analyskurser kunnat integrera såväl funktioner definierade på hela $\mathbb{R}$ som funktioner definierade i $\mathbb{R}^n$ eller delmängder av $\mathbb{R}^n$. Genom att på ungefär samma sätt som i föregående kapitel komplettera lämpliga rum av kontinuerliga funktioner kan man därigenom definiera bl.a. följande Banachrum, $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ och $L^\infty(\mathbb{R})$, samt även t.ex. $L^2(\mathbb{R}^n)$ eller $L^1(\mathbb{I}^n)$ där $\mathbb{I} = (0,1)$ och $\mathbb{I}^n$ är motsvarande delmängd av $\mathbb{R}^n$. I alla dessa fall har vi också $(L^1)^* = L^\infty$, och $(L^2)^* = L^2$, närmare bestämt är alla $L^2$-rum Hilbertrum.

Anm. För beskrivningen av $L^1(\mathbb{R}^n)$ behövs följande begrepp.

a) Ett "öppet intervall" i $\mathbb{R}^n$, $]a,b[$ är en rektangel, dvs.

$$]a,b[ = \{x | x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\; a_k < x_k < b_k\}$$

eller om man så vill $\{x|a < x < b\}$ , där $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$.

b) måttet av rektangeln $I = ]a,b[$ är

$$(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n) = \prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k) .$$

Vi skriver $|I| = |]a,b[| = \pi(b_k-a_k)$ (och även t.ex.

$|\bar{I}| = |[a,b]| = |\{x|a_k \le x_k \le b_k\}| = \pi(b_k-a_k)$.

c) Om $E$ är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ skall vi skriva $m(E) < \alpha$ om det finns $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ , så att $E \subset \bigcup I_k$ om $\Sigma|I_k| < \alpha$.

d) $E$ är naturligtvis en nollmängd om

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad m(E) < \epsilon.$$

För beviset av att $\Sigma f_k(x)$ konvergerar n.ö. om $\Sigma||f_k||_1 =$

$$= \Sigma \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|dx < \infty \ , \quad f_k \in K_o(\mathbb{R}^n),$$

behöver vi följande version av Tchebycheff's olikhet som bevisas på samma sätt som lemma (7.2.1) i föregående kapitel.

Låt $f$ vara en positiv kontinuerlig funktion i $\mathbb{R}^n$, sådan att $f(x) = 0$ utanför någon begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$, och sådan att $\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx < A$.

Låt vidare $\omega > 0$ vara ett reellt tal och sätt $E_\omega < \{x|f(x) > \omega\}$. Då finns ändligt många intervall $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ sådana att $E_\omega \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ , och så att $\sum_{k=1}^{N} |I_k| < \frac{A}{\omega}$ .

I detta sammanhang bör dock följande jämförelse mellan rum av funktioner på $(0,1)$, rum av följder och rum av funktioner på $\mathbb{R}$ göras. Vi har $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$, $L^\infty(0,1) \subset L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$, men inga sådana inklusioner för $L^p(\mathbb{R})$ $(p = 1,2,\infty)$, utom den något oäkta $L^1 \cap L^\infty \subset L^2$ . Beviset av att $(L^1(\mathbb{R}))^* = L^\infty(\mathbb{R})$ är därför något mer komplicerat än ovan.

Vi kommer i ett senare kapitel bl.a. att syssla med integraloperatorer och kommer därvid att studera såväl dubbelintegraler som itererade enkelintegraler, dvs. såväl

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x,y)dx\,dy \quad \text{som} \quad \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} F(x,y)dy$$

över lämpliga mängder i $\mathbb{R}^2$. För studiet av sådana integraler är följande sats av fundamental betydelse.

Sats (8.2.1): (Fubini). Låt $F(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Då är för nästan alla $y$ funktionen $f_y(x) = F(x,y)$ såsom funktion av $x$, en funktion i $L^1(\mathbb{R})$ och vidare är funktionen $g(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)dx$, som alltså är definierad för nästan alla $y$, också en funktion i $L^1(\mathbb{R})$, och vidare är

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)dy = \text{(enligt definition)} = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} F(x,y)dx = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x,y)dx\,dy.$$

Bevis: Vi definierar $L^1(\mathbb{R}^2)$ såsom kompletteringen av rummet $K_0(\mathbb{R}^2)$ av alla kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}^2$ som är 0 utanför en begränsad mängd och vi anser som bekant att för en sådan funktion $f$, är

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy.$$

Enligt föregående kapitel kan vi då skriva $F(x,y) = \Sigma f_k(x,y)$, där $\Sigma ||f_k||_1 < \infty$, varvid $f_k \in K_o$ och $||f_k||_1 = \iint |f_k|dx\,dy$.

Vi skriver nu $g_k(y) = \int |f_k(x,y)|dx$ och vi observerar att $g_k \in K_o(\mathbb{R})$, och att $||g_k||_1 = ||f_k||_1$, så att $\Sigma ||g_k||_1 < \infty$.

Därav följer då omedelbart att $\Sigma g_k \in L^1(\mathbb{R})$ varav speciellt följer att $\Sigma g_k(y) < \infty$ för nästan alla $y$. Vi observerar sedan att för ett fixt $y$ är normen i $L^1(\mathbb{R})$ av funktionen $f_k(x,y) = g_k(y)$. Om nu $\Sigma g_k(y) < \infty$ är då $\Sigma ||f_k(x,y)||_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$, vilket enligt föregående kapitel visar att för varje sådant $y$, ligger $F(x,y) = \Sigma f_k(x,y)$ i $L^1(\mathbb{R})$ som funktion av $x$. Skriver vi nu $h_k(y) = \int f_k(x,y)dx$ och observerar att $||h_k||_1 < ||g_k||_1$, så ser vi att även funktionen $g(y) = \int F(x,y)dx$ ligger i $L^1(\mathbb{R})$.

Det återstår alltså att visa att

$\int dy \int F(x,y)dx = \iint F(x,y)dx\,dy$, varvid den största svårigheten kanske är att se var svårigheten ligger. Vi börjar då med att konstatera att enligt definition är

$$\iint F(x,y)dx\,dy = \iint \Sigma f_k(x,y)dx\,dy = \Sigma \iint f_k(x,y)dx\,dy = \Sigma a_k ,$$

varvid $\Sigma a_k$ är en absolut konvergent serie. Vi väljer nu $\epsilon > 0$, och tar $N$, så att $\sum_N^\infty ||f_k|| < \epsilon/2$. Vi skriver sedan $F(x,y) = \sum_0^N f_k(x,y) + \sum_{N+1}^\infty f_k(x,y) = G(x,y) + R(x,y)$, och konstaterar att $\iint G(x,y)dx\,dy = \int dy \int G(x,y)dx$ eftersom $G$ är en kontinuerlig funktion som är 0 utanför en begränsad mängd. På grund av vårt val av $N$, vet vi nu att

$$\left|\iint R(x,y)dx\,dy\right| = \left|\iint \sum_N^\infty f_k(x,y)dx\,dy\right| \le \iint \sum_N^\infty |f_k(x,y)|dx\,dy < \epsilon/2.$$

På motsvarande sätt är också

$$\left|\int dy \int R(x,y)dx\right| = \text{(per definition)} = \left|\int dy \int \sum_N^\infty f_k(x,y)dx\right| =$$

$$= \left|\int dy \left(\sum_N^\infty \int f_k(x,y)dx\right)\right| \le \int dy\left(\sum_N^\infty \int |f_k(x,y)|dx\right) =$$

$$= \int dy \left(\sum_N^\infty g_k(y)\right) = \sum_N^\infty ||f_k|| < \epsilon/2,$$

och då är $\left|\iint F(x,y)dx\,dy - \int dy \int F(x,y)dx\right|$

$$< \left|\iint R(x,y)dx\,dy\right| + \left|\int dy \int R(x,y)dx\right| = \epsilon,$$

och detta visar satsen. Q.

Det bör påpekas att Fubini's sats gäller i betydligt "abstraktare" sammanhang än vad vi bevisat den ovan. Dock är villkoret att $F \in L^1$ alltid absolut nödvändigt och kan inte ersättas av t.ex. $L^2$-villkor.

I mycket av det vi skall göra i fortsättningen kommer det att vara oväsentligt om $L^2$ står för $L^2(0,1)$, $L^2(\mathbb{R})$ eller kanske $L^2(\mathbb{R}^n)$, för den skull skall vi om $X$ är en delmängd av $\mathbb{R}^n$, skriva $K_o(X)$ för att ange mängden av begränsade kontinuerliga funktioner på $X$, som är 0 utanför en begränsad mängd, varvid $K_o(X)$ är mängden av alla kontinuerliga funktioner på $X$, om $X$ är sluten och begränsad. Vi skall vidare skriva $K_o^p(X)$ $(p = 1,2)$ för att ange att vi uppfattar $K_o(X)$ som ett normerat rum med p-normen

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{där } dx \text{ är } dx_1\,dx_2 \ldots dx_n .$$

Vi låter sedan $L^p(X)$ vara kompletteringen av $K_o^p(X)$. I kapitlet om Hilbertrum påpekade vi också att om $p(x)$ är en positiv funktion på t.ex. $[0,1]$ så ger $\int_0 f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx = (f|g)$ ett inre produktrum.

På samma sätt är även $\int_0^1 |f(x)|p(x)dx$ ett slags 1-norm på $C[0,1]$, likaså ger om $F$ är en växande funktion på $\mathbb{R}$, uttrycket $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,d\,F(x) = (f|g)$ en inre produkt i $K_o(\mathbb{R})$.

För att täcka alla dessa fall skall vi skriva $L^p(X,\mu)$ $(p = 1,2,\ )$ för att beskriva kompletteringen av $K_o^p(X,\mu)$ i en sådan p-norm, där $\mu$ alltså står för t.ex. $p(x)dx$ eller $d\mathbb{F}(x)$.

3. Vi skall avsluta detta kapitel med att ange dels Littlewoods tre principer, dels de tre huvudsatserna för Lebesgueintegralen.
Först Littlewoods principer:

I. Varje mätbar funktion är "nästan kontinuerlig".
(Man kan därför ofta "låtsas" att en given funktion är kontinuerlig).

II. Varje mätbar mängd är "nästan en ändlig förening av intervall" (dvs. rektanglar i $\mathbb{R}^n$).
(Detta betyder att "skillnaden" är en liten mängd).

III. Varje konvergent följd av mätbara funktioner, konvergerar "nästan likformigt".
(Detta betyder att utanför en mängd med litet mått konvergerar följden likformigt - se Egoroff's sats i övning (8. . ) nedan.

Ovanstående tre principer är främst till för att minska respekten för Lebesgue-integralen - det är nämligen mycket vanligt att nybörjaren visserligen litar på att en föreläsare integrerar rätt, men inte är riktigt säker på att det blir rätt om han själv gör likadant.

Vi övergår nu till "Lebesgue-integralens triumf", dvs. de tre satser som gör integralen så lämplig i samband med "konvergenta följder" och gränsövergångar under integraltecknet.

I. (Lebesgues sats om dominerad konvergens). Låt $g(x) > 0$ ligga i $L^1(X,\mu)$ och låt $\{f_k\}$ vara en följd i $L^1(X,\mu)$, sådan att för alla $k$, $|f_k(x)| \leq g(x)$, och sådan att $f_k \to f$ n.ö. Då är $f$ mätbar, $f \in L^1$ och $\int f(x)d\mu\,(x) = \lim \int_X f_k(x)d\mu\,(x)$.

II. (Beppo-Levis sats). Låt $\{g_k\}$ vara en följd positiva funktioner i $L^1(X,\mu)$. Då är $\int_X \Sigma\, g_k(x)d\mu\,(x) = \Sigma \int_X g_k(x)d\mu\,(x)$ också i den meningen att om summan av integralerna är divergent, så är funktionen

$\Sigma\, g_k(x)$ för stor för att ligga i $L^1$.

III. (Fatou's lemma). Om $\{f_k\}$ är en följd av positiva funktioner, så är $\underline{\lim}\, f_k$ mätbar och

$$\int_X \underline{\lim}\, f_k(x)d\mu(x) \leq \underline{\lim} \int f_k(x)d\mu(x) .$$

För bevisen av ovanstående se nedanstående övningar.

## Kap. 9. Komplexa linjära rum.

1. Vi har hittills i denna kurs endast sysslat med linjära rum över de reella talen. Nu är det (förhoppningsvis) välbekant att det även går att definiera linjära rum över de komplexa talen. Att vi hittills inte sysslat med linjära rum över de komplexa talen, är av geometriska, eller kanske snarare "intuitiva skäl", eftersom de flesta förefaller ha bättre geometrisk intuition för reella linjära rum. A andra sidan har de komplexa talen ur algebraisk synpunkt en stor fördel gentemot de reella, nämligen den att de är algebraiskt fullständiga i den meningen att varje polynom med komplexa koefficienter har en komplex rot (algebrans fundamentalsats). Detta innebär stora fördelar vid studiet av linjära operatorer av ett rum på sig självt. Bl.a. vill vi påpeka att en viktig konsekvens av algebrans fundamentalsats är att den karakteristiska ekvationen för en matris alltid har minst en rot, och detta visar sig innebära att varje linjär avbildning av ett komplext ändligt-dimensionellt linjärt rum in i sig självt har minst en egenvektor.

