Correspondence of Marcel Riesz with Swedes.
Part I.
file: Riesz1.tex

Jaak Peetre and Rooney Magnusson (editors)

March 29, 2009

Contents

1 Introduction **5**

1.1 Preamble 5

1.1.1 The life and work of Marcel Riesz 8

1.1.2 How this book came about 9

1.2 Proofreading 9

1.2.1 10

1.2.2 Inauguration of the memorial plaque for the mathematical brothers Fredric and Marcel Riesz, in 2004, at the house where they were born in Győr, Hungary . . . 11

1.3 Tables and other useful information 11

1.3.1 Academies 13

1.3.2 Code List of Institutions of Higher Education and Academies in Sweden 15

1.3.3 Swedish newspapers 15

1.3.4 Journal title abbreviations 16

1.3.5 The Swedish Academic Degree Classification 16

1.3.6 The former Swedish grading scale 17

1.3.7 How the letters were organized 17

1.3.8 Ordering of the Swedish Alphabet system 17

1.3.9 Other Abbreviations Used 18

1.4 Acknowledgements 19

2 Letters to Marcel Riesz **21**

2.1 Göran Agrell 21

2.1.1 Letter Malmö 18 Feb 1946 21

2.2 Lars Ahlfors 23

2.2.1 Letter Kungsbacka Jan 10, 1945 24

2.3 Walter Ahrnfeldt 24

2.3.1 Letter Köping May 1926 24

2.4 Axel Arwin 25
2.4.1 Letter Sundbyberg Dec 12 1916 25
2.4.2 Letter Sundbyberg Apr 13 1917 26
2.4.3 Letter to I.O. Bendixon Lund Mar 26 1917 27
2.4.4 Letter Sundbyberg Apr 13 1917 27
2.4.5 Letter Sundbyberg Aug 28 1917 27
2.4.6 Letter Nådhammar Oct 2 1917 28
2.5 Gaston Backman 29
2.5.1 Letter Lund Apr 18, 1943 29
2.6 Dezsö von Bayer-Krucsay 31
2.7 Curt Ragnar Benckert 31
2.7.1 Letter Österskär 14 Dec 1939 31
2.7.2 Stockholm 19 Apr 1943. 32
2.8 Ivar Otto Bendixson 33
2.8.1 Postcard May 30, 1914 33
2.8.2 Letter Saltsjöbaden, Aug, 26, 1916 34
2.9 Paul Bergholm 35
2.9.1 Invitation to dinner Nov 1924, postal stamp says 6.11.24 35
2.9.2 Xmas and New Year Greetings, 1937-1938 35
2.9.3 Xmas and New Year Greetings 1937-1938 35
2.9.4 Dr F. Lundberg's address of praise on the occasion of the 25th jubilee of SPP 17 Jun 1942 35
2.10 Viktor Bergström 40
2.10.1 Postcard Hamburg May 11, 1930 41
2.10.2 Postcard Hamburg Jul 8, 1930 41
2.10.3 Postcard Hamburg Jul 19, 1930 42
2.10.4 Letter Lund Apr 10, 1931 42
2.10.5 Postcard Ystad Dec 14, 1931 44
2.10.6 Letter Copenhagen April 7, 1936 45
2.10.7 Letter Paris Apr 11, 1936 46
2.11 Gert Bonnier 48
2.11.1 Letter Göttingen November 10, 1913 48
2.12 Ragnar Berwald 49
2.12.1 Letter Stockholm December 1916 49
2.13 Arne Beurling 51
2.13.1 Letter Uppsala Sep 18, 1941 51
2.13.2 Letter May 9, 1948 53
2.13.3 Letter April 2, 1948 55
2.14 Letter Princeton Nov 4, 1952 57

2.15 Hugo Björk 59
2.15.1 Letter Lund June 29, 1942 59
2.15.2 Postcard Boden, probably summer of 1942 60
2.16 Carl Emanuel Blom 61
2.16.1 Letter Stockholm Mar 2 1942 61
2.17 Göran Borg 63
2.17.1 Postcard Uppsala Feb 15, 1947 63
2.18 Agneta Bramson 64
2.18.1 Letter Stockholm May 6, 1938 64
2.19 Torsten Brodén 65
2.19.1 Postcard Lund, Apr 21, 1923 66
2.20 Olof Byström 66
2.20.1 Postcard to Ånge, postal stamp Undersåker 1919 . . . 67
2.20.2 Postcard forwarded to Ånge, original destination Döbelnsgatan 5, Stockholm Jan 5, 1920 67
2.21 John Böttiger 68
2.21.1 Letter Stockholm May 21, 1931 68
2.21.2 Letter Stockholm Jun 4, 1931 69
2.22 Torsten Carleman 69
2.22.1 Letter Tällberg Apr 13, 1919 70
2.23 Lennart Carleson 71
2.23.1 Postcard from various mathematicians Stanford Mar 5, 1966 71
2.24 Fritz Carlson 71
2.24.1 Letter Stockholm Feb 8, 1932 71
2.24.2 Letter Stockholm Feb. 9, 1932 72
2.24.3 Letter Apr 4, 1932 74
2.24.4 Letter Marstrand July 3, 1935 77
2.24.5 Letter Mar 25, 1943 85
2.24.6 Postcard Äppelviken June 20, 1944 86
2.24.7 Letter Ålsten Feb 2, 1946 86
2.24.8 Letter Stockholm Mar(?) 13, 1945 87
2.24.9 Letter Djursholm Mar 28, 1950 88
2.24.10 Letter Stockholm Apr 23, 1952 88
2.24.11 Letter Djursholm Sep 2, 1952 89
2.25 Maja Carlsson 89
2.25.1 Undated Note, Postal Stamp Stockholm 27 Jul, 1926 . 89
2.26 Gustaf Cederstrand 90
2.26.1 Letter Stockholm Jan 1 1922 90

2.27 Carl Vilhelm Ludvig Charlier 92
2.27.1 Undated Letter probably around 1930 92
2.28 Stig Comét 99
2.28.1 Letter Stockholm 9 Mar 1941 99
2.28.2 Postcard Stockholm 12 Jun 1941 101
2.28.3 Letter Stockholm 12 Jul 1941 101
2.28.4 Letter Stockholm 4 Aug 1941 102
2.28.5 Letter Stockholm 10 Oct 1941 103
2.29 Harald Cramér 105
2.29.1 Invitation to the wedding to Marta Djursholm 20 Jun 1918 105
2.29.2 Letter Blue Boar Hotel Cambridge 8 Jun 1924 105
2.29.3 Letter Stockholm 30 Dec 1940 105
2.29.4 Postcard with Prague stamp Apr 15 1932 107
2.29.5 Letter Stockholm 30 Dec 1940 108
2.29.6 Letter Stockholm 26 Oct 1942 109
2.29.7 Letter Djursholm 31 Jan 1948 110
2.29.8 Letter Djursholm 18 Oct 1949 112
2.29.9 Letter Stockholm 31 Oct 1951 113
2.29.10 Letter Djursholm 15 Nov 1961 115
2.30 Marta Cramér 116
2.30.1 Letter Djursholm Aug 14 1943 116
2.31 Thorild Dahlgren 117
2.31.1 Letter 6, 1917 117
2.31.2 Letter Stockholm Dec 12, 1919 118
2.31.3 Letter Malmö Jan 10, 1940 119
2.31.4 Letter Malmö May 6, 1959 120
2.32 Helge Dalin 121
2.32.1 Letter Malmö Sep 15, 1928 121
2.32.2 Letter Malmö Jun 20, 1930 124
2.32.3 Letter Eslöv Nov 12, 1930 126
2.33 Gösta Danielsson 131
2.33.1 Postcard Hälsingborg Aug 29, 1945 131
2.34 Karl Dickman 132
2.34.1 Letter Råsunda Mar 6, 1929 132
2.34.2 Postcard Hälsingborg Aug 29, 1945 139
2.35 V. W. Ekman 139
2.35.1 Postcard Nov 24, 1923 139
2.35.2 Postcard Oct. 18, 1940 140

2.36 Alex Frank 140
2.36.1 Letter Jan 1, 1926 140
2.37 Ivar Fredholm 142
2.37.1 Letter from Ivar Fredholm addressed to the Mathematical Society at SH 143
2.38 Nils Erik Fremberg 144
2.38.1 Postcard July 20 1942 144
2.38.2 Letter Jun 30 1945 144
2.38.3 Postcard 22 Dec 1950 147
2.38.4 Letter 29 Apr 1947 148
2.38.5 Letter to Fremberg from Werner Fenchel Feb 21, 1949 . 152
2.39 Sture Fronus 154
2.39.1 Letter to Saltsjöbaden Jun 20, 1942 155
2.40 Otto Frostman 155
2.40.1 Letter Munich May 24, 1933 155
2.41 Carl-Erik Fröberg 158
2.41.1 Letter July 11,1942 158
2.42 Torsten Gustafson 159
2.42.1 Letter Lund Aug 25, 1939 159
2.42.2 Letter Lund Sept 6, 1939 161
2.43 Eva Gårding 162
2.43.1 Letter Dec 13, 1949 162
2.44 Lars Gårding 164
2.44.1 Letter to Marcel Riesz (Lund), Jun 27 1942 164
2.44.2 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) from Falkenberg Aug 18, 1942 168
2.44.3 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden), Aug 20, 1942 . . 172
2.44.4 Letter (from Cambridge) Nov 27, 1942 174
2.44.5 Letter to Marcel Riesz (Lund) Aug 8, 1943 176
2.44.6 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) Aug. 5, 1944 . . 183
2.44.7 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge Jan 18, 1945 184
2.44.8 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge Easter Day, 1945; postage stamp Apr. 1 185
2.44.9 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge April 26, 1945 186
2.44.10 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden), from Jan 3, 1946 188
2.44.11 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) Aug 3, 1946 . . . 190
2.44.12 Letter to Marcel Riesz (Lund) Princeton, Nov 10, 1946 194