Några andra goda skäl till att studera linjära rum över de komplexa talen är:

(i) lösningar av differentialekvationer blir ofta snyggare om vi tillåter komplexvärda funktioner som lösningar (algebrans fundamentalsats igen).

(ii) fourieranalysen blir trevligare om vi utnyttjar Eulers formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(iii) vi kan på ett naturligt sätt studera Banachrum och Hilbertrum av analytiska funktioner.

Slutligen finns det ett utmärkt skäl till att inte införa komplexa linjära rum förrän på detta stadium, nämligen det pedagogiska. Det ger oss nämligen ett utmärkt tillfälle till en snabbrepetition av föregående del av kursen.

2. Vi ska alltså repetera kursen och notera var det kan behövas tillägg eller ändringar då vi studerar normerade rum över de komplexa talen. Eftersom vi förutsätter att läsaren antingen känner till eller själv kan lista ut vad som bör menas med ett linjärt rum över de komplexa talen antas detta vara ett känt begrepp. Därmed kan repetitionen börja, och vi gör följande observationer, ändringar eller tillägg.

Kap. 1, sid. 1, överallt där det står $\mathbb{R}$ kan det lika gärna stå $\mathbb{C}$, i ex. II ska $x_k^2$ utbytas mot $|x_k|^2$, i ex. III, IV, V kan alla funktioner eller följder uppfattas som komplexvärda.

Vi måste sedan ändra definitionen av en linjär funktional, för om $N$ är ett normerat rum över de komplexa talen så finns inga linjära avbildningar från $N$ till $\mathbb{R}$. I stället ska vi naturligtvis kalla en linjär avbildning från $N$ till $\mathbb{C}$ för en komplex linjär funktional, och vi ska om $N$ är ett komplext linjärt rum skriva $N^* = \mathcal{D}(N,\mathbb{C})$.

Därefter är det värt att notera att inga ändringar behövs förrän på sid. 9 i beviset av C-S-B's olikhet. Förutsättningen bör vara att $\{a_k\}_{k=1}^N$ och $\{b_k\}_{k=1}^N$ är ändliga följder av komplexa tal, och olikheten lyder

$$|\Sigma a_k\bar{b}_k|^2 \leq (\Sigma|a_k||b_k|)^2 \leq (\Sigma|a_k|^2)(\Sigma|b_k|^2).$$

För beviset sätter vi sedan $A = \Sigma|a_k|^2$, $B = \Sigma|b_k|^2$ och $C = \Sigma a_k\bar{b}_k$. Därefter sätts

$$f(t) = \Sigma|a_k - tb_k|^2 = \Sigma(a_k - tb_k)(\bar{a}_k - \bar{t}\bar{b}_k) = A + |t|^2B - \bar{t}C - t\bar{C}.$$

Vi observerar igen att $B = 0 \Longrightarrow C = 0$, och vi antar därefter $B \neq 0$. Vi ser igen att då är både $B > 0$ och $f(t) \geq 0$ (för alla komplexa $t$), och vi skriver

$$Bf(t) = AB + |t|^2B^2 - \bar{t}BC - tB\bar{C} = (tB - C)(\overline{tB} - \bar{C}) + AB - |C|^2.$$

Vi väljer sedan åter $t = C/B$.

En viktig observation vid denna repetition är att övning (2.2.9) går lika bra om funktionerna $f$ och $F$ antas vara komplex-värda. Därefter uppmanas läsaren att vara noggrann vid repetitionen av sid. 12 fr.o.m. definition (2.3.7) t.o.m. sats (2.3.10) för att vara säker på att inga oklarheter uppstår om hur dessa ska tolkas då de givna rummen är komplexa.

I Kapitel 3 behövs praktiskt taget inga ändringar alls. Vi läser $N^*$ som $L(N,\mathbb{C})$ och konstaterar att allt går precis lika bra som i det reella fallet. Speciellt vill vi påpeka att övningarna (3.3.7) - (3.3.10) kan visas lika lätt då $C(a,b)$ står för rummet av komplex-värda kontinuerliga funktioner, och $C(a,b)^*$ står för rummet av komplexvärda linjära funktionaler på $C(a,b)$. Den konstruerade funktionen $F$ är naturligtvis också komplex-värd, men definitionen av en komplexvärd funktion av begränsad variation är ordagrannt densamma som definitionen av en reellvärd sådan.

3. Kapitel 4 är värt ett eget avsnitt. Svårigheten i att visa Hahn-Banach's sats för komplexa normerade rum, ligger i att det grundläggande geometriska lemmat (4.1.1) endast gäller för reella linjära funktionaler.

Beviset av Hahn-Banach's sats i komplexa linjära rum baseras därför på ett knep. Vi ska nämligen utnyttja att vi redan bevisat satsen i reella normerade rum. Vi observerar därför först att om $N$ är ett komplext Banachrum, så kan vi uppfatta $N$ även som ett reellt Banachrum, genom att helt enkelt låta bli att multiplicera annat än med reella tal. Eftersom det faktiskt ändå är någon skillnad på detta reella normerade rum ska vi beteckna det med $R(N)$. Vår nästa observation är att om $F: N \to \mathbb{C}$ är en komplexvärd linjär funktional så är funktionen $R(f)$ från $N$ till $\mathbb{R}$ definierad genom

$$R(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \quad \text{(d.v.s. realdelen av } f(x)\text{)}$$

en linjär funktional från $R(N)$ till $\mathbb{R}$ (d.v.s. $R(f)$ är en reell linjär funktional).

Låt nu $M$ vara ett delrum (d.v.s. komplext delrum) av det komplexa normerade rummet $N$, och låt $F: M \to \mathbb{C}$ vara en begränsad komplex linjär funktional på $M$, och vi antar som vanligt $\|f\| = 1$. Låt nu $R(f): R(M) \to \mathbb{R}$ vara motsvarande reella funktional. (Observera att även $\|R(f)\| = 1$.) Enligt Hahn-Banach's sats för reella normerade rum finns det då en reell linjär funktional $F: R(N) \to \mathbb{R}$, sådan att $\|F\| = 1$, och sådan att $F|_M = R(f)$. Nu kommer knepet. Vi definierar en funktion $G: N \to \mathbb{C}$ genom $G(x) = F(x) - iF(ix)$. Sedan konstaterar vi till vår glada överraskning att

$$G(a+ib)x) = G(ax+ibx) = G(ax+bix) = F(ax+bix) - iF(i(ax+bix) =$$

$$= F(ax) + F(bix) - iF(iax - bx) = aF(x) + bF(ix) - iaF(ix) + ibF(x) =$$

$$= (a+ib)F(x) - i(a+ib)F(ix) = (a+ib)G(x),$$

vilket visar att $G$ är komplext linjär. Därefter är det en rätt enkel övning att visa dels att $\|G\| = 1$, dels att $G|_M = f$. (Hemligheten bakom detta "knep" är att en komplex linjär funktional $f: N \to \mathbb{C}$ inte bara entydigt bestämmer den reella linjära funktionalen $R(f)$, utan också själv i sin tur är entydigt bestämd av $R(f)$ genom formeln $f(x) = R(f)(x) - iR(f)(ix)$.)

4. I kapitel 5 studeras sedan begreppen 'uppräkneliga mängder, separabla normerade rum, konvexa mängder och svag konvergens'. Vi konstaterar då först att uppräknelighet har naturligtvis ingenting att göra med varken komplexa eller reella tal, så det avsnittet hoppar vi glatt över. Definitionen av ett separabelt normerat rum är naturligtvis oförändrad, och den viktigaste observationen i detta avsnitt är att $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ är en tät uppräknelig delmängd av $\mathbb{C}$ så att även $\mathbb{C}$ är ett separabelt normerat rum. Detta innebär sedan att resten av avsnitt 2 i kap. 5 gäller i stort sett

oförändrat.

I avsnittet 5.3 behövs sedan en viss försiktighet. Definition (5.3.1) är oförändrad, exemplen är med undantag av a) och kanske i någon mån b) precis lika goda som i det reella fallet men fr.o.m. sats (5.3.2) krävs vissa ändringar. Vi börjar med att i sats (5.3.2) och dess korollarium (5.3.3) läsa $R(f)$ i stället för $f$, och hoppar sedan enklast över de efterföljande övningarna. Avsnitten (5.4) och (5.5) gäller i stort sett oförändrade, dock kanske sats (5.5.2) och dess bevis bör läsas med viss uppmärksamhet.

5. Eftersom även kap. 6 är värt ett eget avsnitt fick därmed också kap. 5 smyga sig in med ett eget avsnitt.

Vad beträffar kap. 6 börjar vi med att observera att i ett komplext linjärt rum kan det inte finnas någon (komplex-värd) funktion med egenskaperna i def. (6.1.1). Om nämligen $(x|x) > 0$, så är $(ix|ix) = i(x|ix) = i(ix|x) = -(x|x) < 0$.

Räddningen ur denna svårighet är naturligtvis den som antytts redan i och med den komplexa versionen av Chauchy-Schwarz-Bunyakowski's olikhet, nämligen att anta i stället för $(y|x) = (x|y)$ som i det reella fallet att

(i') $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (komplex konjugering).

Schwarz' olikhet blir då $|(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y)$ och bevisas ungefär som förut. Man visar sedan på samma sätt att $(x|x)^{1/2}$ ger en norm och att parallellogramlagen gäller.

För att sedan bevisa att om $N$ är ett komplext normerat rum där parallellogramlagen gäller också är ett komplext inre-produktrum, så observerar vi först att om $V$ är ett komplext linjärt rum, med en reell inre-produkt $(x|y)_R$, som uppfyller villkoren i definition (6.1.1), varvid (ii) endast antas gälla för reella tal $a,b$, så ger formeln

$$(x|y)_C = \frac{1}{2}\left[(x|y)_R - i(ix|y)_R + (x|iy)_R + (ix|iy)_R\right]$$

en komplex inre-produkt i $V$. Vi observerar sedan att om parallellogramlagen antas gälla i ett komplext normerat rum $N$, så kan vi uppfatta $N$ som ett reellt normerat rum, där parallellogramlagen gäller och därmed enligt övning (6.1.4) konstruera en reell inre-produkt i $N$. Om vi sedan observerar att eftersom $\|ix\|^2 = (ix|ix)_R = \|x\|^2 = (x|x)_R$, så är även $(x|x)_C = \|x\|^2$, så ser vi att $N$ är ett komplext inre-produktrum.

Därmed hoppade vi tillfälligt över listan av givna exempel på reella inre-produktrum, men om vi nu återgår till denna är det lätt att se att alla där givna exempel har komplexa motsvarigheter. För att erhålla dessa

ersätter vi i exemplen a, b, c, d och h, $\mathbb{R}$ med $\mathbb{C}$ och $\Sigma x_k y_k$ med $\Sigma x_k \bar{y}_k$, och i de övriga exemplen uppfattar vi t.ex. $C[a,b]$ som rummet av komplexvärda kontinuerliga funktioner på $[a,b]$, och vi definierar $(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

I avsnittet (6.2) är definitionen av ett ortogonalsystem, och av ett ON-system exakt desamma. Den komplexa versionen av sats (6.2.1) lyder dock på följande sätt:

Låt E vara ett ändligt ON-system och låt L(E) vara det delrum som uppspänns av E, och antag att $x = \Sigma x_k e_k$ och $y = \Sigma y_k e_k$ båda ligger i L(E). Då är

(i) $\quad \|x\|^2 = \Sigma |x_k|^2$,

(ii) $\quad (x|y) = \Sigma x_k \bar{y}_k$.

Efter denna upplysning bör det vara lätt att genomföra de nödvändiga ändringarna i resten av avsnittet, inklusive de avslutande exemplen. Observera också att de polynom som erhålls i det komplexa fallet blir exakt desamma som i det reella. (Pröva ett exempel och motivera sedan varför.) Avsnitten (6.3) och (6.4) gäller sedan i stort sett oförändrade. Dock finns ju ingen ordningsrelation i $\mathbb{C}$ så att korollarium (6.3.3) måste modifieras till att $\mathrm{Re}(c|c_o) \geq \mathrm{Re}(c_o|c_o)$, med motsvarande ändring av det andra påståendet i korollarium (6.3.4). Även dessa modifierade korollarier räcker dock för beviset av korollarium (6.3.5). Återstoden av kapitlet är sedan oförändrad.

6. Innan vi övergår till studiet av kap. 7 och 8 så ska vi införa följande

Konvention: I återstoden av detta kompendium betyder normerat rum detsamma som komplext normerat rum, medan reellt normerat rum skrivs reellt normerat rum, och motsvarande gäller för Banachrum.

Denna konvention innebär också att om N är ett rum av följder så består följderna av komplexa tal, och om N är ett rum av funktioner så är funktionerna komplex-värda. Vi kommer därför i fortsättningen att skriva t.ex. $C_R[0,1]$ för rummet av kontinuerliga reellvärda funktioner på $[0,1]$, medan beteckningen $C[0,1]$ förbehålls rummet av komplexvärda kontinuerliga funktioner. Även våra i kapitel 7 införda $L^p$-rum vederfars samma öde och skrivs alltså i fortsättningen $L^p_R$.