2.44.13 Undated letter (Lund), presumably from the same period (c. 1946) . . . 196
2.44.14 Letter to Chicago from Princeton Feb 2, 1947 . . . 198
2.44.15 Letter to Chicago from Princeton Apr 15, 1947 . . . 202
2.44.16 Letter to Chicago from Panama City, Florida, postal stamp May 17, 1947 . . . 204
2.44.17 Letter to Lund Princeton, Aug 16 1947 . . . 206
2.44.18 Short-letter Otterbygård, June 18, 1948 . . . 207
2.44.19 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Lund, Jun 24, 1948 208
2.44.20 Letter Jan 13, 1949 . . . 212
2.44.21 Letter Oct 17, 1949 . . . 213
2.44.22 Letter from E. J. Copson to Lars Gårding Oct 18, 1949 214
2.44.23 Letter Paris, 9 Jun 1949 . . . 215
2.44.24 Letter Lund, Dec 13 1949 . . . 218
2.44.25 Postcard to Marcel Riesz (Lund), with postal stamps Budapest and Lund Dec 1950 . . . 221
2.44.26 Letter to Stanford from Lund, Nov 8 1954 . . . 223
2.44.27 Letter to Marcel Riesz (College Park) Lund, Mar 25 1957 . . . 226
2.44.28 Letter from Princeton Mar 5, 1960 . . . 228
2.45 Gårding and Arne Beurling . . . 231
2.45.1 Cable Princeton Nov 15 195? . . . 231
2.46 Mrs. Amalia son Helmuth Gyllenswärd . . . 232
2.46.1 Letter from Amalia Djursholm 1 Jan 1920 . . . 232
2.47 Postcard from Helmuth Östersund Jul 14 1913 . . . 234
2.48 Letter Grand Hotel Åre Aug 1 1919 . . . 235
2.48.1 Letter from Helmuth 4 Jan 1920 . . . 236
2.48.2 Card, forwarded to Karzinzy St 20, Györ, Hungary, Bydalen Jul 23 1922 . . . 238
2.48.3 Card Dec 30 1926 . . . 239
2.49 Johannes Hagne . . . 241
2.49.1 Application to Examination . . . 241
2.50 Stig Hammar . . . 242
2.50.1 Letter 13 Sept 1947 . . . 242
2.50.2 Letter Jönköping Jan 13 1917 . . . 243
2.51 Einar Hille . . . 245
2.51.1 Postcard with view over “Storlien, Lilla brudslöjan”, Jan 1, 1917 . . . 245
2.51.2 Postcard Feb. 27, 1925 . . . 246

2.51.3 Card from Einar and Kirsti New Haven 3 Dec 1950 . . 247
2.52 Nils von Hofsten 248
2.52.1 Letter Jul 7 1944 248
2.53 Lars Hörmander 248
2.53.1 Letter Linköping Aug 18, 1953 248
2.53.2 Letter Chicago Feb 14, 1956 249
2.54 Carl Hyltén-Cavallius 252
2.54.1 Letter Lund Feb 2, 1951 252
2.54.2 Letter Lund May 31, 1955 254
2.54.3 Letter Lund 29 May 1956 257
2.55 Innsbruck 260
2.55.1 Postcard with signatures; postal data: 26.IX.24 260
2.56 Tor Jerneman 262
2.56.1 Letter to Herr Doktor Marcel Riesz Box 166 Ånge Stockholm Jan 13, 1920 262
2.57 Ernst Jacobsthal 264
2.57.1 Letter Alingsås, Slott Nolhaga Jan 19, 1943 264
2.57.2 Letter Alingsås, slott Nolhaga Feb 3, 1943 267
2.57.3 Letter Alingsås, slott Nolhaga Feb 10, 1943 271
2.57.4 Letter Alingsås Feb 14, 1943 272
2.57.5 Letter Alingsås Feb 21 1943 274
2.57.6 Letter Uppsala Mar 16, 1943 276
2.57.7 Letter Uppsala Sep 25, 1943 278
2.57.8 Letter Uppsala Mar 24, 1944 286
2.57.9 Letter Uppsala Aug 11, 1945 287
2.57.10 Letter Uppsala Jul 22, 1946 289
2.57.11 Letter Uppsala Aug 24, 1947 299

Chapter 1

Introduction

1.1 Preamble

Let us start by quoting a passage from Winston Churchill's book [28], p. 6-7.

A great majority of the skulls found in Britain, of whatever age, are long- or medium-headed varieties. Nevertheless it is known that the Beaker people[1] and other long- or medium-headed types penetrated here and there, and established themselves as a definite element. Cremation, almost universal in the Later Bronze Age, has destroyed[2] all record of the blending of the long- or round-headed types of man, but undoubtedly both persisted, and from later traces, when, in Roman times burials were resumed instead of cremation, anthropologist of the older school professed themselves able to discern a certain charracteristic Roman-British type, although in point of fact this may have established itself long before the Roman conquest. Increasing knowledge has rendered these early categories less certain.[3]

It may be possible that the opinion of view of this author here is out of date; science today probably does not put that much importance on skulls length and skulls size. But this may still be an eye-opener for us. We now live in a time when the art of writing or at least the art of writing and communicating by letter seems about to vanish. There will come a time when historians can no longer rely on written evidence as they have done

[1] Refers to inhabitants of Britain at the end of the Neolitic Age, known for a special kind of pottery, now known as *beaker potery*. (In Swedish beaker means "bägare".)

[2] The Editors' Emphasis!

[3] The chief steps in the evolution of Britain: The Celtic tribes came around 500 BC; the Romans by the birth of Christ ; the Anglo-Saxons around 400 AD; Scandinavians Vikings around 700 AD; and, finally, the Normans in 1066 (really descendants of Danish and Scanian Vikings). The last invasion of England – in 1940 – failed!

since the time of Herodotos and Thucydides.

From this point of view the present book is unique. Marcel Riesz represents perhaps the last generation of mathematicians who communicate with each other by letter. Email has taken over sweeping away all trace of the communication technology.

Probably few people actually save an electronic message for a very long time. In my case because I use webmail; every time I approach a certain critical quota, our computer division (LDC) tells me what will happen if I do not erase my emails quickly.

Marcel Riesz also had the habit of saving everything.[4] Nothing, or little, was thrown away.

It is for this reason that a large collection of letters sent to him is preserved.

Most of his letters were kept in his flat Kävlingevägen 1, Lund. After his death in 1969, one of his twin daughters Mrs. Birgit Riesz-Larsson lived there with her family. In the automn of 2002, due to illness, her daughter Mrs. Ilona Riesz, granddaughter of Marcel, took her to a resthome in Stockholm. At the same time she desposited this collection of letters at the Centre fo Mathematical Sciences (address: Sölvegatan 18, SE-221 00, Lund). Birgit died shortly after, on 4 May 2004.

Upon arrival the collection was in a chaotic state and stored in a number of old suitcases and carboard boxes. There was a smell of mould about them. The first persion supposed to deal with them was Göran Wanby but he refused because he had an allergy. It is in this way that I got involved.

At a much later stage, I joined forced with a most effecient partner in the shape of Rooney Magnusson, former student advisor at SU, who has done enumerable services, sometimes really incredible, in genealogical and biographical questions.[5]

As I then lived in Kåseberga, 80 km south-east of Lund close to the city of Ystad, I could no do the job myself. Therefore I contacted László Filep (College of Nyíregyháza, Hungary) in February 2003 and asked him to come to Lund again to organize the collection. (Filep had been in Lund once before to have a look at *Riesziania* available at the Mathematics Department, but I did not see him then.) So he came to Lund and Sweden with a grant from the KVA, for a period of 8 weeks in June-July 2003. (He then visited also

[4] In this respect he had a counterpart in the Italian mathematician Felice Casorati , who putting even houskeeping bills into his files. [125].

[5] Besides mathematics, Rooney has also many other interests, such as classical music and sports.

the Mittag-Leffler Institute in Djursholm, and Uppsala University.) László worked with enormous energy and a great enthusiasm; in a short time he managed to put the whole collection in proper order – an almost Heculean task! (It sem that only a person versed in the Hungarian language could have done this.)

The Riesz correspondence is now housed in the basement of the Mathematics Building (address: Sölvegatan 18, Lund), and is contained in cardboard boxes, in number 45, which I had acquired beforehand. The dimension of each box is $18 \times 24 \times 31.5\text{cm}^s$.

Sadly László Filep died in November 2004 while lecturing in Budapest. During his short visit in Lund (and Kåseberga with his lovely wife Sárika) in July of that year, he took with him to Hungary the 2 boxes 4,5) containing the Hungarian part of the correspondence.

Presumably he used this material when he wrote, in Hungarian, [43] about the correspondence between the two Riesz brothers Frigyes and Marcel. These boxes are still somewhere in Hungary, but will be returned to Lund in due course.

The collection gives especially useful information about the Lund school of Mathematics first under Marcel Riesz (1926-1952), after his retirement in 1952 and then continued under Åke Pleijel and Lars Gårding . Moreover, it gives glimpses about mathematical life in Princeton, Chicago, College Park, Paris och other important mathematical centres. There are also some letters written by Åke Pleijel and addressed to some members of the Pleijel family.

All the letters are given in the original language (as a rule, Swedish). Most of them are translated into English by me.[6] The translations come in italics.

We see this work mainly as an **Introduction to the Riesz Collection of Letters**, done for the benefit of a future researcher. Instead of having to browse through all the material contained in the boxes, they can now read each letter in one place, and then, if they want, turn to the original document.

This book should in no ways be seen as a biography of Marcel Riesz – it is a collection of letters sent to him. Below we indicate only the most rudimentary facts.

[6]When the first person is used in a context like this, it refers to the seniot Editor, Jaak Peetre.

1.1.1 The life and work of Marcel Riesz

Marcel Riesz was born on November 16 in 1886 in the little town of Györ (Győr) in Western Hungary, and died on 4 September 1969 in Lund, Sweden. His father Ignác Riesz was a physician who practiced medicine in Györ. The Riesz family had moved from Austria to Hungary, perhaps from the province Burgenland closest to the Hungarian Puszta, but we do not know exactly when. Both Ignác and his wife were, however, born in Hungary.[7] The German form of the family name was Rieß (see Teichmüller [164]), which was quickly made to sound more Hungarian. Besides Marcel there were two more sons in the family. The eldest brother Frigyes (Frédéric, b. in 1880) also became also a famous mathematician; the second brother was a physician like his father.

Marcel Riesz began studying mathematics at the University of Budapest in 1904; he had won the Eötvos[8] competition in the same year. Under the influence of Lipot (Lepold) Fejér, (1880-1959), he devoted himself to summation methods. Later in 1907, he defended his doctoral dissertation. In 1908 he came to Stockholm to see Gösta Mittag-Leffler , ostensibly to see his library.[9] Despite the considerable difference in age, having convergent mathematical interests, they quickly became friends. Mittag-Leffler got Riesz appointed a docent at SH in 1911. Riesz then became the leader of a group/ of young mathematicians in Stockholm. Among his students of this early period were Harald Cramér and Einar Hille. He also engaged himself in actuarial mathematics and had many friends and students, among them K.G. Hagstroem, to whose magnificient house the *Villa Stochastes* in Saltsjöbaden[10], outside Stockholm, he became a frequent visitor. When von Koch died 1924, no vacancy was announced, but there was a general feeeling in SH that the position should be given to Riesz. However, the job was eventually went to his younger rival Torsten Carleman. This again gave rise to violent protests from various circles in Stockholm. (See letters by Harald Cramér in this volume.) Instead he became professor in Lund in 1926, which at the start he must have regarded as a bit of come down. Here he initiated a famous mathematical school – one could say that it was Marcel

[7]Personal communication by Ilona Riesz.

[8]Baron Loránd von Eötvös (1848-1919), Hungarian physicist, he is remembered for the Eötvös experiment was cited by Albert Einstein in his 1916 paper The Foundation of the General Theory of Relativity. [172].

[9]Probably the two men had seen each other for a short time at ICM in Rome in the same year,

[10]The name means “salt lake”.

Riesz who put Lund on the mathematical map. In particular, he initiated a famous series of seminars. He had lots of students, among them several celebrated mathematicians: Otto Frostman, Olof Thorin, Lars Gårding and Lars Hörmander . For Riesz, the arrival in Lund meant also a drastic change in his mathematical profile. His interests now involved things like partial differential equations, especially hyperbolic ones and Cauchy's problem to whose study the *Riesz integral*, a generalization of the Riemann-Liouville integral, was devised; Clifford numbers with an eye on applications i Physics; number theory, and much more.

When Riesz retired in 1952, he was succeeded by Pleijel and Gårding, and later by Lars Hörmander and Adrien Constantin. For several years after his retirement Riesz travelled around various places in the US (including Princeton, Chicago, Stanford, Maryland, and Bloomington). Owing to a nervous breakdown he returned to Sweden in the early 1960s and died in Lund a few years later. [120], [128], [110].

1.1.2 How this book came about

In the outside I did not at all have the idea to write a book. But more or less accidentalIy hit upon a letter to Marcel by his friend Claes-Gösta Runquist, which containes some information about the founding, in 1922, of the Lund Society of Mathematics (Lunds Matematiska Sällska, LMS), an organization which has played a major rôle in Lund mathematical life, especially in the period of Riesz (1927-1952); he was a chairman even some time after his retirement in the last mentioned year.

So I prepared a TeX copy for myself. Later I hit upon the Gårding letters, which I also decidef to edit – after all he had been my supervisor for some time. this turned out not to be an easy task. Proceeding in this way, I gradually realized a book began to emerge, and got more absorbed by all the interesting charcaters appearing in the story. For intance, the correspondence of Ernst Jacobstal, who came to Sweden via Norway, as a Jew he had been dismissed from his post in Berlin. I got a father impulse, when my friend Rooney Magnusson decided to join as an editor. His help in identifying authors has turned out to be of invaluabke help.

1.2 Proofreading

The book has been proofread by both editors, and some other people as well. But of course, a lot of errors, mostly linguistic, must have remained



Figure 1.1: Julia Simon Szigeti Béláné delivering her address; she wrote a thesis about Marcel

uncorrected. But these we regard just as picturesque.

1.3 Highlights of the book

These are the letters by Lars Gårding and Åke Pleijel.

Quite interesting is also the correspondence of Ernst Jacobsthal, who was dismissed from his professorship in Berlin by the Nazis in 1933. He came as a refugee to Sweden via Norway.

1.3.1

]

How the book came about. In the outside I did not at all have the idea to write a book. But more or less accidentalIy hit upon a letter to Marcel by his friend Claes-Gösta Runquist, which containes some information about the founding, in 1922, of the Lund Society of Mathematics (Lunds Matematiska Sällska, LMS), an organization which has played a major rôle in Lund mathematical life, especially in the period of Riesz (1927-1952); he was a chairman even some time after his retirement in the last mentioned year.

So I prepared a TeX copy for myself. Later I hit upon the Gårding letters, which I also decidef to edit – after all he had been my supervisor for some time. this turned out not to be an easy task. Proceeding in this



Figure 1.2: left: Ilona Riesz, granddaughter of Marcel; middle: Károli Öthalmi, grandson of Marcel's brother Sándor: right: es Öthalminé Tövöcsik, wife of grandson

way, I gradually realized a book began to emerge, and got more absorbed by all the interesting charcaters appearing in the story. For intance, the correspondence of Ernst Jacobstal, who came to Sweden via Norway, as a Jew he had been dismissed from his post in Berlin. I got a father impulse, when my friend Rooney Magnusson decided to join as an editor. His help in identifying authors has turned out to be of invaluabke help.

1.3.2 Inauguration of the memorial plaque for the mathematical brothers Fredric and Marcel Riesz, in 2004, at the house where they were born in Győr, Hungary

1.4 Tables and other useful information

In Sweden there are, traditionary, two kinds of *institutions of higher education*:

1. "universitet" : *university*

2. the "högskola" (plural: "högskolor"), which literarily means 'high school'. An altermative translation of my our own: *school or institute of higher education*.



Figure 1.3: László and Sárika, Jaak and Eila Kåseberga in July 2004

In the beginning there were just two of them[11]

1. The University of Uppsala (UU) was founded by Pope Sixtus IV in 1477, which, however, closed a few decades later. It was reopened only in the early 17th century;

2. The University of Lund (LU) was founded in 1668 by the Swedes on recently conquered Danish territory, partly with the intention to accelerate its 'assimilation' into Sweden.

During the 20th century there was felt a need to also have institutions of higher education in other major cities. This is why

1. "Stockholms högskola" (SH) was opened in 1878, and

2. "Göteborgs högskola" (GH) was opened in 1891.

From the beginning these were privately financed instititions. In particular, SH was conceived as a kind of research institute; there were no exams, and no grades were offered.[12] Over time they both became genuine universities; "Stockholms universitet" (SU, 1960) and "Göteborgs universitet" (GU, 1954). In both these cities more specialized schools were also created at the same time. In Stockholm there was a medical school, "Karolinska institutet" (CI, Caroline Institute) – today a world famous medical centre – and an engineering school "Teknologiska institutet" (STI, Stockholm Technological Institute), later renamed "Kungliga tekniska högskolan" (KTH, Royal Institute of Technology) in 1877, where "Kunglig" means 'Royal'. In Göteborg, "Chalmers tekniska högskola" (CTH, Chalmers Institute of Technology). there was opened.[13]

[11] In the rather short period (1560-1721) when Sweden was a major European power there were several other universities in conquered terriotories:

1. Åbo (in Finland, founded by the Swedes in 1640);

2. Dorpat (in Livonia – Livland in German and Swedish, present day Latvia and Estonia –; now Tartu in Estonia), founded by the Swedes under King Gustavus Adolphus, while staying in camp in Nuremberg in 1632;

3. Greifswald (in Mecklenburg, Germany), founded before 1456).

[12] For example, Ivar Bendixson was only a fil-lic. not a doctor, but he was made honorary doctor at UU in 1907.

[13] William Chalmers (1748-1811), whose father was a Scottish immigrant, made a big donation, which made it possible to open both the CTH and a famous hospital, the "Sahlgrenska sjukhuset" (Sahlgren Hospital). Niclas Sahlgren (1701-1776), major shareholder in the Swedish East Indian Company, was another Swedish donator to culture and charity.



Figure 1.4: A Discussion between Philosophers. Mosaic from Pompeii.

1.4.1 Academies

These arose in Sweden only during the 18th century. [14] Moreover, as "big" academies were meant for whole of Sweden, there were also "local" academies for just parts of the country[15].

Here only following two concern us:

1. "Kungliga vetenskapakademien" (Royal Academy of Science, KVA), founded in 1739.

2. "Kungliga fysiografiska sällskapet i Lund" (Lund Royal Physiographic Society, LFS) founded in 1772.

Incidentally, we should mention the academy of letters "Svenska akademien" (Swedish Academy) founded in 1786, which today distributes the Nobel Literature Prize, but this does not concern us here.

[14]The first ever academy was the one set up by Plato in an olive grove in Athens, where he spoke to his followers.

[15]In practice, this means university towns like Lund and Uppsala.

We will summarize the above in the form of a table, and include some other institutions as well.

1.4.2 Code List of Institutions of Higher Education and Academies in Sweden

Code	legend
LU	Lund University
GU	Göteborg University
GH	Göteborg School of Higher Education
SH	Stockholm School of Higher Education
SU	Stockholm University
SH	Stockholm School of Higher Education
UmU	Umeå University
UU	Uppsala University
CTH	Chalmers Institute of Technology
LIH	Linköping School of Higher Education
LTH	Lund Institute of Technology
KTH	Royal Technical University
SIT	Stockholm Technological Institute
AIHS	Artilleri- och ingenjörshögskolan (Artillery and Engineering School)
CI	Caroline Institute, Stockholm
SMHI	Sveriges meteorologiska och hydrologiska institut
	(Swedish Meteorological and Hydrological Institute, Norrköping)
LMS	Lunds Matematiska sällskap (Lund Mathematical Society)
KVA	Royal Academy of Sciences
LFS	Lund Royal Physiographic Society
LMS	Lunds Matematiska sällskap (Lund Mathematical Society)
Katte	Lund Cathedral School (founded by King Canute
	(Knut) the Holy of Denmark in 1085)
IVA	Royal Academy of Engineering
RA	Riksarkivet (Government Archives)
UD	Utrikesdepartementet (the Ministry for Foreign Affairs) of Sweden

1.4.3 Swedish newspapers

We shall list those of the three biggest cities (Stockholm, Göteborg, Malmö) and one from the provinces.