Vi inför nu på nytt 1-normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ i $C[0,1]$, och betecknar motsvarande normerade rum $C_1[0,1]$. Vi utnyttjar nu att varje

komplex-värd kontinuerlig funktion $f$ på $[0,1]$ kan skrivas

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

där $g$ och $h$ är reellvärda kontinuerliga funktioner. Vidare är $\|g\|_1 < \|f\|_1$ och $\|h\|_1 < \|f\|_1$, och detta innebär att om $f_k = g_k + ih_k$, och $\{f_k\} \in \ell^1(C_1)$, gäller även att $\{g_k\} \in \ell^1(C_{1,R})$ och $\{h_k\} \in \ell^1(C_{1,R})$ vilket innebär att $\mathrm{Re}(\Sigma f_k) \in L^1_R$ och $\mathrm{Im}(\Sigma f_k) \in L^1_R$.

Därmed är det uppenbart att t.ex. $L^p(\mathbb{R})$ består av alla komplexvärda funktioner $f$, sådana att $g = \mathrm{Re}(f)$ och $h = \mathrm{Im}(f)$ båda är mätbara reella funktioner, och sådana att

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx = \int_{\mathbb{R}} (g^2 + h^2)^{p/2} dx < \infty.$$

Observera att $f$ mätbar $\Longrightarrow$ $|f| = (g^2 + h^2)^{1/2}$ mätbar.

7. Vi ska avsluta detta kapitel med att studera ett konkret problem om analytiska funktioner. Vid behandlingen av detta problem ska vi se hur maximumprincipen för analytiska funktioner, Hahn-Banach's sats och Riesz's representationssats för $C[a,b]^*$ tillsammans leder fram till 'Poissonintegralen för harmoniska funktioner'. Samtidigt får vi en viss förberedelse för den Fourier-analys som ingår i nästa kapitel.

Vi börjar med att införa beteckningar för några delmängder av det komplexa planet enligt följande:

(i) $\mathbb{U} = \{z \mid |z| < 1\}$,
(ii) $\mathbb{D} = \{z \mid |z| \leq 1\}$,
(iii) $\mathbb{T} = \{z \mid |z| = 1\}$.

Vi ska också införa två viktiga Banachrum, nämligen

$C(\mathbb{T})$ som är rummet av kontinuerliga funktioner på $\mathbb{T}$, normerat med max-normen, och

$A(\mathbb{D})$ som är rummet av alla kontinuerliga funktioner på $\mathbb{D}$ som är analytiska i $\mathbb{U}$, också normerat med max-normen.

Vi visar nu följande

Sats (9.7.1): Det finns en isometrisk linjär avbildning (restriktionsavbildningen)

$$R: A(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T}),$$

vilket innebär att $A(\mathbb{D})$ kan uppfattas som ett slutet delrum av $C(\mathbb{T})$.

Bevis: Givet $f \in A(\mathbb{D})$ sätter vi $R(f) = f|_{\mathbb{T}}$. Avbildningen $R$ är uppenbarligen linjär och eftersom maximum för en kontinuerlig funktion på en delmängd aldrig kan vara större än maximum över hela mängden är $\|R\| \leq 1$,

och $\|R(f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{D})}$. Å andra sidan är enligt maximumprincipen för analytiska funktioner

$$\max \{ |f(z)| \mid z \in \mathbb{D} \} = \max \{ |f(z)| \mid z \in \mathbb{T} \}$$

(ty en analytisk funktion kan inte anta maximum i en inre punkt), vilket visar att $R$ är en isometri. Q.

Poängen med sats (9.7.1) är att vi får (och kommer att) uppfatta $A(\mathbb{D})$ som ett Banachrum av kontinuerliga funktioner på $\mathbb{T}$. Vi kan nu formulera och delvis lösa vårt ovan aviserade problem, såsom

Sats (9.7.2): För varje $z \in \mathbb{D}$ ger $L_z(f) = f(z)$ en linjär funktional av norm 1 på $A(\mathbb{D})$. Denna kan utvidgas till en linjär funktional av norm 1 på $C(\mathbb{T})$.

Bevis: Maximumprincipen och Hahn-Banach's sats. Q.

Vi har i kapitlen 2 och 3 ovan, med läsarens benägna bistånd (d.v.s. i form av övningar) erhållit en representation (d.v.s. en beskrivning) av $C_{\mathbb{R}}[a,b]^*$. Vi ska nedan sammanfatta dessa kunskaper med diverse annat vetande till följande

Representation av $C(\mathbb{T})$ och $C(\mathbb{T})^*$.

(i) Till varje funktion $f$ i $C(\mathbb{T})$ hör en periodisk funktion $\underline{f}$ på $\mathbb{R}$, given av $\underline{f}(t) = f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$, eller alternativt en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $[0,2\pi]$, sådan att $f(2\pi) = f(0)$. Omvänt ger varje kontinuerlig funktion $g$ på $[0,2\pi]$ sådan att $g(2\pi) = g(0)$ upphov till en kontinuerlig funktion på $\mathbb{T}$.

(ii) Till varje kontinuerlig linjär funktional $L$ på $C(\mathbb{T})$ hör en entydig komplexvärd funktion $F(x)$ $(= G(x) + iH(x)$, $G$ och $H$ reella) på $\mathbb{R}$ med följande egenskaper:

a) $F$ (och därmed även $G$ och $H$) är av begränsad variation på $\mathbb{R}$.

b) Om $f \in C(\mathbb{T})$ är

$$L(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dF(t).$$

c) $F(x) = 0$ om $x \leq 0$ och $F(x) = F(2\pi)$ om $x > 2\pi$, och $F(x)$ är högerkontinuerlig, d.v.s. $F(x) = \lim F(t)$, $t \to x$, $t > x$.

d) Omvänt ger varje funktion med egenskaperna a) och c) en begränsad linjär funktional på $C(\mathbb{T})$ med normen lika med totalvariationen.

Anm. Ovanstående representation har ej formulerats som en sats, och vi ger heller inte något formellt bevis. Däremot finns det kanske plats för följande kommentar.

Att det första påståendet, d.v.s. det som följer efter (i), är sant inser man utan svårighet. Påståendena (ii) a) och b) är en omedelbar följd av den reella motsvarigheten som visats i övning (3.3.10), medan c) är följden av en 'normalisering' för att göra funktionen $F$ entydig.

Genom att kombinera ovanstående representation med sats (9.7.2) erhåller vi följande

Sats (9.7.3): Till varje $z \in \mathbb{U}$ kan tillordnas (minst) en växande, högerkontinuerlig funktion $F_z(t)$ med följande egenskaper:

(i) $F_z(t) = 0$ om $t \leq 0$, $F_z(t) = 1$ om $t \geq 2\pi$, och

(ii) för varje $f \in A(\mathbb{D})$ är

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})dF(t) \quad (= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{it})dF(t)\ ).$$

Bevis: Det följer av ovanstående representation och sats (9.7.2) att det finns en högerkontinuerlig funktion $F_z$, sådan att $F_z(t) = 0$ om $t \leq 0$, och med totalvariationen 1 som uppfyller (ii). Vi utnyttjar nu det faktum att funktionen 1 tillhör $A(\mathbb{D})$, vilket innebär att

$$1 = \int_0^{2\pi} 1dF_z(t) = F_z(2\pi) - F_z(0).$$

För att visa att denna funktion måste vara växande, så låter vi $x_1$ och $x_2$ vara givna, och antar att $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2\pi$. Vi får då en indelning $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ genom att sätta $x_0 = 0$, $x_3 = 2\pi$. Då är

$$1 = \sum_{k=1}^{3} \left[F_z(x_k) - F_z(x_{k-1})\right] \leq \sum_{k=1}^{3} \left|F_z(x_k) - F_z(x_{k-1})\right| \leq 1,$$

och detta innebär att alla olikheter är likheter, vilket bl.a. innebär att $F_z(x_2) - F_z(x_1) \geq 0$, d.v.s. att $F_z$ är växande. Q.

Vi observerar närmast att eftersom funktionen $F_z$ är växande, så är den speciellt reell, och detta innebär att

$$L_z(g) = \int_0^{2\pi} g(e^{it})dF_z(t)$$

är en reell linjär funktional på $C_R(\mathbb{T})$. Vi ska nedan utnyttja denna observation för att visa att den av sats (9.7.3) givna funktionen $F_z$ är entydigt bestämd.

Vi börjar därvidlag med att observera att om $f \in A(\mathbb{D})$, $f = g + ih$, $g,h$ reella, så är

$$\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi} f(e^{it})dF_z(t)\right] = \int_0^{2\pi} g(e^{it})dF_z(t).$$

Antag nu att även funktionen $G_z$ uppfyller villkoren i sats (9.7.3). Då är uppenbarligen

$$\int_0^{2\pi} g(e^{it})dH(t) = 0, \quad (H(t) = F_z(t) - G_z(t)),$$

för varje $g$, sådant att $g = \mathrm{Re}f$, där $f \in A(\mathbb{D})$. Vi vill visa att under dessa omständigheter så är $H(t) = 0$ för alla $t$, och det följer om vi kan visa att $\overline{\mathrm{Re}(A(\mathbb{D}))} = C_R(\mathbb{T})$ $(\mathrm{Re}A(\mathbb{D}) = \{g \mid g = \mathrm{Re}f,\ f \in A(\mathbb{D})\})$. Vi inför nu först det linjära rummet

$$P_R(T) = \{f \mid f(t) = a_o + \sum_{k=1}^{N} a_k\cos kt + b_k\sin kt,\ N \text{ naturligt tal},\ a_k, b_k \in \mathbb{R}\},$$

d.v.s. rummet av alla reella trigonometriska polynom, och visar sedan påstående (i) i följande

Lemma (9.7.4): Med ovan angivna beteckningar gäller

(i) $P_R(\mathbb{T}) \subset \mathrm{Re}A(\mathbb{D})$, och

(ii) $\overline{P_R(\mathbb{T})} = C_R(\mathbb{T})$, och följaktligen också $\overline{\mathrm{Re}A(\mathbb{D})} = C_R(\mathbb{T})$.

Bevis: Antag att $g(t) = a_o + \sum_{k=1}^{N} (a_k\cos kt + b_k\sin kt)$. Då är $g = \mathrm{Re}Q$, där $Q(z) = a_o + \sum_{k=1}^{N} (a_k - ib_k)z^k$, vilket visar (i). Beviset av (ii) är mer komplicerat och uppskjuts därför till avsnittet om Fourieranalys i nästa kapitel. Q.

Vi har därmed (givet lemma (9.7.4) ) visat

Sats (9.7.5): Den av sats (9.7.3) givna funktionen $F_z$ är entydigt bestämd.

Vi ska i nästa kapitel visa att funktionen $F_z$ är deriverbar och att för $z = re^{i\theta}$ är

$$F_z'(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \quad \left(= \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)\right).$$

Funktionen $P_r(t)$ brukar kallas Poissonkärnan. En viktig konsekvens av att denna är entydig är att för en given funktion $f \in C(\mathbb{T})$ är

$$Pf(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, f(t)dt$$

en funktion av $re^{i\theta}$. Man kan visa att denna funktion är harmonisk.

## Kap. 10. Integralekvationer

1. Ett utmärkande drag hos funktionalanalysen, som gör denna till en idealisk inkörsport till den moderna matematiken är blandningen av abstrakt och konkret. Vanligen består denna blandning i att konkreta problem behandlas med abstrakta metoder. Vi skall i detta kapitel studera integralekvationer, som förutom att de är intressanta i sig själva också är viktiga genom sitt nära samband med differentialekvationer.

Huvudbeståndsdelen i en integralekvation är en integralkärna, och för att beskriva en sådan kan vi låta $X$ och $Y$ vara lämpliga delmängder av $\mathbb{R}^m$ och $\mathbb{R}^n$ - vanligen samma intervall $[a,b]$ i $\mathbb{R}$ - och antar sedan att $K(x,y) \in L^1(X \times Y)$. Vi skriver sedan

$$(10.1.1) \qquad Kf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)dy,$$

och vi ser att om $f \in C(Y)$ eller allmännare om $f \in L^\infty(Y)$, så är på grund av Fubinis sats

$$(10.1.2) \qquad \int_X |Kf(x)|dx = \int_X dx \left| \int_Y K(x,y)f(y)dy \right|$$

$$\leq \int_X dx \int_Y |K(x,y)f(y)|dy \leq ||f||_\infty \iint_{X\times Y} |K(x,y)|dx\,dy = ||f||_\infty ||K||_1 .$$

Olikheten (10.1.2) visar att $Kf \in L^1(X)$, vilket innebär att integralkärnan $K(x,y)$ ger en (uppenbarligen linjär) begränsad avbildning från $L^\infty(Y)$ till $L^1(X)$. Givet en integralkärna $K$, skall vi i fortsättningen skriva $\mathbb{K}$ för att beteckna den av kärnan $K$ genom ekvationen (10.1.1) givna linjära avbildningen. Vid studiet av integraloperatorer intresserar man sig vanligen för sådana kärnor $K$ som avbildar $L^2(Y)$ till $L^2(X)$. Observera dock att Poissonkärnan som definierades i föregående kapitel ger en avbildning av $C(\mathbb{T})$ till $C(\mathbb{D})$. Ett villkor som garanterar att kärnan $K$ avbildar $L^2(Y)$ till $L^2(X)$ ges av följande definition med vidhängande sats.

Definition (10.1.3): Låt $L^2(X)$ och $L^2(Y)$ vara Hilbertrum av komplexvärda funktioner. En integralkärna $K(x,y)$ på $X\times Y$ sägs vara en Hilbert-Schmidt-kärna och den tillhörande integraloperatorn sägs vara en Hilbert-Schmidt-operator om $K$ tillhör $L^2(X\times Y)$.

Sats (10.1.4): En Hilbert-Schmidt-operator avbildar $L^2(Y)$ till $L^2(X)$ och vidare är $||\mathbb{K}|| \leq ||K||_{L^2}$ .

Bevis:

(10.1.5) $$||\mathbb{K} f||_{L^2(X)} =$$

$$(\int_X |Kf(x)|^2 dx)^{1/2} = (\int_X dx | \int_Y K(x,y)\, f(y) dy|^2)^{1/2} \leq$$

(enligt Minkowskis olikhet)

$$\leq \int_Y dy (\int_X |K(x,y)\, f(y)|^2 dx)^{1/2} = \int_Y |f(y)| (\int_X |K(x,y)|^2 dx)^{1/2} dy$$

$$\leq \text{(enligt Schwarz' olikhet)} \leq (\int_Y |f(y)|^2 dy)^{1/2} \cdot (\iint_{YX} |K(x,y)|^2 dx\, dy)^{1/2}$$

$$= ||f||_{L^2(Y)} \cdot ||K||_{L^2(XxY)} \cdot Q.$$

Givet en integralkärna K brukar följande integralekvationer studeras:

(F1) $g(x) = \int_Y K(x,y)\, f(y) dy$, g en given funktion, f sökt, samt

(F2) $g(x) = f(x) - \int_X K(x,y) f(y) dy$, g given, f sökt.

(F1) och (F2) står för Fredholms ekvation av första eller andra slaget. Observera att (F2) förutsätter X = Y. En allmännare ekvation som innehåller både (F1) och (F2) är

(F3) $g(x) = \lambda f(x) - \int_X K(x,y) f(y) dy$

och det är värt att notera att om g = 0, så är detta ett s.k. egenvärdesproblem. I fortsättningen kommer vi huvudsakligen att studera ekvationen (F3), under den extra förutsättningen att $X = \mathbb{I} = [0,1]$

2. Vi skall börja med att studera integralekvationen

(F2) $g(x) = f(x) - \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$ ,

där g och K är givna funktioner, $g \in L^2(\mathbb{I})$, $K \in L^2(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$ och f är en sökt funktion i $L^2(\mathbb{I})$ . Ett intressant specialfall av (F2) är

(V2) $$g(x) = f(x) - \int_0^x K(x,y) f(y) dy ,$$

som erhålls då $K(x,y) = 0$ om $x < y$. Ekvationen (V2) kallas Volterras ekvation och då vi studerar denna kommer vi som regel att förutsätta att kärnan $K \in L^{\infty}(\Pi)$. Vi har nu fått fram vårt konkreta problem och därmed är det - som vi antydde i inledningen till detta kapitel - dags att börja använda abstrakta metoder. Vi börjar med att helt enkelt bortse ifrån att (F2) är en integralekvation och skriver kort och gott

(AF2) $$g = f - \mathbb{K}f = (I-\mathbb{K})f \ ,$$

där $g$ är ett givet element i Hilbertrummet $L^2(\Pi)$, $\mathbb{K}$ är en linjär operator i $L^2(\Pi)$ (dvs. från $L^2(\Pi)$ till sig självt). $I$ är identitetsoperatorn i $L^2(\Pi)$ och $f$ är ett sökt element i $L^2(\Pi)$.
Vi skall börja med att visa att om $||\mathbb{K}|| < 1$, så har ekvationen (AF2) ("abstrakt Fredholm") oberoende av hur $g$ valts alltid en entydig lösning. Vi börjar därför med att konstatera att om (AF2) alltid har en entydig lösning, så beror denna linjärt på $g$, och vi kan skriva $f = Sg$. Men då är tydligen $So(I-\mathbb{K})f = f$ och $(I-\mathbb{K})oSg = g$. Om dessutom $S$ är begränsad är då enligt definition (1.1.3) avbildningen $(I-\mathbb{K})$ <u>invertibel</u>, med inversen $(I-\mathbb{K})^{-1} = S$.

Vi skall nu göra problemet ännu allmännare genom att bortse ifrån att $f$ och $g$ antas ligga i det konkreta Hilbertrummet $L^2(\Pi)$ och att $\mathbb{K}$ antas vara en operator i $L^2(\Pi)$ och vi skall studera ekvationen (AF2) i det fall då $g$ är ett givet element i ett Banachrum $B$, $\mathbb{K}$ är en linjär operator av norm $< 1$ i $B$ och $f$ är ett sökt element i $B$. Vi skall alltså visa följande

<u>Sats</u> (10.2.1): Låt $B$ vara ett Banachrum och låt $\mathbb{K} \in L(B)$, $||\mathbb{K}|| < 1$, där $L(B)$ är Banachrummet av alla linjära operatorer från $B$ till $B$. Då har den linjära operatorn $(I-\mathbb{K})$ en invers $(I-\mathbb{K})^{-1}$, sådan att $||(I-\mathbb{K})^{-1}|| \leq (1 - ||\mathbb{K}||)^{-1}$ .

<u>Bevis:</u> Vi definierar först

$$\mathbb{K}^0 = I, \quad \mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{K} \circ \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^n \circ \mathbb{K} \ .$$

Vi sätter sedan

$$S = I + \mathbb{K} + \mathbb{K}^2 + \mathbb{K}^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{K}^k \ ,$$

och konstaterar att eftersom $||\mathbb{K}^k|| \leq ||\mathbb{K}||^k$, så är serien absolutkonvergent och

$$||S|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||\mathbb{K}||^k = \frac{1}{1-||\mathbb{K}||} \ .$$

Vidare är uppenbarligen

$$S = I + \mathbb{K}\cdot S = I + S\cdot\mathbb{K}$$

dvs. $I = (I-\mathbb{K})S = S(I-\mathbb{K})$, vilket visar att $S = (I-\mathbb{K})^{-1}$. Q.

Anm. 1. Serien $S = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{K}^k$ kallas Neumann-serien (till $\mathbb{K}$).

Anm. 2. I definitionen av att en operator $S$ är <u>invers</u> till en given operator $T$ kräver vi att $I = SoT = ToS$. Nu är det lätt att bevisa att om $T$ är en linjär operator på ett ändligt-dimensionellt linjärt rum och om det finns en linjär operator $S$ sådan att antingen $SoT = I$, eller $ToS = I$, så är $T$ invertibel och $S = T^{-1}$. Detta följer enklast om vi väljer en bas i rummet, skriver upp en matris för $T$ och konstaterar att $\det(T) \neq 0$. I ett oändligt-dimensionellt linjärt rum kan man emellertid ange exempel på operatorer $S$ och $T$ sådana att $SoT = I$, medan $ToS \neq I$.

<u>Exempel:</u> Låt $T$ vara "shiftoperatorn" i $\ell^2$, definierad på följande sätt: Om $\underline{x} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definieras $T(\underline{x}) = \{y_k\}$, där $y_0 = 0$, $y_k = x_{k-1}$ om $k \geq 1$. Vidare definieras $S(\underline{x})$ genom $S(\underline{x}) = \{z_k\}$, där $z_k = x_{k+1}$.

Då är $SoT = I$, medan $ToS = P$, där $P(\underline{x}) = \{w_k\}$, $w_0 = 0$, $w_k = x_k$ och $k \geq 1$.

Anm. 3. Låt $T$ vara en begränsad operator i Banachrummet $B$ och antag att för varje $y \in B$, så har ekvationen $y = Tx$ en entydig lösning i $B$. Vi observerade ovan att denna lösning i så fall beror linjärt av $y$, dvs. att det finns en linjär operator (a priori ej nödvändigtvis begränsad) $S$, sådan att $y = Tx$ omm $x = Sy$. "Satsen om den öppna avbildningen", som följer av Baires kategorisats (se kap. 12) innebär att under dessa omständigheter är $S$ faktiskt begränsad, så att $T$ är invertibel med inversen $T^{-1} = S$. (Observera att " $y = Tx$ omm $x = Sy$ " $\Longrightarrow$ $x = Sy = STx$ och $y = Tx = TSy$ dvs. $ST = TS = I$).

En enkel generealisering av sats (10.2.1) ges av följande

<u>Korollarium</u> (10.2.2): Låt $\mathbb{K} \in L(B)$ och antag att för något $n$, $\|\mathbb{K}^n\| < 1$. Då existerar $(I - \mathbb{K})^{-1}$ och

$$\|(I - \mathbb{K})^{-1}\| \leq \frac{1 - \|\mathbb{K}\|^n}{(1-\|\mathbb{K}\|)(1-\|\mathbb{K}^n\|)} .$$

Bevis: Vi vill visa att Neumann-serien $S = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{K}^k$ är konvergent och skriver därför

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{K}^{in+k} \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{K}^{in} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{K}^{k} \right) = T \cdot U.$$

Enligt Sats (10.2.1) är $||T|| \leq (1-|||\mathbb{K}^n|||)^{-1}$ medan

$$||U|| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |||\mathbb{K}|||^k = \frac{1 - |||\mathbb{K}|||^n}{1 - |||\mathbb{K}|||}$$

vilket visar att $||S|| \leq \dfrac{1 - |||\mathbb{K}|||^n}{(1-|||\mathbb{K}^n|||)(1-|||\mathbb{K}|||)}$ . Q.

Beväpnade med sats (10.2.1) skall vi återvända till ekvationen (F2) under den extra förutsättningen att

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx\, dy < 1.$$

Vi vet nu att en lösning existerar och att den är av formen $g + \mathbb{K}'g$, där $\mathbb{K}' = \mathbb{K} + \mathbb{K}^2 + \ldots$ , och $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \circ \mathbb{K}$, etc; men vad är egentligen $\mathbb{K} \circ \mathbb{K}$ ? Svaret ges i följande

Sats (10.2.3): Låt $K \in L^2(\Pi^2)$, $L \in L^2(\Pi^2)$ och låt $\mathbb{K}$ och $\mathbb{L}$ vara motsvarande integraloperatorer på $L^2(\Pi)$. Då ges $\mathbb{K} \circ \mathbb{L}$ av integralkärnan

$$KoL(x,y) = \int_0^1 K(x,t)\, L(t,y) dt, \qquad \text{(jfr. matrismultiplikation.)}$$

och

$$||KoL|| \leq ||K|| \cdot ||L|| .$$

Bevis: Om $g \in L^2(\Pi)$ är

$$\mathbb{K} \circ \mathbb{L}\, g(x) = \int_0^1 K(x,t) \left( \int_0^1 \mathbb{L}(t,y)\, g(y) dy \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x,t)\, L(t,y) dt \right) g(y) dy \quad ,$$

under förutsättning att omkastningen av integrationsordningen är tillåten. Detta följer nu av Fubini's sats, ty för nästan alla $x$ gäller att $K(x,t)$ som funktion av $t$ ligger i $L^2(\Pi)$, så för nästan alla $x$ är $K(x,t)\, g(y)$ ett element i $L^2(\Pi^2)$ som funktion av $(t,y)$ och därmed är $K(x,t)\, L(t,y)\, g(y)$ för nästan alla $x$, som funktion av $(t,y)$ en funktion i $L^1(\Pi^2)$ vilket innebär att omkastningen är tillåten. Att $||K \circ L|| \leq ||K|| \cdot ||L||$ följer direkt av Schwarz' olikhet. Q.

Sats (10.2.3) innebär alltså att $\mathbb{K}'$ är den integraloperator som ges av funktionen $K'(x,y) = K(x,y) + KoK(x,y) + KoKoK(x,y) + \ldots$ .
Integralkärnan $K'$ är naturligtvis i praktiken som regel omöjlig att beräkna, men med numeriska metoder och datorer kan man ofta erhålla goda approximationer.
Med hjälp av korollarium (10.2.2) kan man visa att om kärnan $K$ är begränsad, så har ekvationen (V2) alltid en lösning. Detta följer av följande

Sats (10.2.4): Låt $K \in L^{\infty}(\mathbb{I}^2)$, $||K||_{\infty} \leq M$ och antag vidare att $K(x,y) = 0$ om $x < y$. Då är

$$||\mathbb{K}^n|| \leq \frac{M^n}{(n-1)!} < 1 \quad \text{om} \quad n \quad \text{tillräckligt stort.}$$

Beviset lämnas som övning.

3. Vår målsättning är fortfarande att studera ekvationen (F2) och dess generalisering

$$(F3) \qquad g(x) = \lambda f(x) - \int_0^1 K(x,y)\, f(y)dy \ .$$

Vi har med abstrakta metoder visat att ekvationen (F2) alltid har en entydig lösning om t.ex. $||K||_{L^2(\mathbb{I}^2)} < 1$ och samma argument visar att (F3) har entydig lösning om $|\lambda| > ||K||$. Detta uttrycker vi bäst genom att säga att operatorn $(\lambda I - \mathbb{K})$ har en invers $R_\lambda$, om $|\lambda| > ||\mathbb{K}||$. Operatorn $R_\lambda$ kallas resolventoperatorn och dess "definitionsområde".

$$\rho(\mathbb{K}) = \{\lambda \ | (\lambda I - \mathbb{K})^{-1} \ \text{existerar och är begränsad}\},$$

kallas resolventmängden. Följande sats visar att resolventmängden är öppen.