Code	legend
DN	Dagens Nyheter, Stockholm
SvD	Svenska Dagbladet, Stockholm
GP	Göteborgs-Posten, Göteborg
GHT	Göteborgs Handel och Sjöfarts-Tidning, founded in 1832, closed in 1985
SDS	Sydsvenska Dagbladet, Malmö
LDBl	Lunds Dagblad, Lund
UNT	Uppsala Nya Tidning
Utskicket	newsletter of Svenska matematikersamfundet (the Swedish Mathematical Society)

1.4.4 Journal title abbreviations

Code & legend	
Acta	Acta Mathematica
Arkiv	Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (nowadays, Arkiv för Matematik)
MathScand	Mathematica Scandinavica
C.R.	Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris)
F *Elementa*	Elementa. Tidskrift för matematik, fysik och kemi
ScandActuarTidskr	Skandinavisk Aktuarietidskrift
J. f. M.	Journal für reine und angewandte Mathematik (Crelle)
JFM	Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik
MR	Mathematical Reviews
Zbl	Zentralblatt der Mathematik

1.4.5 The Swedish Academic Degree Classification

The following degrees were (are) used in the faculty of philosophy and in the faculty ot science. Similar degree classification in other faculties (medicine; engineering; etc.). [116].

Grade	Abbreviation	Approximate English;American equivalent
filosofie kandidat	fil. kand.	Bachelor of Arts
filosofie magister	fil. mag.	Master of Arts
filosofie doktor	fil. dr.	Doctor of Philosophy (D.Phil.; Ph.D.)
civilingenjör	civ. ing.	Civil Engineer

1.4.6 The former Swedish grading scale

This classification system was used in the Swedish educational system (including the universities) from the early 19th century until about 1960 [125].

Notation	Swedish	English	Latin
A	Berömlig	excellent	*laudeatur*
a	Med utmärkt beröm	passed with great	*cum insigniore laude*
	godkänd	distinction	*approbatur*
AB	Med berömd godkänd	passed with distinction	*cum laude aprobatur*
Ba	Icke utan beröm godkänd	passed with credit	*non sine laude aprobatur*
B	Godkänd	satisfactory	*appprobatur*
C	Icke godkänd	unsatisfactory	*improbatur*

1.4.7 How the letters were organized

Chapter 2 is about letters to Marcel Riez arranged in alphabetical order and, for each individual author, arranged in chronological order using the Swedish alphabet (see section below). A letter has the structure

Letter L M D, Y

where L = locus (where the letter is dated); M = month; Y= year.

Here name of months are cut down to the three first letter. Thus we write Jan, Feb, Mar, ...

This, of course, cannot be kept rigorously. The addressee is usually Marcel Riesz, but he is not in one fixed place, so it is of interest to tell where he is:

Example "in Princeton".

Chapter 2 is devoted to drafts of letters by Riesz which are arranged in chronological order.

1.4.8 Ordering of the Swedish Alphabet system[15]

abcdefghijklmnopqrstuvwxyzäöä

ABCDEFGHIJKLMNOPQRATUVWXYZÄÖÅ

[15]This ordering was used by me in the Mittag-Leffler separate collection, but there it is perhaps a little bit more natural. [**?**].

In this Volume, the letters shall ordered according this order.

An *exception* is, however, the Index at the end of the book. There we use the LaTeX code \{index}. Moreover, we were forced to use AA instead of Å.

Let us also digress in those letters which do not occur in English and are equipped with diacritical marks, that is å and ö.

å. This letters is always pronounced as "o" in 'boat', but from the onset the pronounciation "a" was as in Romance languages like Italian and Spanish. Towards the end of the 15th century the pronounciation of "a" in the original Germanic idiom had changed that much that it had become disturbing. Therefore a diacritical mark was invented, which first was an "a" with a dot on the top if it, which however later was replaced by a little circle, which gives "å". As an example we can mention the German word "Nadel" 'neadle' which in Swedish is "nål". Another is "stål" ' and "Stahl" 'steel'. With access of a Swedish-German dictionary, the Reader will be able to construct any number of such examples.

The first occurence of the letter "å" in print is probably from 1526, when the New Testament was translated into Swedish; the entire Bible appeared in 1541.

ä and **ö** are called 'umlauts'. They are suitable variations of "a" and "o".

1.4.9 Other Abbreviations Used

Swedish

```
  dvs = \mbox{d. v. s.};
 ex = exempel (example);
 förf = författare (author);
 fö = \mbox{f. ö.};
 mao = \mbox{m. a. o.};
 osv = \mbox{o. s. v.} ;
red =red.;
s =  \mbox{sid.} ;
```

English

```
abr = abbreviation

p = page
```

1.5 Acknowledgements

Our thanks go to numerous family members, friends, colleagues, and others (secretaries and librarians) who unselfishly assisted us in our work. Among these are the following:

- Heinrich Begehr
- Christer Bennewitz
- Christian Bergh
- Lennart Börjesson
- Tomas Cramér
- Stig-Arne Ekhall
- Miroslav Engliš
- Hans Feichtinger
- Håkan Hedenmalm
- Lars Hörmander
- János (John, Jean) Hórvath
- Peter Jagers
- Eila Ritva Jansson-Peetre born Ilonen
- Dimitry Khavinson
- Jan Lanke
- Birgitta Lindholm
- Julia Lindqvist
- Peter Lindqvist
- Anders Martin-Löf
- Kjell A. Modéer
- Hans Riesel

- Ilona Riesz
- Margit Riesz-Pleijel
- Harold Shapiro
- Julia Simon
- Jan Svartvik
- Péter Gábor Szabó
- Bengt Werner
- Ulla von Wowern
- Britt Sofi Zethson

Chapter 2

Letters to Marcel Riesz

We begin by giving an example of Swedish inventiveness.

Translation (of the last paragraph):

The Malmö-based company Addo is supposed to have been founded by a dentist called Agrell in 1917. He used to make machines more or less as a hobby. The picture at the top of the page shows the first Addo model which was operated by moving cogs and the help of a peg. Its size was roughly that eightes mobile phone – and in its days was perhaps equally indispensable.

2.1 Göran Agrell

2.1.1 Letter Malmö 18 Feb 1946

Malmö 18 februari 1946,

Aktiebolaget Addo
Direktionen

Professor Marcel Riesz
Kävlingevägen 1
Lund

Ärade Broder !

Jag översänder härmed en insamlingslista på vilken även ditt namn figurerar. För detta nöje hade jag tänkt, att Du skulle få påteckna densamma ett belopp, vars storlek bör vara en kompromiss mellan Ditt goda hjärta och Din plånbok. Givetvis vore jag



ADDO

ADDO CALCULATORS

Although there were typewriters built under the Addo stencil name, this Swedish company is best known for its adding machines. The Addo company was founded in 1917 and also manufactured cash registers and accounting machines. In the 1960s, the Addo company became part of the Facit concern.

Illustrated here is a very early 'pocket calculator', an early table model, the Model 8 with full keyboard which was introduced in 1926, and three color varieties of the once-ubiquitous Addo-X. The 'X', by the way, stands for 'ten' (Roman numeral X) as it, at the time of its introduction in 1935, was the first Addo with ten keys.

Malmöföretaget Addo, skall enligt uppgift ha grundats 1917 av en tandläkare Agrell med maskintillverkningen mer eller mindre som hobby. Bilden överst på sidan föreställer den första Addomodellen som manövrerades genom att flytta kuggar med en pinne. Storlek ungefär som en äldre mobiltelefon - och kanske lika oumbärlig för sin tid?

Figure 2.1: An advertisment from the Addo Company

tacksam, om Du även ville gå på Löfstedt med samma ärende. En annan av mig förhandsbearbetad möjlig givare är professor Sven Larsson, som jag häromdagen träffade i Stockholm. Kunde Du intressera några andra av Din kolleger, vore jag naturligtvis mycket tacksam. Beträffande aktionen i övrigt, är att märka, att en första bilkollon kommer att avgå i mars månad, och att jag själv antagligen kommer att medfölja denna.

Med hjärtligaste hälsningar Din tillgivne Göran Agrell

"Bocsánat a helyesírási hibákért (Sorry about the spelling mistakes!)[1]

Translation

Honoured Brother[2], I am sending you a subscription list where your name also appears. For this pleasure, I had that you write an amount on it, the size of which ought to be a compromise between a generous heart and your wallet. Of course, I would be most grateful to you if you could go to Löfstedt on the same errand. Another possible donator, earlier introduced by me, is Professor Sven Larsson, whom I met the other day in Stockholm. If you could also get some of your colleagues interested in this, I would certainly be very glad. As regards business, the first convoy of motor vehicles will leave in March, and I myself will probably go along with it,

Yours faithfully Göran Agrell

2.2 Lars Ahlfors[3]

[1]This Hungarian sentence was courteously translated by Péter Szabó. He suggested that it may have been written by a woman and the wife of Agrell might have been Hungarian. This eventually turned out to be true.

[2]In the time described in this Volume academically trained men (there were very few academically trained women!) often adressed each other as Broder (Swedish, Brother). Also the formula Bäste Broder (Swedish, Best Brother) was used, an often abreviated as B.B.

[3]Lars Valerian Ahlfors (1907 - 1996), Finnish mathematician, studied at Helsinki University under Lindelöf and Nevanlinna 1924-1928. He presented his doctoral thesis in 1930, then in the next two years he made a number of visits to Paris and other European mathematical centres. In 1935, Caratheodory, whom Ahlfors had met in Munich during his travels, recommended him for a post at Harvard in the US. Ahlfors agreed to a three year trial period. In 1936 he was one of the first two recipients of a Fields Medal at the ICM in Oslo. In 1938 Ahlfors was offered a chair in mathematics at the University of Helsinki and, being rather homesick, he accepted this rather than remain permanently at Harvard. However a difficult time was approaching with World War II about to begin.