Sats (10.3.1): Låt $B$ vara ett Banachrum och låt $\mathbb{K} \in L(B)$. Antag vidare att $\lambda \in \rho(\mathbb{K})$ och att $|\mu-\lambda| < ||R_\lambda||^{-1}$. Då gäller att även

$$\mu \in \rho(\mathbb{K}) \quad \text{och} \quad ||R_\mu|| < \frac{||R_\lambda||}{1 - |\lambda-\mu| \cdot ||R_\lambda||} \ .$$

Bevis: Vi skriver först

$$(\mu I - \mathbb{K}) = ((\lambda I - \mathbb{K}) + (\mu-\lambda)I) = (\lambda I - \mathbb{K})(I+(\mu-\lambda)R_\lambda)$$
$$= (\lambda I - \mathbb{K})(I-(\lambda-\mu)R_\lambda).$$

Härav följer enligt sats (10.2.1),

$$R_\mu = R_\lambda(I - (\lambda-\mu)R_\lambda)^{-1} \quad ,$$

och detta bevisar satsen. Q.

Komplementmängden till $\rho(\mathbb{K})$ brukar betecknas $\sigma(\mathbb{K})$ och kallas spektrum för operatorn $\mathbb{K}$. Det följer av ovanstående att spektrum är en sluten och begränsad, dvs. kompakt delmängd av $\mathbb{C}$. Det är av fundamental betydelse inom funktionalanalysen att spektrum också är icketomt. Beviset bygger på att den linjära operatorn $R_\lambda$ uppfattas som en funktion av parametern $\lambda$ och att denna funktion visas vara analytisk.

Exempel:

I. Ett komplext tal $\lambda$ sägs vara ett egenvärde till operatorn $\mathbb{K}$ om det finns $x \in B$, så att $\mathbb{K}x = \lambda x$. Elementet $x$ sägs då vara en till egenvärdet $\lambda$ hörande egenvektor. Om $\lambda$ är ett egenvärde till operatorn $\mathbb{K}$ så har ekvationen

$$0 = (\lambda I - \mathbb{K})x$$

tydligen inte den enda lösningen $x = 0$, så operatorn $(\lambda I - \mathbb{K})$ är inte invertibel, utan $\lambda \in \sigma(\mathbb{K})$. Ibland sägs mängden av egenvärden utgöra operatorn $\mathbb{K}$:s punktspektrum.

II. En operator $P$ i $L(B)$ sägs vara en projektion om

$$P^2 = P.$$

Om $P$ är en projektion, så är $(\lambda I-P)(1-\lambda)I-P) = (\lambda-\lambda^2)I$, vilket visar att $(\lambda I-P)^{-1} = (\lambda-\lambda^2)^{-1}((1-\lambda)I-P)$ om $\lambda \neq 0,1$. Detta visar att spektrum för en projektion är en delmängd av $\{0,1\}$. Om vi observerar att även $I-P$ är en projektion, som vi kan benämna $Q$, erhåller vi följande formel

$$(aP + bQ)(cP + dQ) = acP + bdQ,$$

och eftersom $I = P + Q$ ser vi att $(aP + bQ)^{-1}$ existerar om $a \cdot b \neq 0$.

I termer av spektrumbegreppet vet vi alltså att ekvationen (F3) är entydigt lösbar för alla $g$, om $\lambda \in \rho(\mathbb{K})$ och vår nästa uppgift blir därför att dels studiera undantagsmängden $\sigma(\mathbb{K})$, dels undersöka vad som händer om $\lambda \in \sigma(\mathbb{K})$. Vi skall fortsätta med att använda abstrakta metoder, men vi skall börja utnyttja några av de speciella egenskaperna hos våra integraloperatorer. Vi skall därför införa en viktig klass av linjära operatorer, som bl.a. innehåller Hilbert-Schmidt-operatorerna i $L^2(\Pi)$.

Definition (10.3.2): Låt $N_1$ och $N_2$ vara normerade rum och låt $\mathbb{K} \in L(N_1, N_2)$. $\mathbb{K}$ sägs vara kompakt om för varje begränsad följd $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $N_1$ följden $\mathbb{K}(X) = \{\mathbb{K}x_k\}_{k=1}^{\infty}$ innehåller en konvergent delföljd.

Vi kommer i det följande alltid att förutsätta att $N_1$ och $N_2$ är Banachrum och vanligen att $N_1 = N_2$. Först visar vi dock följande sats, med vars hjälp vi så småningom skall bevisa att en Hilbert-Schmidt-operator är kompakt.

Sats (10.3.3): Låt $B_1$ och $B_2$ vara Banachrum och låt $\mathcal{K} = \mathcal{K}(B_1, B_2)$ vara mängden av kompakta operatorer i Banachrummet $L(B_1, B_2)$. Då är $\mathcal{K}$ ett slutet delrum av $L(B_1, B_2)$.

Bevis: (i) Att K kompakt ==> a. $\mathbb{K}$ kompakt är uppenbart, eftersom "samma delföljd" fortfarande är konvergent.

(ii) Om $\mathbb{K}_1$ och $\mathbb{K}_2$ är kompakta och X är en begränsad följd i $B_1$, så kan vi först hitta en delföljd $X_1$ sådan att $\mathbb{K}_1 X_1$ är konvergent och sedan ur följden $X_1$ en delföljd $X_2$ sådan att $\mathbb{K}_2 X_2$ är konvergent.

(iii) Om $\mathbb{K}_i \in \mathcal{K}$, om $||\mathbb{K}_i - \mathbb{K}|| \to 0$ och om X är en begränsad följd i $B_1$, så utväljer vi för varje i en delföljd $X_i$ ur $X_{i-1}$ ($X_o = X$) sådan att följden $\mathbb{K}_i X_i$ är en konvergent följd i $B_2$. Låter vi sedan X' vara "diagonalföljden" (se beviset av sats (5.5.3) på sid. 40), är det lätt att se att $\mathbb{K}X'$ är konvergent. Q.

En annan egenskap av liknande slag hos Banachrummet $\mathcal{K}(B_1, B_2)$ ges av följande

Sats (10.3.4): Låt $B_i$, i=0,1,2,3, vara Banachrum och låt $T_i : B_i \to B_{i+1}$, i = 0,1,2, vara begränsade linjära avbildningar. Antag vidare att $T_1$ är kompakt. Då är även $T_1 \circ T_0$ och $T_2 \circ T_1$ kompakta.

Bevis: Om X är en begränsad följd i $B_0$, så är även $Y = T_0 X$ en begränsad följd, varför $T_1 Y = T_1 \circ T_0 X$ innehåller en konvergent delföljd.

Om X' är en begränsad följd i $B_1$ så innehåller $T_1 X'$ en konvergent delföljd Y' och då är $T_2 Y'$ en konvergent delföljd ur $T_2 \circ T_1 X'$. Q.

En speciellt enkel typ av operatorer ge i följande

Definition (10.3.4): En linjär operator $\mathbb{F}$ från $B_1$ till $B_2$ sägs vara av ändlig rang om det finns en ändlig familj av par

$\{(f_i,b_i)\}_{i=1}^N$ , $f_i \in B_1$, $b_i \in B_2$, sådan att för alla $x$ i $B_1$ ,

$$\mathbb{F}(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle f_i,x \rangle \cdot b_i \ .$$

Speciellt i kombination med sats (10.3.3) är nedanstående sats ytterst användbar.

Sats (10.3.5): En operator av ändlig rang är begränsad och kompakt.

Bevis: Om $\mathbb{F}(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle f_i,x \rangle \cdot b_i$ och $||x|| \leq 1$, så är $||\mathbb{F}(x)|| \leq \sum_{k=1}^{N} ||f_i|| \cdot ||b_i||$, vilket visar att $\mathbb{F}$ är begränsad.

Om nu $X$ är en begränsad följd i $B_1$ så är $\mathbb{F}X$ en begränsad följd i det (högst) N-dimensionella rum som uppspänns av $\{b_i\}_{i=1}^N$ . Enligt Bolzano-Weierstrass sats innehåller $\mathbb{F}X$ då en konvergent delföljd. Q.

Korrollarium (10.3.6): Varje operator som kan approximeras godtyckligt nära med operatorer av ändlig rang är kompakt.

Bevis: Sats (10.3.3) och sats (10.3.5). Q.

Vi skall avsluta detta avsnitt med att bevisa två satser om kompakta operatorer i Hilbertrum och börjar med

Sats (10.3.7): Låt $K$ vara en Hilbert-Schmidt kärna på $X \times Y$. Då är den tillhörande integraloperatorn $\mathbb{K}: L^2(Y) \to L^2(X)$ kompakt.

Bevis: Vi observerar först att en integraloperator $\mathbb{F}$ är av ändlig rang, om dess kärna $F$ kan skrivas som en ändlig summa

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, g_i(y) \quad \text{(eller om man så vill } \sum f_i(x)\, \overline{g_i(y)}. \text{ ).}$$

För att bevisa satsen räcker det därför att visa att varje Hilbert-Schmidt-kärna kan approximeras i $L^2$-norm (och därmed även operatornorm) godtyckligt nära med kärnor av ändlig rang. Detta följer i sin tur av följande lemma, som också är av intresse i sig självt.

Lemma (10.3.8): Låt $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ och $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara ON-system i resp. $L^2(X)$ och $L^2(Y)$. Då är $\Phi \otimes \Psi = \{\varphi_j \psi_k\}$ ett ON-system i $L^2(X \times Y)$. Vidare är $\Phi \otimes \Psi$ fullständigt $\Leftrightarrow$ $\Phi$ och $\Psi$ båda är fullständiga.

Bevis: Vi observerar först att

$$(\varphi_j\psi_k|\varphi_m\psi_n)_{L^2(XxY)} = \int_X \int_Y \varphi_j(x)\psi_k(y)\overline{\varphi_m(x)\psi_n(y)}dx\,dy = \delta_{jm}\cdot\delta_{kn}$$

vilket visar att $\Phi \boxtimes \Psi$ är ett ON-system.

Antag nu att t.ex. $\Phi$ ej är fullständigt. Då finns $\varphi_o \in L^2(X)$, sådan att $(\varphi_o|\varphi_j) = 0$, $j = 1,2,\ldots$, medan $||\varphi_o|| = 1$. Det är nu lätt att se att t.ex. $\varphi_o(x)\psi_1(y)$ är ortogonal mot alla $\varphi_j\psi_k$ i $\Phi \circledcirc \Psi$.

Om å andra sidan både $\Phi$ och $\Psi$ är fullständiga skall vi visa att även $\Phi \circledcirc \Psi$ är fullständigt. Låt därför $F(x,y) \in L^2(XxY)$.
Vi skall visa att $F = 0$ i $L^2(xxY)$ (dvs. att funktionen $F = 0$ n.ö.) om alla

$$a_{jk}(F) = (F|\varphi_j\psi_k) = \int_X \int_Y F(x,y)\overline{\varphi_j(x)\psi_k(y)}\,dx\,dy = 0\ .$$

Om nu $\mathbb{F}$ är den till kärnan $F$ hörande H-S-operatorn från $L^2(Y)$ till $L^2(X)$, kan vi skriva

$$a_{jk}(F) = (\mathbb{F}\overline{\psi_k}|\varphi_j)\ ,$$

och eftersom $\Phi$ är fullständigt är då

$$\mathbb{F}\,\overline{\psi_k} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbb{F}\,\overline{\psi_k}|\varphi_j)\varphi_j = 0.$$

Låt nu $L(\overline{\Psi})$ vara delrummet av alla ändliga linjärkombinationer av funktionerna $\overline{\psi_k}$, där $\psi_i \in \Psi$. Vi konstaterar att operatorn $\mathbb{F}$ är 0 på detta delrum av $L^2(Y)$. Vi observerar sedan att eftersom ON-systemet $\Psi$ är fullständigt, så är rummet $L(\Psi)$ av linjärkombinationer ur $\Psi$ ett tätt delrum i $L^2(Y)$, men då är naturligtvis också $L(\overline{\Psi})$ tätt i $L^2(Y)$ vilket betyder att operatorn $\mathbb{F} = 0$. Men då är för nästan alla $x$,

$$\int_Y F(x,y)g(y)dy = 0$$

för alla $g$ i $L^2$, och detta innebär att för nästan alla $x$ är funktionen $f_x(y) = F(x,y) = 0$ för nästan alla $y$. Enligt Fubini's sats är då $F = 0$ n.ö. i $XxY$. Q.

Vi kan nu avsluta beviset av sats (10.3.7) på följande sätt.
Låt $\Phi$ och $\Psi$ vara fullständiga ON-system i $L^2(X)$ resp. $L^2(Y)$ och låt $\Phi \boxtimes \Psi$ vara som i föregående lemma. Låt vidare $\{a_{jk}\}_{j=1,k=1}^{\infty,\infty}$

vara Fourierkoefficienterna till kärnan $K$ med avseende på ON-systemet $\Phi \otimes \Psi$. Då är $\Sigma|a_{jk}|^2 = S < \infty$, vi kan välja $M,N$ så att

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}|a_{jk}|^2 > S - \epsilon \quad (\text{där } \epsilon > 0 \text{ är givet}),$$

och det följer av korollarium (6.2.3) att

$$\left|\left|K - \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\varphi_j\psi_k\right|\right|_{L^2(X\times Y)} < \epsilon .$$

Eftersom $K_{M,N}(x,y) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\varphi_j(x)\psi_k(y)$ är av ändlig rang så följer satsen. Q.

För att formulera vår andra sats om kompakta operatorer i Hilbertrum skall vi införa en benämning, nämligen den som ges i

Definition (10.3.9): Låt $B_1$ och $B_2$ vara Banachrum och låt $T \in L(B_1,B_2)$. Ett element $x$ i $B_1$ sägs vara maximalt med avseende på operatorn $T$ om $||x||_{B_1} = 1$ och $||Tx||_{B_2} = ||T||$.

Vi skall visa följande

Sats (10.3.9): Varje kompakt operator i ett separabelt Hilbertrum har ett maximalt element.

Bevis: Låt $T$ vara en kompakt operator i Hilbertrummet $H$, och låt $X = \{x_k\}$ vara en följd i $H$, sådan att $||x_k|| \leq 1$, medan $||Tx_k|| \geq ||T|| - k^{-1}$. Eftersom $T$ är kompakt finns det då en delföljd $X' = \{x'_k\} = \{x_{j_k}\}$, sådan att följden $\{Tx'_k\}$ är konvergent med gränspunkten $y$ och uppenbarligen är då $||y|| = ||T||$.

Vi kan nu definiera en linjär funktional $f$ på $H$ genom

$$f(x) = (Tx|y),$$

och enligt sats (6.4.1) finns det då $w$ i $H$, så att $(Tx|y) = (x|w)$. Vi skall nu utnyttja att $H$ också är ett dualt rum så att vi kan använda sats (5.5.3) på följden $X'$ ovan. Detta betyder att följden $X'$ innehåller en delföljd $X'' = \{x''_k\}$ sådan att för alla $h$ i $H$,

$$\lim_{k\to\infty}(x''_k|h) = (z|h)$$

för något $z$ i $H$. Enligt sats (5.5.1) är dessutom $||z|| \leq 1$. Speciellt är då

$(z|w) = \lim(x''_k|w) = \lim(Tx''_k|y) = (y|y) = ||y||^2$ (ty $X''$ är ju en delföljd ur $X'$). Å andra sidan är

$(z|w) = (Tz|y) \leq ||Tz||\cdot||y||$, vilket visar att $||Tz|| \geq ||y|| = ||T||$, vilket visar att $z$ är ett maximalt element. Q.

4. Vi påminner oss än en gång att vi studerar ekvationen

(F3) $\qquad g = (\lambda I - \mathbb{K})f,$

där $g \in L^2(\Pi)$, $\mathbb{K}$ ges av en kärna $K \in L^2(\Pi^2)$ och $f$ är sökt i $L^2(\Pi)$.

Hittills har vi undersökt ekvationen med utgångspunkt från olika egenskaper som kärnan $K$ må ha eller icke ha, varvid dessa egenskaper låter sig formuleras för operatorer i godtyckliga Banachrum. Vi skall nu på allvar börja utnyttja att rummet $L^2(\Pi)$ inte är vilket Banachrum som helst, utan snarare tvärtom - det bästa möjliga - dvs. ett Hilbertrum. Vi skall också få se, att inte bara Hilbertrummet självt är speciellt bland Banachrummen, utan även rummet $L(H)$ av begränsade linjära operatorer på $H$ har egenskaper som skiljer det från andra rum $L(B)$. En första anledning till detta är att "adjungeringen av operatorer" är en operation som avbildar $L(H)$ till $L(H)$. Vi påminner oss nämligen att om $T:B_1 \to B_2$ är en given begränsad operator från Banachrummet $B_1$ till Banachrummet $B_2$, så ger identiteten

$$\langle y^*, Tx\rangle_{B_2} = \langle T^*y^*, x\rangle_{B_1}$$

en begränsad linjär operator från $B^*_2$ till $B^*_1$, dvs. "adjungeringen" avbildar $L(B_1,B_2)$ till $L(B^*_2,B^*_1)$. Om nu $B_1 = B_2 = H$ är ju även $B^*_2 = B^*_1 = H$, vilket innebär att adjungeringen överför $L(H)$ till $L(H)$. De viktigaste egenskaperna hos denna operation sammanfattas i följande

Sats (10.4.1): "Adjungeringen" $T \rightsquigarrow T^*$ i $L(H)$ har följande egenskaper:

(i) $\qquad T^{**} = T$ (involution)

(ii) $\qquad (aS + bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$, $\quad S,T \in L(H)$, $a,b \in \mathbb{C}$ (antilinjär)

(iii) $\qquad (ST)^* = T^*S^*$

(iv) $\qquad ||T^*|| = ||T||$ (isometrisk).

Beviset lämnas som övning.

Anm. Av (iii) följer att om $T^{-1}$ existerar är $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$ vilket visar att även $T^*$ är invertibel med inversen $(T^{-1})^*$.
Flera viktiga typer av operatorer på Hilbertrum definieras genom samband mellan den givna operatorn och dess adjunkt, såsom i följande

Definition (10.4.2): Låt $H$ vara ett Hilbertrum, låt $T \in L(H)$ och låt $T^*$ vara den adjungerade operatorn till $T$. Operatorn $T$ sägs vara

(i) <u>symmetrisk</u> om $T^* = T$,

(ii) <u>unitär</u> om $T^*T = TT^* = I$,

(iii) <u>normal</u> om $T^*T = TT^*$ .

<u>Exempel:</u>

I. Om $K \in L^2(\mathbb{I}^2)$ och $\mathbb{K}$ är H-S-operatorn given av $K$, dvs.

$$\mathbb{K}f(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy , \qquad f \in L^2(\mathbb{I}),$$

så är $(\mathbb{K}f\,|\,g) = \int_0^1\int_0^1 K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dy\,dx =$

$$\int_0^1\int_0^1 f(y)\overline{[K(x,y)g(x)]}dx\,dy = (f\,|\,\mathbb{K}^*g),$$

där $\mathbb{K}^*$ är den H-S-operator som ges av integralkärnan

$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Speciellt är $\mathbb{K}$ symmetrisk omm $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

II. Låt $H$ vara $L^2(\mathbb{I})$ och låt $m \in C(\mathbb{I})$ (eller allmännare $L^\infty(\mathbb{I})$ ) och definiera $T_m \in L(H)$ genom

$$T_m f(x) = m(x)f(x), \qquad f \in L^2(\mathbb{I}) .$$

Då är

$$(T_m f\,|\,g) = \int_0^1 m(x)f(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{[m(x)g(x)]}dx = (f\,|\,T_m^*g),$$

vilket visar att $T_m^* = T_{\overline{m}}$ . Därav följer uppenbarligen dels att $T_m$ är normal, dels att $T_m$ är symmetrisk om $m$ är reell och unitär om $|m| = 1$. Slutligen $(\lambda I - T_m)^{-1} = T_g$ , där $g(x) = (\lambda - m(x))^{-1}$, som är kontinuerlig och därmed begränsad om $\lambda$ inte tillhör värdeförrådet $V(m)$ för funktionen $m$. Detta visar att $\sigma(T_m) \subset V(m)$. Det kan visas att $\sigma(T_m) = V(m)$.

III. Låt $M$ vara ett slutet delrum av $H$ och låt $P_M$ och $Q_M$ vara de i sats (6.3.7) definierade ortogonala projektionerna på $M$ resp. $M^\perp$. Då är

$(P_M f\,|\,g) = (P_M f\,|\,P_M g + Q_M g) = (P_M f\,|\,P_M g) + (P_M f\,|\,Q_M g) = (P_M f\,|\,P_M g)$

$(f\,|\,P_M g)$,

vilket visar att $P_M^* = P_M$, så att $P_M$ (och på samma sätt $Q_M$) är symmetrisk.

Vi observerar vidare att $P_M^2 = P_M$ så att $P_M$ är en projektion också enligt vårt exempel i föregående avsnitt, så att $\sigma(P_M) \subset \{0,1\}$ ( $= \{0,1\}$ om $M \neq \{0\}, H$). Omvänt kan man visa att om $P^2 = P = P^*$, så är $P$ en ortogonal projektion, ty då är

$$((I-P)x|Py) = (P^*(I-P)x|y) = (P(I-P)x|y) = ((P-P^2)x|y) = (0|y) = 0.$$

Detta visar att elementet $x-Px$ är ortogonalt mot alla $y \in M = \{z|z = Pz\}$, vilket visar att $Px$ är den ortogonala projektionen av $x$ på $M$.

IV. Låt $\{M_i\}_{i=1}^N$ vara slutna delrum av $H$, sådana att $M_i \perp M_j$ om $i \neq j$ och sådana att varje $f \in H$ kan skrivas

$$f = \sum_{i=1}^N f_i, \quad \text{där } f_i \in M_i .$$

Låt vidare, för varje $i$, $P_i = P_{M_i}$ vara den ortogonala projektionen på $M_i$, låt $\{a_i\}_{i=1}^N$ vara komplexa tal och sätt $T = \sum_{i=1}^N a_i P_i$.

Då är $(\lambda I - T) = \sum_{i=1}^N (\lambda - a_i)P_i$ och $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{i=1}^N (\lambda - a_i)^{-1} P_i$, (detta emedan $P_i P_j = 0$ om $i \neq j$) om alla $(\lambda - a_i) \neq 0$.

Detta visar att $\sigma(T) = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Vidare är

$$T^* = \sum_{i=1}^N \overline{a_i} P_i^* = \sum_{i=1}^N \overline{a_i} P_i,$$

vilket visar att $T$ är normal. Vidare är $T$ symmetrisk omm alla $a_i$ reella och unitär om $|a_i| = 1$ för alla $i$.

Till sist bör det påpekas att spektralsatsen för symmetriska operatorer innebär att varje symmetrisk operator kan approximeras med sådana ändliga reella linjärkombinationer av (ömsesidigt ortogonala) ortogonala projektioner.

Ett viktigt samband mellan en operator och dess adjunkt anges i följande

Sats (10.4.3): Låt $T \in L(H)$, låt $T^*$ vara dess adjunkt och låt $M$ och $N$ vara delrum av $H$, sådana att $T(M) \subset N$ (dvs. $f \in M \Rightarrow Tf \in N$). Då är $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$.

Bevis: För alla $f \in M$, $g \in N^\perp$ är $(Tf|g) = (f|T^*g) = 0$. Q.

Följande korollarier innehåller viktiga specialfall av sats (10.4.3).

Korollarium (10.4.4): Låt $T \in L(H)$ och låt $T^*$ vara dess adjunkt. Då är

(i) $\quad T(H)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)$ , $\quad T^*(H)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T)$ ,

och om

(ii) M är ett invariant delrum med avseende på T (dvs. om $T(M) \subset M$), så är $N^{\perp}$ invariant med avseende på $T^*$ .

Korollarium (10.4.5): Om T är symmetrisk och $T(M) \subset M$ så är även $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$.

I de exempel på symmetriska operatorer ovan där vi kunnat bestämma spektrum har vi kunnat observera att detta är reellt. Vi skall nu se att detta inte är någon tillfällighet, utan är något som gäller för varje symmetrisk operator. Vi skall alltså visa följande

Sats (10.4.6): Låt T vara en symmetrisk operator. Då är $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

Bevis: Sätt $\lambda = a + ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Vi skall visa att $(\lambda I - T)^{-1}$ existerar och är begränsad. Eftersom $(\lambda I - T)^* = (\bar{\lambda} I - T)$ räcker det att studera fallet då $b > 0$. Vi väljer nu först $c \geq b$ så att $|\mu| = |a + ic| > ||T||$. Då vet vi enligt sats (10.2.1) att $(\mu I - T)^{-1}$ existerar.

Vi sätter nu $S = T - aI$, så att $(\mu I - T) = (icI - S)$ där S symmetrisk.

Antag nu att

$$f = (icI - S)^{-1} g, \quad \text{dvs. att} \quad g = (icI - S)f.$$

Då är

$$||g||^2 = (icf - Sf | icf - Sf) = c^2(f|f) - ic[(f|Sf) - (Sf|f)] + (Sf|Sf)$$

$$= c^2(f|f) + (Sf|Sf) \geq c^2(f|f),$$

vilket visar att $||f|| \leq c^{-1}||g||$, dvs. $||(icI - S)^{-1}|| \leq c^{-1}$ .

Enligt sats (10.3.1) gäller då att även $ib \in \rho(S)$ och att

$$||(ibI - S)^{-1}|| \leq \frac{c^{-1}}{1-(c-b)c^{-1}} = b^{-1} \ . \quad Q.$$

Med nästan exakt samma bevis kan vi också bevisa följande

Sats (10.4.7): Om U är en unitär operator är $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$ .

Bevis: Om $g = Uf$ så är $||g||^2 = (g|g) = (Uf|Uf) = (U^*Uf|f) =$
$= (f|f) = ||f||^2$ och likaså är $||f||^2 = (U^*g|U^*g) = (UU^*g|g) = (g|g)$

och detta visar att

$$||U|| = ||U^*|| = 1.$$

Härav följer först att $\sigma(U) \subset \mathbb{W} = \{\lambda \,|\, |\lambda| \leq 1\}$, men eftersom $0 \in \rho(U)$ och $||R_0|| = ||U^*|| = 1$, så följer det av sats (10.3.1) att $\lambda \in \rho(U)$ om $|\lambda| = |\lambda - 0| < 1$, varav följer att $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. Q.