2.2.1 Letter Kungsbacka Jan 10, 1945

Prof. Marcel Riesz, Lund

Då min resa ännu icke kan gå av stapeln går jag och långleds. Kunde Du möjligen ordna med ett föredrag i Lund under någon av de närmaste veckorna. Tyvärr tillåter min ekonomi inga extra utgiter, men om Du kan erhålla pengar för resa från Göteborg och hotellkostnader så vore jag myckey intresserad av ett besök i Lund.

Din tillgivne
Lars Ahlfors.

Translation:

As my journey cannot yet take place, I feel quite bored. Could you possibly arrange a talk in Lund in one of the following weeks. Regretfully, my finances do not allow any additional expenses, but if you can get some money for the trip from Göteborg and the hotel expenses I would be very interested in a visit to Lund.

Yours faithfully,
Lars Ahlfors.

2.3 Walter Ahrnfeldt

2.3.1 Letter Köping May 1926

Doktor Walter Ahrnfeldt Köping 22/5 26.
Köping
Mottagn. 9.30.12
Telefon 33

The war caused severe problems in Finland and the universities were closed. Ahlfors's family was evacuated to Sweden during the war and so, when he was offered a chair in Zurich in 1944, it seemed a good chance for him, to be reunited with his family. He met up his family in Sweden, where Beurling gave them a great deal of help and friendship, but the war made a trip to Switzerland practically impossible. A flight from Stockholm to Prestwick in Scotland was arranged and, in March 1945, they made the trip. An offer from Harvard in 1946 was accepted and, this time, he remained there until his retirement in 1977. [110].

[4]Walter Ahrnfeldt (1888-1969), physician, studied medicin in Stockholm, med. kand. 1916, med. lic. 1922. Practiced medicine at Köping since 1924. According to an obituary, he was "a jovial person with a great interest in arts and history, and an Odd Fellow since many years".

Bäste Broder!

Jag såg härom dagen i bladet att Du erhållit professur och ber jag Dig i detta sammanhang emottaga mina hjärtliga gratulation. Huru Du kommer att trifvas i Lund kan jag dock svårt att tänka mig om icke kärleken till Köpenhamn i någon mån kan neutralisera småstadsidyllen. Kommer Du någon gång till mina trakter är Du hjärtligt välkommen.

De hjärtligaste hälsningar!
vännen Walter Ahrnfeldt.

Dear Brother!

The other day, I saw in the newspaper that you got the professorship and so I am asking you to receive my heartist gratulations. How you are coming to like it in Lund, I have to imagine if not your love for Copenhagen somewhat will neutralize the idyll of a small town. If you where come to my neighborhood one day, you are aways heartily welcome.

My heartist greetings!
Your friend Walter Ahrnfeldt.

2.4 Axel Arwin[5]

2.4.1 Letter Sundbyberg Dec 12 1916

Herr Docent!

Härmed det ändrade manusskriptet. Jag vore Er tacksam, om Ni ville påtaga Er besväret att se igenom allt sammans samt göra de förbättringar så väl språkliga som andra, hvilka Ni anser behövliga, och hvilka, som jag hoppas, endast beröra oväsentligheter, direkt i manuskriptet samt därpå fortskaffa det till prof. Bendixson. Efter allt arbete är Ni ju den mest kompetente, och vore jag Er tacksam, om jag finge honorera Er för allt ofverarbete, som Ni kommit att nedlägga på denna min uppsats. Jag ringer upp Er fredag eller lördag före middag för att efterhöra, hvad Ni slutgiltigt har att säga.

Med utmärkt högaktning A. Arwin

[5]Axel Arwin (1879-1935), Swedish mathematician, first studiedt at LU, later at KTH (no exam), after at UU, and, finally at LU. He defended his Ph.D at LU in 1914. He has *in toto* 23 papers listed in JFM. Most of them deal with algebraic or number theoretic questions, but there are two involving the Riemann zeta function. They are usually reviewed by well-known mathematicians like Artin and Szegö.

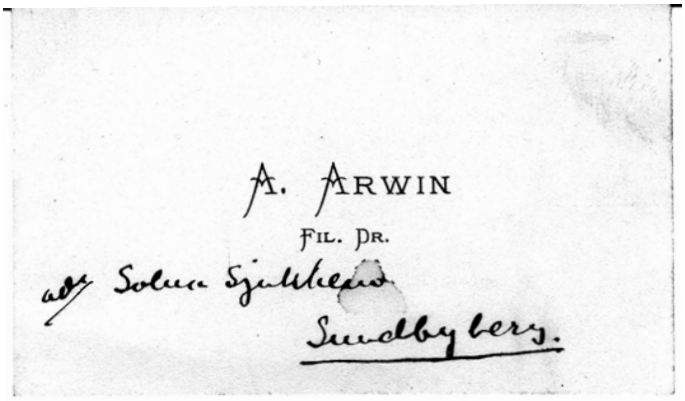


Figure 2.2: Card of Dr A. Arwin

Translation:

Dear Docent,

Here is the revised manuscript. I would be grateful to you if you would take the trouble to look through everything, making any improvements – linguistic, as well as others which you consider necessary, and which – as I do hope – only concern unessential matters, directly in the manuscript and then you can pass it on to prof. Bendixson. Having done all work, you are certainly the mest competent, and I would be obliged to you if I could pay you for all the supplementary work that you are going to devote to this my paper. I shall call you on Friday or Saturday before noon to find out your final decision on this matter.

Sincerely yours A. Arwin

2.4.2 Letter Sundbyberg Apr 13 1917

Docent Riesz! Jag vill gärna höra matematiska föreningens föredrag, varför Ni kan vara vänlig att skicka mig kort, då tid blifver. – Jag hoppas, att Ni lämnat kedjebråken till Prof. Bendixson. Hälsn.

A. Arwin

Translation:

Dear Docent Riesz, I would very much like to listen to lectures in the Mathematical Society, so I ask you to kindly send me a card telling me when it will take place. – I do hope that you have given the continued fractions to Prof. Bendixson. Regards.

A. Arwin

2.4.3 Letter to I.O. Bendixon Lund Mar 26 1917

Herr Professor Bendixon!

Jag sänder Er härmed ett slags fortsättning på min förra uppsats: "Über Kettenbrüche" och beder Er godhetsfullt genomse också denna.

Med utmärkt högaktning A. Arwin

Translation:

Dear Mr. Professor Bendixon, I hereby send you a kind of continuation of my previous paper [7][6] and ask you to kindly read through this as well.

Sincerely yours, A. Arwin

2.4.4 Letter Sundbyberg Apr 13 1917

Doc. Riesz!

Jag ville gärna höra föreningens föredrag, varför Ni kan vara vänlig att skicka mig kort, då tid blifver. – Jag hoppas, att Ni lämnat kedjebråken till Prof. Bendixson. Hälsn.

A. Arwin

Translation:

Dear Docent Riesz, I would very much like to listen to lectures in the Mathematical Society, so I ask you to kindly send me a card, telling me when it will take place. – I do hope that you have sent the continued fractions to Prof. Bendixson.

Regards, A. Arwin

2.4.5 Letter Sundbyberg Aug 28 1917

Herr Docent Riesz!

Jag tager mig friheten tillskrifva Er i följande sak. Får man göra följande slutsats? En reell kontinuerlig funktion $f(x_0, y)$ i y tager på linien $x = x_0$ *oändligt ofta* konstant värde, alltså måste till följd af kontinuiteten [af] $f(x_0, y)$ på denna linie öfver allt hafva en storhetsordning, som ej öfverskrider ett ändligt värde? Ni kan ????? med ett par ord tillskrifva mig därom, då

[6]Probably Part I.

Ni funderat på saken. – Jag kommer antagligen hela hösten att vara här i Sundbyberg och vill därför gärna besöka sammankomsterna, om matematiska föreningen föranstaltar.

A. Arwin Sundbyberg

Translation:

Dear Docent Riesz, I take the liberty to write to you in the following matter. Is it possible to make the following conclusion? A real continuous function $f(x_0, y)$ in y assumes on the line $x = x_0$ a constant value infinitely often, so, in view of the continuity [of] $f(x_0, y)$, it must on this line everywhere have a magnitude which does not exceed a finite value? You may write a few words about this, when you have thought through the matter. – I will probably stay here in Sundbyberg the whole fall, and therefore I would like to attend the meetings arranged by the Mathematical Society.

Sincerely Yours
A. Arwin

2.4.6 Letter Nådhammar Oct 2 1917

Herr Docent Riesz!