Nu får man inte förledas att tro att en operator i $H$ är symmetrisk bara för att dess spektrum är reellt. Exempelvis följer det av sats (10.2.4) att om $\mathbb{K}$ är en Volterraoperator så är $\sigma(\mathbb{K}) = \{0\}$, trots att $\mathbb{K}$ inte är symmetrisk utom om $\mathbb{K} = 0$.
En egenskap som verkligen karakteriserar symmetriska operatorer ges däremot i följande

Sats (10.4.8): Låt $T \in L(H)$ och låt $Q$ vara den kvadratiska form som definieras av

$$Q(f) = (Tf|f).$$

Då är $T$ symmetrisk omm $Q$ är reell (dvs. om $Q(f)$ är reell för alla $f$ i $H$).

Bevis: Om $T$ är symmetrisk så är

$$Q(f) = (Tf|f) = (f|T^*f) = (f|Tf) = \overline{(Tf|f)} = \overline{Q(f)}$$

vilket visar att $Q$ är reell.
För att visa omvändningen så observerar vi först att
$A(f,g) = Q(f+g) - iQ(f+ig) - Q(f-g) + iQ(f-ig) = 4(Tf|g)$ och att
$B(f,g) = Q(f+g) + iQ(f+ig) - Q(f-g) - iQ(f-ig) = 4(Tg|f)$.

Om nu $Q$ är reell så är $B(f,g) = \overline{A(f,g)}$, vilket innebär att $(Tg|f) = \overline{(Tf|g)} = (g|Tf)$, dvs. att $T = T^*$. Q.

En viktig delklass av de symmetriska operatorerna ges i följande

Definition (10.4.9): En operator $T \in L(H)$ sägs vara positiv om för alla $f$ i $H$,

$$Q(f) = (Tf|f) \geq 0.$$

Exempel:
I. För alla $T$ i $L(H)$ är $T^*T$ positiv ty $(T^*Tf|f) = ||Tf||^2 \geq 0$.
II. En ortogonal projektion är positiv, ty om $P = P^2 = P^*$, så är också $P = P^*P$.
III. Antag att operatorerna $\{P_i\}_{i=1}^N$ uppfyller följande identiteter: $P_i^* = P_i$, $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$, $\sum_{i=1}^N P_i = I$, dvs. att operatorerna $P_i$ är ömsesidigt ortogonala, ortogonala projektioner. Då är $T = \sum_{i=1}^N a_iP_i$ positiv omm alla $a_i > 0$.

5. I detta avsnitt skall vi studera symmetriska integraloperatorer, dvs. sådana som ges av symmetriska integralkärnor $K \in L^2(\mathbb{I}^2)$, där $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Vi skall bl.a. visa följande

Sats (10.5.1): Om $K$ är en symmetrisk integralkärna i $L^2(\mathbb{I}^2)$, så finns det ett ON-system $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{w}$, där $w$ är ett naturligt tal eller $\infty$, och reella tal $\{\lambda_k\}_{k=1}^{w}$, så att

(i) $K(x,y) = \sum_{k=1}^{w} \lambda_k \cdot \varphi_k(x)\, \overline{\varphi_k(y)}$ .

Anm. ON-systemet $\Phi$ kan vara ändligt eller oändligt, fullständigt eller ofullständigt. Om systemet $\Phi$ är ofullständigt, låter vi $L(\Phi)$ vara delrummet av alla ändliga linjärkombinationer av element ur $\Phi$, och sätter $M = \overline{L(\Phi)}$ (slutna höljet av $L(\Phi)$). Låt sedan $\Phi'$ vara ett fullständigt ON-system i $M^{\perp}$ och låt $\Psi$ vara det i $L^2(\mathbb{I})$ fullständiga systemet $\Phi \cup \Phi'$. Då kan vi skriva

(ii) $K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, \psi_k(x)\, \overline{\psi_k(y)}$ , $\psi_k \in \Psi$,

men där eventuellt $\lambda_k = 0$.

Eftersom sats (10.5.1) är en omedelbar konsekvens av de mer abstrakta satser som vi skall bevisa nedan uppmanar vi läsaren att efter genomläsningen av detta kapitel lösa följande

Övning: Bevisa sats (10.5.1).

En viktig konsekvens av sats (10.5.1) är att den, för symmetriska integralkärnor ger fullständig information om lösbarheten hos och lösningarna till, integralekvationen

(SF3) $g(x) = \lambda f(x) - \int_0^1 K(x,y)\, f(y)dy$, $g$ given, $f$ sökt, $K$ symmetrisk.

För att se detta så observerar vi först att alla funktionerna $\psi_k$ i $\Psi$ är egenvektorer till integraloperatorn $\mathbb{K}$ given av kärnan $K$, hörande till egenvärdena $\lambda_k$, och att vi kan skriva

(iii) $\mathbb{K}f = \sum \lambda_k (f|\psi_k)\psi_k$ , $\psi_k \in \Psi$ .

Av (iii) följer uppenbarligen att de i (ii) förekommande talen $\lambda_k$ också är de enda egenvärdena till operatorn $\mathbb{K}$. Vi skall beteckna mängden av alla från noll skilda egenvärden till operatorn $\mathbb{K}$ med

$\Lambda'$ och vi skriver $\Lambda = \{0\} \cup \Lambda'$ . Vi börjar nu med att studera ekvationen (SF3) i det fall då $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \Lambda'$ och vi skall visa följande

Sats (10.5.2): Låt $\Psi$ vara ett fullständigt ON-system i $L^2(\Pi)$ och låt $K(x,y) = \Sigma \lambda_k \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)}$ vara en symmetrisk H-S-kärna i $L^2(\Pi^2)$. Låt vidare $\lambda \neq 0$ vara ett komplext tal, sådant att $\lambda \neq \lambda_k$ för alla $k$. Då har ekvationen

$$g(x) = \lambda f(x) - \int_0^1 K(x,y) f(y)dy$$

en entydig lösning för varje $g$. Lösningen kan skrivas

$$f(x) = \mu g(x) - \int_0^1 K'(x,y) g(y)dy,$$

där $K'(x,y) = \Sigma \mu_k \psi_k(x) \overline{\psi_{k(y)}}$ varvid $\lambda\mu = 1$ och $\lambda_k\mu_k = \lambda\mu_k + \mu\lambda_k$ dvs. $\mu_k = \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda)}$ . Eftersom $\Sigma|\mu_k|^2 < \infty$ är även $K'$ en H-S-kärna och $K'$ är symmetrisk omm $\lambda$ reellt.

Bevis: Definierar vi först $\mu_k$ genom ekvationen

$$\mu_k\lambda_k = \lambda \mu_k + \mu \lambda_k, \quad \text{och } K' \text{ genom}$$

$$K'(x,y) = \Sigma \mu_k \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)} ,$$

så är det en direkt verifikation att

$$g = (\lambda I - \mathbb{K})f \quad \text{omm} \quad f = (\mu I - \mathbb{K}')g .$$

Att sedan $\Sigma|\mu_k|^2 < \infty$ följer av att för endast ändligt många $\lambda_k$ är $|\lambda - \lambda_k| < \frac{\lambda}{2}$ , och för övriga $\lambda_k$ är

$$|\mu_k| \leq \frac{2}{\lambda} \cdot \lambda_k \cdot Q.$$

Vår nästa uppgift blir nu att studera ekvationen (SF3) i det fall då $\lambda \in \Lambda'$ , dvs. då $\lambda \neq 0$ är ett egenvärde till $\mathbb{K}$. Vi konstaterar då först att egenvärden hörande till olika egenvektorer naturligtvis int inte behöver vara olika, däremot kan högst ändligt många av egenvektorerna $\psi_k$ höra till samma egenvärde. Om $\lambda \in \Lambda'$ skall vi därför definiera $E(\lambda) = \{f \mid \mathbb{K}f = \lambda f\}$. Det följer att $E(\lambda)$ är ett ändligtdimensionellt delrum av $L^2(\Pi)$. Vi skall nu bevisa följande

Sats (10.5.3): Låt $\Psi$ vara ett fullständigt ON-system i $L^2(\Pi)$, låt $K(x,y) = \Sigma \lambda_k \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)}$ vara en symmetrisk H-S-kärna i $L^2(\Pi^2)$ och låt $\Lambda'$ vara mängden av från 0 skilda egenvärden till integraloperatorn $\mathbb{K}$. Låt vidare $\lambda \in \Lambda'$ och låt $E(\lambda)$ vara det ändligtdimensionella delrummet av egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda$. Sätt slutligen $K''(x,y) = \Sigma \mu_k \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)}$ där $\mu\lambda = 1$, $\mu_k'' \lambda_k = \lambda \mu_k'' + \mu\lambda_k$ om $\lambda_k \neq \lambda$, $\mu_k'' = 0$ om $\lambda_k = \lambda$. Då har ekvationen

(SF3) $\quad g(x) = \lambda f(x) - \int_0^1 K(x,y) f(y)dy$ en lösning omm $g \in E(\lambda)^\perp$.

Lösningen är ej entydig, men en lösning av minimal norm kan skrivas

$$f(x) = \mu g(x) - \int_0^1 K''(x,y) f(y)dy \quad .$$

Bevis: Att villkoret $g \in E(\lambda)$ är nödvändigt följer av sats (10.4.3) eller mer direkt av korollarium (10.4.4). Att villkoret också är tillräckligt följer av att vi som synes explicit anger en lösning. Q.

För senare bruk observerar vi också följande korollarium till sats (10.5.3).

Korollarium (10.5.4): Med beteckningar som i sats (10.5.3) är $(\lambda I-\mathbb{K})(\mu I-\mathbb{K}'') = (\mu I-\mathbb{K}'')(\lambda I-\mathbb{K}) = Q_{E(\lambda)}$ (den ortogonala projektionen pa $E(\lambda)^\perp$).

Bevis: Vi beräknar $(\lambda I-\mathbb{K})(\mu I-\mathbb{K}'')f$ explicit. Eftersom

$(\mu I-\mathbb{K}'')f = \mu f - \Sigma \mu_k''(f|\psi_k)\psi_k = \Sigma(\mu-\mu_k'')(f|\psi_k)\psi_k$ och

$(\lambda I-\mathbb{K})g = \lambda g - \Sigma \lambda_k(g|\psi_k)\psi_k = \Sigma(\lambda-\lambda_k)(g|\psi_k)\psi_k$ så är

$(\lambda I-\mathbb{K})(\mu I-\mathbb{K}'')f = \Sigma(\lambda-\lambda_k)(\mu-\mu_k'')(f|\psi_k)\psi_k = Q_{E(\lambda)}f$ .

Detta eftersom $(\lambda-\lambda_k)(\mu-\mu_k'') = \begin{cases} 1 & \text{om } \lambda \neq \lambda_k \\ 0 & \text{om } \lambda = \lambda_k \end{cases}$ . Q.

För att vår behandling av ekvationen (SF3) skall vara fullständig återstår det att behandla fallet $\lambda = 0$. Som framgår av följande sats är detta fall helt annorlunda än de föregående.

Sats (10.5.5): Låt $\Psi$ vara ett fullständigt ON-system i $L^2(\Pi)$ och låt $K(x,y) = \Sigma \lambda_k \psi_k(x)\overline{\psi_k(y)}$ vara en symmetrisk H-S-kärna i $L^2(\Pi^2)$ och låt $g \in L^2(\Pi)$ vara givet. Då har ekvationen

$$g(x) = \int_0^1 K(x,y)\, f(y)dy$$

en lösning $f$ i $L^2(\Pi)$, omm

$$g = \Sigma(g|\psi_k)\psi_k = \Sigma\, a_k\psi_k\ , \qquad \text{där } a_k = 0 \text{ om } \lambda_k = 0,$$

och $\Sigma \dfrac{|a_k|^2}{\lambda_k^2} < \infty$. En lösning är då $f = \Sigma \dfrac{a_k}{\lambda_k} \cdot \psi_k$ .

Bevis: Direkt verifikation. Q.

Efter att ovan ha fått användbarheten hos sats (10.5.1) illustrerad förefaller det vara dags för ett bevis, men eftersom beviset av nedanstående något generellare sats är endast obetydligt svårare skall vi istället bevisa

Sats (10.5.6): Låt $T$ vara en kompakt symmetrisk operator i det separabla Hilbertrummet $H$. Då finns det ett fullständigt ON-system $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ av egenvektorer till $T$, och reella tal $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, sådana att $\lambda_k \longrightarrow 0$ och för alla $f$ i $H$ är

$$Tf = \Sigma\, \lambda_k(f|\varphi_k)\varphi_k\ .$$

Innan vi går in på beviset av sats (10.5.6) skall vi göra en uppdelning av ON-systemet $\Phi$ och skriver $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ , där

$$\Phi' = \{\varphi_k | \varphi_k \in \Phi\ ,\quad T\varphi_k = \lambda_k\varphi_k \neq 0\} \qquad \text{och}$$

$$\Phi'' = \{\varphi_k | \varphi_k \in \Phi\ ,\quad T\varphi_k = 0\}.$$

Vi skriver sedan $N = \mathrm{Ker}(T)$ och konstaterar att $\Phi''$ helt enkelt är ett godtyckligt fullständigt ON-system i $N$. Vi skall därför först konstruera ON-systemet $\Phi'$ och visa att $Tf = 0$ om $(f|\varphi_k) = 0$ för alla $\varphi_k$ i $\Phi'$.