Jag har sökt Er pr. Telefon Rt. 8642, men ej fått något svar, hvarför jag förmodar, att det är endast vissa *tider*, som Ni är anträffbar?Jag vill möjligen veta, hur Ni förfarit med mina båda afhandlingar: om Ni öfverlämnat den ena till prof. Bendixson, så att den möjligen kunde inflyta i *Arkiv etc.* efter sammanträdet, som Vetenskapsakademiens ledamöter hålla den 10 oktober; samt om Ni börjat läsningen af den andra? [7]

Eder förbundne A. Arwin

Translation:

Dear Prof. Riesz, I tried to contact you by phone Rt. 8642, but I did not get any answer, so I presume that you are available only at certain *times*?Might I learn how you have got on with my two memoars: Have you passed one of them to Professor Bendixson, so that it could possibly appear in the *Arkiv* after the meeting of the members of the KVA on 10 October? And have you started reading the other yet? [7]

Sincerely yours, A. Arwin

2.5 Gaston Backman[6]

2.5.1 Letter Lund Apr 18, 1943

Broder,

Jag tackar Dig mycket för det angenäma samtalet sist på Fysiografiska Sällskapet och för Din stora vänlighet att sända mig läroboken öfver variationsräkning. Lite kände jag ju till förut, men ville gärna orientera mig bättre. Jag är djupt generad om jag nu likväl vänder mig till Dig med en vänlig anhållan om hjälp i en liten sak, därest Du har tid och lust. Saken är den, att jag använder mig af den logaritmiska sannolikhetsintegralen för beräkning av växandet hos olika organismer. Därvid har jag funnit att den huvudsakliga växten under lifvet ger en växtkurva af typ 1, däremot icke varken typ 2 eller typ 3. Ju mer växtkurvan buktar ut mot vänster resp. åt höger desto längre blir den och någonstans däremellan borde, tycker jag, växtkurvan ha sin kortaste längd. Med $t_{0,5}$ menar jag den tid, då halva ändvärdet uppnåtts och med t_d den tid, då organismerna dö. Denna senare tid har visat sig vara den då $95,84$ % af ändvärdet, asymptoten uppnåtts. Min fråga är den, vid fasthållande af t_d såsom konstant, vilket värde relativt till t_d skall då $t_{0,5}$ ha för att kurvan från $t = 0$ till $t = t_d$ skall blifva den kortast möjliga. Min funktion är

$$\begin{aligned} y &= \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx = \int_0^t \frac{c_1 \log c}{t} \cdot e^{-x^2} \cdot dt \\ x &= c_1 \log t + c_2 \\ \sqrt{3/2} &= c_1 \log t_d + c_2 \\ 0 &= c_1 \log t_{0,5} + c_2. \end{aligned}$$

Du skulle göra mig mycken glädje om Du kunde finna någon tid att intressera Dig för min fråga, eller Du har någon student, som kunde titta på saken. I förhoppning, att Du icke tycker illa vara, att jag besvärar Dig med mitt lilla problem, hälsar jag Dig hjärtligen och tecknar

Yours faithfully Gaston Backman

Translation

[7]Gaston Backman (1883964), anatomist, professor at Riga from 19205, LU 19338. He published scientific articles in anatomy, anthropology and eugenics.

Dear Colleague, I thank you you very much for our recent pleasant conversation at the [meeting of] the LFS and for you kindly sending me the text-book on the Calculus of Variations. I knew a little before, but I would like to get better oriented. I feel deeply ashamed when I now still turn myself to you with a friendly request of help in a small matter, provided you have the time and inclination. It is the following, I am using the logarithmic probability integral for the computation of the growth of various organisms. For this I have found that the main growth of the plant during its life time gives a growth curve of type 1, but not of type 2 or type 3. The more the growth curve bends out to the left resp. to the right the longer will it be, and somewhere in between, I believe, the growth curve ought to have its shortest length. Here $t_{0,5}$ means the time when the half of the final value is reached and t_d means the time when the organisms die. This last time has turned out to be $95,84$ % of the final value, when it reaches its the asymptotic value. No my question is the following, keeping t_d constant, whicht value relative to t_d must $t_{0,5}$ have in order that the curve from $t = 0$ to $t = t_d$ is shortear as possible? My function is

$$\begin{array}{ll} y & = \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx = \displaystyle\int_0^t \frac{c_1 \log c}{t} \cdot e^{-x^2} \cdot dt \\ x & = c_1 \log t + c_2 \\ \sqrt{3/2} & = c_1 \log t_d + c_2 \\ 0 & = c_1 \log t_{0,5} + c_2. \end{array}$$

I would be most glad if you could find some time to think about my question – or do you have a student who might want to look into it? Hoping that you do not hate my bothering you with my little problem, I will finish now,

Yours truly
Gaston Backman

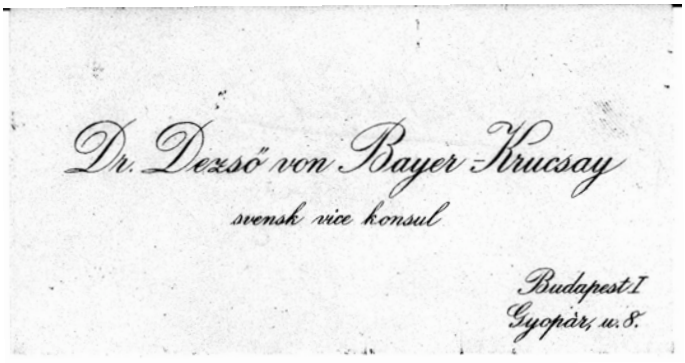


Figure 2.3: Card of Swedish Vice Consul in Budapest Dezsö von Bayer-Krucsay

2.6 Dezsö von Bayer-Krucsay[8]

2.7 Curt Ragnar Benckert[9]

2.7.1 Letter Österskär 14 Dec 1939

Herr Professor M. Riesz.

B.B.

Ditt samtal med mig gladde mig mycket. Om Du tycker uppsatsen om diofantiska likheter kunde blifva en god anmärkning i någon publikation, så skulle det bereda mig mycken glädje att få in den i samma publikation som den uppsats, jag ber att få tillägna Dig. Det är för mig af största betydelse att kunna få någon bekräftelse af Dig om uppsatsens värde, emedan jag just i dagarna söker en plats, där det är af vikt att visa att 52-åringns hjärna inte

[8]Dezsö von Bayer-Krucsay (1874-1944 in Budapest), son of the dispensing chemist Arnold Bayer; in 1902, the son founded the chemical-technical firm Bayer & Company and was its single owner in 1917. He was also a doctor of pharmacology and had pursued business studies abroad. At the outbreak of war in 1914 he and his wife were on a yacht in England and, as Hungarian citizens, were interned there. However, on word of honour they were allowed to depart for Sweden – on condition that they did not return home prior to the end of the war. He lived then with his family in Sweden and Norway. and gained a Swedish citizenship, but returned to Hungary in 1919. In 1910 he became Swedish vice concul and from 1923 possessor of the freshly founded general consulate in Budapest, but left this position in 1938 when the representation was disbanded. In 1907 he built a beautiful house on Gellért-hegy (Mount Gellért, outside Budapest), which contains costly articles of art, also by Swedes. SvD.

[9]Curt Ragnar Benckert (b. 1887), Swedish mathematician and actuarian.

är totalt utbrunnen.

Tack vare Ditt samtal har jag lyckats omformulera (och utvidga) mitt påstående om Prof. Nagells problem. Ditt yttrande, följdt af ett gladt leende, att man inte enbart skrifver för att förf. skall njuta utan äfven att läsaren skall ha någon glädje, har hela tiden stått med eldskrift framför mig. Hjärtligt tack. Nu tycker jag teoremet fått en sådan framställning, att jag kan delgifva andra.

Med hjärtlig hälsning och med hopp om ett snabbt svar tecknat jag mig

Med utmärkt högaktnig
Din tillgifne
Curt R. Benckert

Translation

Dear Brother, I was very glad of my conversation with you. If you think that the paper about Diophantine equations could be a good remark in some publication, it would give me a lot of pleasure to have it in the same paper, I would like to dedicate to you. Hence it is of great importance to me to get an affirmation from you concerning the paper's value, as right now, I am applying for a position, where it is of importance to show that the brain of a 52 year old man is not totally burnt out.

Thanks to your conversation I have been able to reformulate (and extend) my statement about Prof. Nagell's problem. Your remark, along with a contented smile, which tells me that one does not write in order that the author may enjoy it, but that also the reader can have *some* joy, has always been in letters of fire in front of me. Many thanks. I believe now that the theorem is in such a shape that I can communicate it to others.

With hearty greetings and hoping for a quick answer I remain

Sincerely yours, Curt R. Benckert

Remark 1 *The envelope containing this letter also included a manuscript, probably an outline of [11]. A separate of the previous paper [10] is included as well.*

2.7.2 Stockholm 19 Apr 1943.

Herr Professor Marcel Riesz.

B.B.

Beder härmed att få översända två exemplar av uppsatsen, originalet och en avskrift. Hoppas, att Du kommer i kontakt med Carleman och att det

hela får ett lyckligt slut. Med hjärtligaste tack för all hjälp tecknar jag mig med hjärtlig hälsning

Din tillgivne
Curt R. Benckert

Translation:

Dear Brother, May I submit two copies of my paper, the original and a transcript. I do hope that you can contact with Carleman and that the whole matter shall have a happy end. My heartiest thanks for your help

Sincerely yours, Curt R. Benckert

2.8 Ivar Otto Bendixson[10]

2.8.1 Postcard May 30, 1914

Stockholm d. 30 maj 1914

Broder!

Jag förutsätter att du vill vara kvar som amanuens äfven under höstterminen, då du ej sagt något annat och som det då lämpligast att föreläsa öfver equations theorie, den kurs som erfordras omfattande äfven algebra i den mån detta kan fullständigt genomföras under terminen.

Jag vore dig tacksam om du ville stå till min disposition på Fredagen d. 5^{te} Juni då jag har tentamina i lärosal No 3 kl. 11-4 samt äfven hjälpa med rättning af skrifningarna.

din tillgifne I. Bendixson

Obs! Dagbok öfver dina föreläsningar!!

Translation:

[10]Ivar Otto Bendixson (1861-1935). Swedish mathematician, fil.dr. h.c. Uppsala 2007, professor at KTH from 1900-1905 and at SH from 1905-1927, and the latter school's rector from 1911-1927. Bendixon was a pupil of Gösta Mittag-Leffler and is mainly known for his work on pointsets (the Cantor-Bendixon theorem etc). He also occupied himself with ordinary differential equations, studying integral curves and singularities. [52], [61].

Dear Marcel, I take it for granted that you want to remain as an amanuensis even during the automn term, as you have not said otherwise and that it then would be convenient to give a course on equation theory, including also algebra, to the extent this could be carried out completely during the term.

I would be grateful to you if you could be at my disposal on Friday, June 5 when I have exams in Lecture Room No 3 between 11 and 4 o'clock. I also need your help with correcting the written tests.

Sincerely yours, I. Bendixson

Please keep a diary of your lectures!!

2.8.2 Letter Saltsjöbaden, Aug, 26, 1916

Grand Hôtel Anglais Saltsjöbaden den 26 Aug. 1916

Broder Riesz

Jag har en liten middag på Onsdag d. 30 å Hotel Anglais kl. 7.30 och det skulle vara mig och min fru kärt, om du och din bror ville göra oss det nöjet att komma.

Jag ber dej hälsa din bror och slipper på så sätt att därför skicka inbjudningsbref till honom.

Välkomna således

Din Tillgifne

Ivar Bendixon

Translation

I shall have a small dinner on Wednesday the 30th at the Hotel Anglais at 7.30 pm. My wife and I would be happy, if you and your brother would take the pleasure to come.

I ask to give my regards to your brother. In this way I avoid the need to send a letter of invitation to him.

Thus be welcome.

Yours faithfully, Ivar Bendixon

x

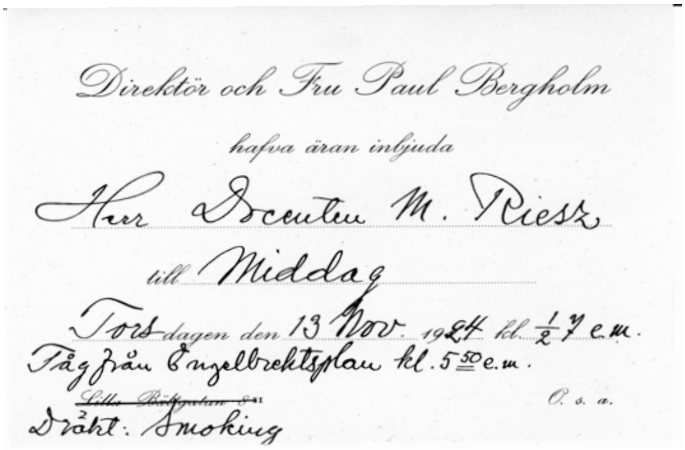


Figure 2.4: Invitation

2.9 Paul Bergholm[11]

2.9.1 Invitation to dinner Nov 1924, postal stamp says 6.11.24

2.9.2 Xmas and New Year Greetings, 1937-1938

2.9.3 Xmas and New Year Greetings 1937-1938

Remark 2 *The following item was found in the Collection with a card of Paul Bergholm attached to it. It is possible that Bergholm sent it to Riesz. It is a tribute of respect to an insurance company on the occasion of its 25th anniversary. Filip Lundberg (1876-1965) was a mathematician and an actuarian [114] He should not be confused with Erik Lundberg [125].*

2.9.4 Dr F. Lundberg's address of praise on the occasion of the 25th jubilee of SPP 17 Jun 1942

Svenska livförsäkringsbolags Förening frambär genom mig sin hyllning vid dagens jubileum. Det är en sed att ära dem, som lyckats i sin gärning. Den mäktiga omfattning som Svenska Personal-Pensionskassan vunnit under sin

[11] Paul Bergholm (1883-1957), worked in the insurance business, he was also active in the "Nationalföreningen mot emigratiion" (National Society against emigration), and was elected secretary in 1917.

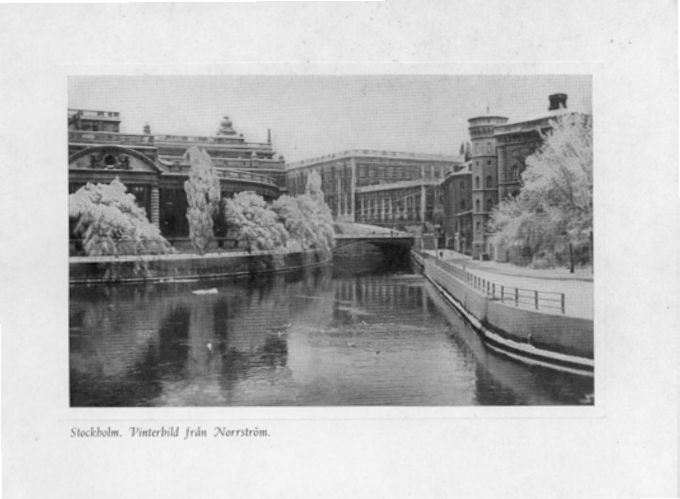


Figure 2.5: Stockholm, Winter view of Norrström

25-åriga verksamhet och de ekonomiska resultaten av denna verksamhet bevisa att man lyckats infria även mycket högt ställda förväntningar. Inte mindre vältaligt omvittnas framgången av det sällsynta förtroende, med vilken kassans verksamhet omfattas av såväl arbetsgivarnas som tjänstemännens organisationer.

Minnesskriften uppvisar, att den inom svensk privatförsäkring fullkomligt enastående framgången vunnits genom klok och målmedveten ledning under hårt arbete, ja stundom under kamp för kassans idéer och program.

Vi försäkringsmän, skulle jag tro, kunna bättre än de, vilka endast se och imponeras av de uppnådda resultaten, värdesätta det verk, som kassans ledning utfört. Fackmannen fäster sig vid de andra uppgifter, som mått, då det gällt att vinna tillslutning, att finna formen för administrationen, att utbygga kassans försäkrinsteknik, att finna en räntabel och på samma gång betryggande investering av det hastigt växande kapitalet, samt att fortlöpande analysera verksamhetens ekonomi. Vi skänka de ledande personerna inom kassan vår uppriktiga beundran för det sätt, varpå svåra uppgifter blivit lösta.

Trots de utomordentliga resultat – både i vad som är uppenbart för envar och beträffande av vad som endast observeras av de fackkunniga – torde uppgifterna för ledning knappast bliva mindre påfrestande under kommande år än de varit under de nu tilländalupna. Pensioneringens organisation och innehåll måste göra beroende av samhällsförhållandena. Bristande stabilitet hos penningvärdet och den fortskridande starka förskjutningen i befolknings

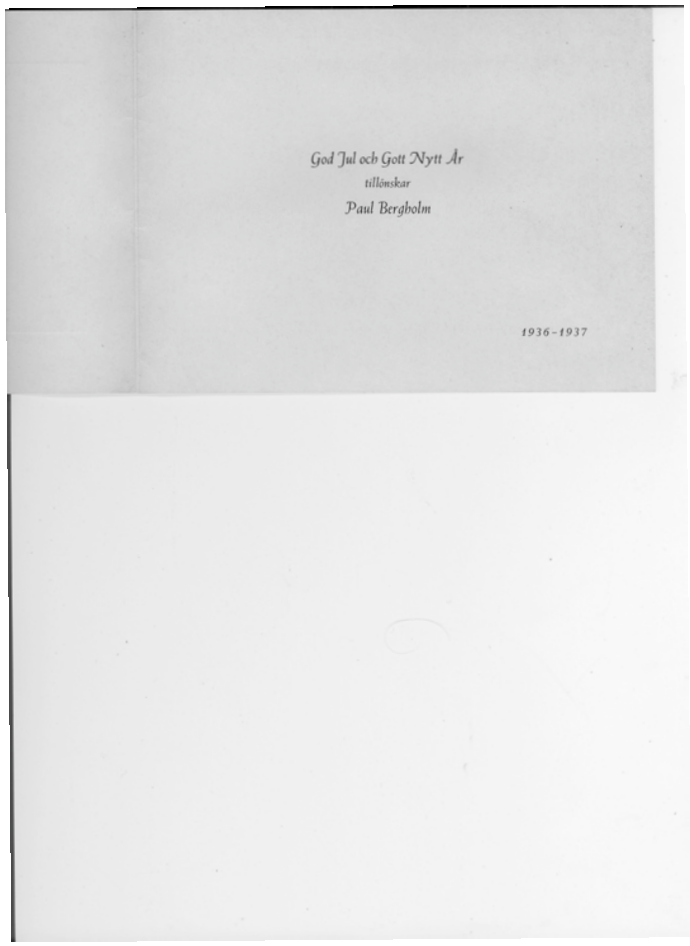


Figure 2.6: Xmas and New Year Greetings 1936-1937



Figure 2.7: Stockholm. View from Strandvägen 5B

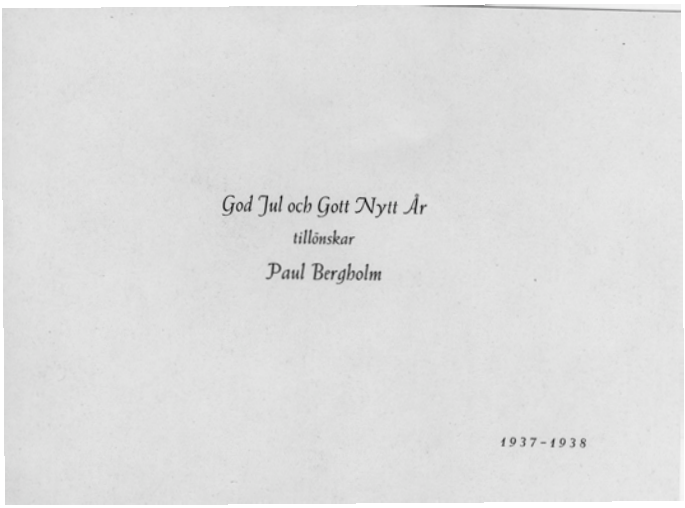


Figure 2.8: Xmas and New Year Greetings, 1936-1937

åldersstruktur äro faktorer, av djupt ingripande betydelse, som börja göra sig påminda. Därtill kommer osäkerheten om hela vårt samhälles ekonomi. Den allmänna fattigdom, som följer krigets förödelse, torde komma att tvinga oss att under lång tid framåt sätta ned våra anspråk på levnadsstandarden, något som måhända icke heller kan lämna pensionsförsäkringarna orörda. Det är under sådana förhållanden löftesrikt att det inom den inom pensionsförsäkringen ledande institutionen, Svenska Personal-Pensionskassan, är ett enskilt företag med förmåga till god och snabb anpassning och att kassan äger en framsynt styrelse, som till fullo, beaktat, att de ledande posterna måste beklädas av de yppersta krafter, som över huvud stått att förvärva.

Med dessa ord vill jag å svenska svenska livförsäkringsbolagens vägnar tillönska kassan fortsatt framgång till gagn för all dess verksamhet berörda, ja, för hela vårt svenska samhälle.