För beviset kommer vi att behöva ett antal lemmor och börjar med

Lemma (10.5.7): Låt $T$ vara en begränsad operator i $H$, och antag att $f$ är ett maximalt element med avseende på $T$. Då är $f$ en egenvektor till operatorn $T^*T$, med egenvärdet $\lambda = ||T||^2$ .

Bevis: Eftersom $||T^*|| = ||T||$ är $||T^*T|| \leq ||T||^2$ . Å andra sidan är $||T||^2 = ||Tf||^2 = (Tf|Tf) = (T^*Tf|f) \leq ||T^*Tf|| \cdot ||f|| =$ $= ||T^*Tf|| \leq ||T^*T|| \leq ||T||^2$ , vilket visar att alla olikheter är

likheter. Speciellt ges den första olikheten av Schwarz'olikhet, och eftersom det enda fallet av likhet i Schwarz' olikhet är då vektorerna är parallella så är $T^*Tf = ||T||^2 \cdot f$, vilket visar att $f$ är en egenvektor till egenvärdet $||T||^2$. Q.
Kombinerar vi nu lemma (10.5.7) med sats (10.3.9) ser vi att om $T$ är en kompakt symmetrisk operator så har den positiva operatorn $T^2$ minst en egenvektor hörande till egenvärdet $||T^2|| = ||T||^2$. I förbigående kan det vara värt att observera

Lemma (10.5.8): Om $\lambda$ är ett egenvärde till den positiva operatorn $T$, så är $\lambda \geq 0$.

Bevis: Antag att $||f|| = 1$, och att $Tf = \lambda f$. Då är $\lambda = \lambda(f|f) = (\lambda f|f) = (Tf|f) \geq 0$. Q.

Av vårt nästa lemma följer att om $T$ är kompakt symmetrisk, så har inte bara $T^2$ utan även $T$ minst en egenvektor.

Lemma (10.5.9): Låt $T$ vara en symmetrisk operator, låt $a$ vara ett positivt reellt tal och antag att $a^2$ är ett egenvärde till operatorn $T^2$. Då är antingen $a$ eller $-a$ ett egenvärde till $T$.

Bevis: Om $T^2f = a^2f$, så är
$(T^2-a^2)f = (T + aI)(T - aI)f = 0$. Då finns två möjligheter. Antingen är redan $(T - aI)f = 0$ vilket innebär att $f$ är en egenvektor till egenvärdet $a$, eller så är $(T - aI)f = g \neq 0$. Men då är $(T+aI)g = 0$, vilket innebär att $Tg = -ag$ så att $g$ är en egenvektor till egenvärdet $-a$. Q.

Vi skall strax inleda ett induktivt förfarande för att konstruera hela ON-systemet $\Phi'$, men dessförinnan behöver vi ytterligare två lemmor och börjar med

Lemma (10.5.10): Låt $T$ vara en symmetrisk operator och antag att $Tf_1 = \lambda_1 f_1$, $Tf_2 = \lambda_2 f_2$. Då är antingen $\lambda_1 = \lambda_2$ eller $(f_1|f_2) = 0$.

Bevis: $\lambda_1(f_1|f_2) = (Tf_1|f_2) = (f_1|Tf_2) = \overline{\lambda}_2(f_1|f_2) = \lambda_2(f_1|f_2)$, eftersom $\lambda_2$ är reellt, men då är tydligen $(\lambda_1-\lambda_2)(f_1|f_2) = 0$. Q.

Enligt lemma (10.5.10) är allstå egenvektorer hörande till olika egenvärden ortogonala, medan däremot egenvektorer hörande till samma egenvärde inte behöver vara det. Å andra sidan är som man lätt ser de till ett givet egenvärde hörande egenvektorerna ett slutet invariant delrum av H. Vi skall beteckna det till egenvärdet $\lambda$ hörande egenrummet med $E(\lambda)$. Vårt nästa lemma utnyttjar på ett fundamentalt sätt kompaktheten hos operatorn T.

Lemma (10.5.11): Låt T vara en kompakt symmetrisk operator och låt $a > 0$ vara ett givet reellt tal. Då är mängden av egenvärden $\{\lambda_k\}$ till T, sådana att $|\lambda_k| \geq a$ ändlig. Vidare är det till ett givet egenvärde $\lambda \neq 0$ hörande egenrummet $E(\lambda)$ ändligt-dimensionellt.

Bevis: Om $T\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ och $T\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$ så är $||T\varphi_i - T\varphi_j|| = (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^{\frac{1}{2}} \geq a\cdot 2^{1/2}$ om $|\lambda_i| \geq a$ och $|\lambda_j| \geq a$, detta enligt lemma (10.5.10). Om det fanns en oändlig mängd egenvärden $\lambda_k$ sådana att $|\lambda_k| \geq a$ skulle därför följden $T\varphi_k$ sakna konvergent delföljd. På samma sätt skulle vi i ett oändligt-dimensionellt delrum $E(\lambda)$ kunna utvälja en oändlig ON-följd $\{\varphi_i\}$ och då skulle följden $\{T\varphi_i\}$ sakna konvergent delföljd. Detta bevisar lemmat. Q.

Anm. Beviset av att egenrummet $E(\lambda)$ är ändligt-dimensionellt utnyttjar ej lemma (10.5.10) och därmed utnyttjas ej att T är symmetrisk. Det gäller alltså för varje kompakt operator att ett egenrum hörande till ett från 0 skilt egenvärde är ändligt-dimensionellt.

Vi kan nu bevisa existensen av ON-system $\Phi'$ på följande sätt. Vi börjar med att konstatera att enligt sats (10.3.9) har T en maximal vektor $\varphi_1$ och enligt lemma (10.5.7) och lemma (10.5.9) är $\varphi_1$ en egenvektor till T med egenvärdet $\lambda_1 = ||T||$ eller $-||T||$. Vi skriver nu $\Phi_1 = \{\varphi_1\}$, $\Lambda_1 = \{\lambda_1\}$ $M_1 = L(\Phi_1)$ (dvs. det delrum av H som uppspänns av ON-systemet $\Phi_1$) och $H_1 = M_1^{\perp}$. Enligt korollarium (10.4.5) är rummet $H_1$ invariant under T och vi skall därför uppfatta T helt enkelt som en operator på $H_1$. Vi konstaterar sedan att T även som operator på $H_1$ är kompakt och symmetrisk. Vi väljer därför en maximal vektor för T (som operator på $H_1$) i $H_1$ och konstaterar att denna då åter är en egenvektor till T med egenvärdet $\lambda_2$, där $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Vi skriver sedan $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $M_2 = L(\Phi_2)$ och $H_2 = M_2^{\perp}$. Antag nu att vi erhållit

Vad som är helt uppenbart är att lösningsmängderna till ekvationerna (A) och (B) är slutna delrum av $L^2(\mathbb{I})$ som vi skall beteckna E(A) resp. E(B). Det följer av anm. efter sats (10.5.11) att de är ändligt- dimensionella. Vad som också är helt uppenbart är följande

Sats (10.6.1): Om $f_1$ och $f_2$ är lösningar till (C) så är $f_1-f_2$ en lösning till (A) och om $f_o$ är en lösning till (C) och f är en lösning till (A), så är även $f_1+f$ en lösning till (C). Speciellt är en eventuell lösning till (C) entydig omm $E(A) = \{0\}$.

Sats (10.6.1) utsäger alltså det uppenbara faktum att entydigheten hos eventuella lösningar till (C) beror av ekvationen (A). Betydligt intessantare är följande sats som sammankopplar existensen av lösningar till (C) med ekvationen (B).

Sats (10.6.2): Ekvationen (C) är lösbar omm $g \in E(B)^{\perp}$ och likaledes är (D) lösbar omm $f \in E(A)^{\perp}$. Speciellt är (C) lösbar för alla g omm (B) endast har den triviala lösningen $h = 0$.

Bevis: Vi skriver först ekvationerna (A) och (B) på följande sätt

(A′) $\quad 0 = (I - \mathbb{K})f = Tf$, resp.

(B′) $\quad 0 = (I - \mathbb{K}^*)h = T^*h$ .

Vi observerar nu först att eftersom

$(TT^*f|f) = (T^*f|T^*f) = ||T^*f||^2 \geq 0$, så är $TT^*$ (liksom $T^*T$) en positiv operator. Å andra sidan är

$$TT^* = (I - \mathbb{K})(I - \mathbb{K}^*) = I - \mathbb{K} - \mathbb{K}^* + \mathbb{K}\mathbb{K}^* = I - (\mathbb{K} + \mathbb{K}^* - \mathbb{K}\mathbb{K}^*)$$
$$= I - \mathbb{K}_1 ,$$

där $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K} + \mathbb{K}^* - \mathbb{K}\mathbb{K}^*$ är en symmetrisk H-S-operator.

Enligt sats (10.5.6) finns det då ett fullständigt ON-system $\Phi$, och en följd reella tal $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ så att

$$\mathbb{K}_1 f = \Sigma\, \lambda_k (f|\varphi_k)\varphi_k .$$

Detta innebär då att

$$((I-\mathbb{K}_1)f|f) = (\Sigma(1-\lambda_k)(f\varphi_k)\varphi_k \,|\, \Sigma(f|\varphi_k)\varphi_k) = \Sigma(1-\lambda_k)|(f|\varphi_k)|^2 ,$$

och eftersom detta uttryck är $\geq 0$ är alltså alla $\lambda_k \leq 1$. Vidare är $((I-\mathbb{K}_1)f|f) = 0$ omm $||(I-\mathbb{K}^*)f||^2 = 0$, dvs. omm $(I-\mathbb{K}^*)f = 0$. Detta innebär alltså att det till operatorn $\mathbb{K}_1$ och

egenvärdet 1 hörande egenrummet $E(1) = E(B)$, där $E(B)$ definierats som ovan. Vi definierar nu som i sats (10.5.3)

$$\mu_k'' = \begin{cases} 0 & \text{om } \lambda_k = 1 \\ \dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_k} & \text{om } \lambda_k \neq 1 \end{cases}$$

och $K_1''$ genom

$$K_1''f = \Sigma\, \mu_k''(f|\varphi_k)\varphi_k \,.$$

Enligt korollarium (10.5.4) är då

$$(I - \mathbb{K}_1)(I - \mathbb{K}''_1) = (I - \mathbb{K})(I - \mathbb{K}^*)(I - \mathbb{K}_1'') = Q_{E(1)} = Q_{E(B)} \,.$$

Om därför $g \in E(B)^{\perp}$, så är

$$g = (I - \mathbb{K})f \quad \text{om}$$
$$f = (I - \mathbb{K}^*)(I - \mathbb{K}_1'')g$$

vilket är en lösning till (C). Å andra sidan följer det av korollarium (10.4.4) att villkoret $g \in E(B)^{\perp}$ också är nödvändigt för lösbarheten av (C). På grund av symmetrin gäller motsvarande samband mellan ekvationerna (A) och (D). Detta bevisar satsen. Q.

Med ovanstående två satser har vi kunnat koppla lösbarheten hos ekvationen (C) till ekvationen (B) medan eventuell entydighet hos lösningarna kopplats till ekvationen (A). Med nästa sats, som vi ej kommer att bevisa, sammankopplas ekvationerna (A) och (B) på ett mycket tilltalande sätt.

Sats (10.6.3): Med tidigare införda beteckningar är dim $E(A)$ = = dim $E(B)$, och speciellt är $E(A) = 0$ omm $E(B) = 0$.

För beviset av denna sats se t.ex. Shilov: Theory of Linear Spaces.

Vi sammanfattar nu ovanstående tre satser till följande

Sats (10.6.4): (Fredholms alternativsats).
Låt $K \in L^2(\Pi^2)$ och $g, k \in L^2(\Pi)$ vara givna funktioner och låt integralekvationerna (A), (B), (C) och (D) vara som ovan. Då gäller ett av följande alternativ:

I. Ekvationen (A) har endast den triviala lösningen $f = 0$. Då har även (B) endast denna lösning och ekvationerna (C) och (D)

är entydigt lösbara. Lösningen till (C) kan skrivas

$$f(x) = g(x) - \int_0^1 L(x,y)\, g(y)dy \ ,$$

där L är en H-S-kärna och $(I - \mathbb{L}) = (I - \mathbb{K}^*)(I - \mathbb{K}_1')$ .

II. Ekvationen (A) har icke-triviala lösningar. Då är mängden av lösningar till (A) ett ändligt-dimensionellt delrum E(A) i $L^2(\mathbb{I})$, och ekvationen (B) har också ett icke-trivialt lösningsrum E(B), sådant att dim E(A) = dim E(B). Vidare är ekvationen (C) lösbar omm $g \in E(B)^{\perp}$ medan (D) är lösbar om $k \in E(A)^{\perp}$ . Lösningarna är ej entydiga, men en lösning av minimal norm kan skrivas som i alternativ I.