Figure 2.9: A card from Paul Bergholm

Translation:

The Swedish Society of Insurance Companies sends through me its praise at today's anniversary. It is customary to honour those who have success in their action. The amazing extent that the "Svenska Personal-Pensionskassan" (Swedish Personal-Pension Company, SPP) has grown during its 25 years of activuty and its financial results prove that one can succeed in fulfilling even very high expectations. No less eloquently is this success witnessed by the rare confidence with which the company's work is embraced both by the organizations of the employers and those of its employees. The Memorial Publication

shows that this, within Swedish private insurance quite unique success, has been achieved by wise and careful guidance with hard work, indeed sometimes during a fight for the company's ideas and policies.

We, the insurance people, who, I would believe, know better than those, who only see and are impressed by the results achieved, value what the company has accomplished so far. The expert pays attention to other information, as a measure, when it is about gaining support, finding the form of administration for developing the technique for finding a profitable and the same time satisfactory investment of the rapidly growing capital, at the same time evaluating likewise analysing continuously the economy of the activity. We offer the leading persons in the company our sincere admiration for the way, how this difficult task has been solved.

Despite the extraordinary result – both in what is obvious to everybody and regarding that what can be observed only by specialists – the company's responsibulities will not be any easier for its management in the years to come than those during the past three decades. The insurance organization and content must be done in line of the conditions of society. A lack of stability of our currency and the further displacement in the population's age structure are factors of profound inner importance are beginning to taken notice of. To this we must add the economic uncertainty of our country. The general state of poverty, which always follows the destruction of war, will probably force us, over a long period of time, to lower our standard of living expectation, somethimg that perhaps also cannot leave the pension insurance untouched. In such circumstances it is fortunate that the leading institution within the life insurance sector, the SPP, is a private company with the ability to adapt quickly and well, and that the company has a far-seeing management, which has taken into account the fact that the leading positions must be occupied by the best talents that can be found.

With these words I wish the SPP, on behalf of the Swedish Society of Insurance Companies, continued success for the benefit of all involved in its activities, yes, for the whole of Sweden as well.

2.10 Viktor Bergström [12]

[12] Viktor Bergström (1905-1978), Swedish mathematician, studied at LU under Marcel Riesz and defended his Ph.D. [13] in 1935. (Indeed, Riesz was of a very good opinion of Bergström, and counted him among his best students.) For a while he was a docent at the university and taught later at various secondary schools, including the Göteborg Teacher College – his very last employment. This Section contains also the proofs of the author's paper [12], but will not be reproduced here.

2.10.1 Postcard Hamburg May 11, 1930

Hamburg 11/4 1930

Herr professor!

Jag har varit i Hamburg omkr. en vecka och börjat komma något in i de nya förhållandena. Jag har haft ett par minuters samtal med Blaschke i förrgår; han visade sig rätt intresserad av mina småsaker och hade mig till att lova hålla ett seminarieföredrag över mitt bevis av Steinitz' sats[12] tisdagen d. 20 maj. Jag undrar, om Professorn icke har några av mina papper över ämnet? Om Professorn fortfarande är i staden, så kanske Professorn skulle vilja sända mig dem? Kanske kan jag även få Hössjers bevis av gränsen $\sqrt{2}$, så vore jag naturligtvis desto mer tacksam. Naturligtvis är det ingen tvingande nödvändighet; jag kan ju lätt rekonstruera sakerna, men det vore bekvämare för mig. Min adress är V. Bergström, bei N. Reich, Bornstr. 28, Hamburg.

Viktor Bergström

Translation:

Dear Professor, I have been in Hamburg for about a week now and I am beginning to get used to my new conditions. Yesterday I spoke to Blaschke for a few minutes; he turned ot to be rather interested in my humble results and made me promise to give seminar talk about my proof of the theorem of Steinitz[12] on Tuesday the 20th of May. Do you by chance, Professor, have some of my manuscripts on this subject? If you are still in town, Professor, could you be as kind as to send them to me? If I could also get Hössjer's proof of the limit $\sqrt{2}$, I would of course be even more grateful. This is, of course, not absolutely necessary; I can certainly reconstruct everything, but it would be somewhat simpler for me. My address is V. Bergström, c/o N. Reich, Bornstr. 28, Hamburg.

Viktor Bergström

2.10.2 Postcard Hamburg Jul 8, 1930

Käre Professor!

Jag reser i morgon på en liten fransysk visit till Sverige och skulle då gärna vilja tala med Professorn. Professorn skulle ju kunna bestämma någon tid; preliminårt hade jag tänkt mig t.ex. fredag kl. 4. Om denna tid ej passar, skulle ju Professorn kunna meddela detta under min Hälsingborgsadress: Liden 85, tel. 3538. Varje dag kommer att passa mig.

Viktor Bergström.l

Translation:

Dear Professor, Tomorrow I shall make a little flying visit to Sweden, and then I would like to talk to you a little with you, Professor. We could fix a suitable time, preliminarily I have thought of, say, Friday at 4 o'clock. If this is not convenient, please let me know under my address in Hälsingborg: Liden 85, phone 3538. Every time will suit me,

Yours faithfully Viktor Bergström.

2.10.3 Postcard Hamburg Jul 19, 1930

Herr professor!

Har något närmare bestämts rörande de saker, som vi talade om? Jag har nämligen här ett anbud om plats vid Kristianstads Läroverk, vilket omgående måste besvaras. Avböjer jag, har jag bränt mina skepp, då därmed automatiskt alla mina ansökningar annuleras.

Högaktningsfullt

Viktor Bergström

Translation:

Dear Professor, Has anything more definite been decided regarding the things we spoke of? Namely, I have been offered a job at the secondary school in Kristianstad, which I should reply to at once. If I decline, I have burnt my boats, because then all my applications will automatically be cancelled .

Yours faithfully, Viktor Bergström

2.10.4 Letter Lund Apr 10, 1931

Herr professor!

Jag har fått en liten otrevligt sjukdom på halsen med det lustiga namnet "Bang". Den är sällsynt bland männuiskor, egentligen en kreatursjukdom. Det enda obehag den medför är en egendomlig oscillerande feber. På några dagar stiger temperaturen till närmare 40°, håller sig däromkring en vecka (max. temp. = 40.2) och sjunker sedan. Det otrevliga är att sedan börjar efter någon tid, t.ex. ett par dagar, samma historia igen. Detta kan hålla på

ett par månader. Dödsrisken är liten. Någon egentlig behandling, som kan kallas effektiv, har man inte. Febern lämnar en mycket opåverkad, normal ordentlig sömn, inga yrselföreställningar el. dyl. Temperaturen är nu på nedgående på mig (38.2 kvällstemp.) efter periodn n:r 2; jag var uppe ett tag och höll ett par föreläsningar. Jag ligger numera på Epidemisjukhuset, där jag har det lugnt och bra. Jag kunde också fått vara hemma, och överhuvud är det tvivelaktigt, om det hjälper att ligga. Jag skulle möjligen kunna hålla mina föreläsningar, men det är ju inget nöje att prata med 40° feber, om den, som den antagligen gör kom igen. Nyttigast vore kanske, om jag vilade mig här en tid, och i varje fall nästa vecka vore bäst att tillbringa här. Men om professorn mycket gärna vill det, så vore det nog fysiskt möjligt att föreläsa på måndag. Det lugnaste vore kanske, att jag fick ligga här en del av veckan till under observation och tog min hand från kursen. Jag har gått igenom komplexa tal, serier och funktioner av flera variabler t.o.m. Taylors serier till max. och min. Professorn kan ju ringa hit till min avdelning och be att få tala med mig eller sköterskan, så kunde jag få veta Professorns synpunkter. Jag ringde idag vid 5 tiden, men Professorn var icke hemma. Jag har förlorat hittills 4 föreläsningstimmar (heltimmar).

Högaktningsfullt

Viktor Bergström

Translation:

Dear Professor, I have got a slightly unpleasant malady in my throat with the funny name “bang”. It is rare among humans, it is really a cattle infection. Its only incovenience is a strange oscillating fever. For a few days one’s temperature rises to nearly 40°, stays there around a week (max. temp. = 40.2) and drops then. The unpleasant thing is that after some time, such as a couple of days, the same story starts all over again. This can go on for months. The risk of mortality is minor. One does not know any real cure for it, which could be called effective. The fever leaves you rather uninfluenced, normal orderly sleep, no feeling of dizziness or such. The temperature is now down (38.2 in the evening) after period no. 2; I was on my feet for a while and gave some lectures. I am now at the isolation hospital, where it is quet and I feel well. I could also have stayed at home, and it is doubtful, if it helps to lie down. I could possibly give my lectures, but it is no pleasure to talk when you have a fever of 40°, if it, as it probably will do, is coming back. The most useful thing woud be perhaps that I rest here some time, and at least it would be best that I stay here next week. But if you, Professor, want it very much, it might be physically possible for me to teach on Monday. But the calmest thing were perhaps that

I could lie here another part of the week under observation and that I remove my hands from the course. I have treated complex numbers, series och functions of several variables up to Taylor series, including max. and min. You could call, Professor, my ward and ask to speak to me, or the nurse, so that I could hear your point of view. I called you today by 5, but you were not at home. So far I have missed 4 lecture hours (entire hours).

Yours faithfully

Viktor Bergström

2.10.5 Postcard Ystad Dec 14, 1931

Herr professor!

Jag har talat idag med rektorn och han verkade icke vidare pigg på att släppa iväg mig, ehuru han naturligtvis icke ville stå hindrande i vägen. Dessutom har jag fått meddelande från Postsparbanken, att jag nästa år måste börja betala på Statens räntefria studielån. För min finansiering är det därför nog klokast att stanna läsåret ut. Jag tackar på det hjärtligaste för Professorns tillmötesgående och hoppas, att vi i alla fall skola få ett angenämt samarbete nästa termin. Jag hörde, att Professorn ringt till mig i söndags och jag sökte att komma i förbindelse med Professorn på kvällen. Hjärtligt tack för allt besvär. Jag är alltså mycket pigg på matematik just nu.

Viktor Bergström

Translation:

Dear Professor, Today I spoke to the Rector and he did not seem very eager to let me go, although he, of course, did not want to stop me. Moreover, I have got a message from post-office savings-bank, that next year I must begin to pay back on the State Free-of Interest Study Loan. In order to put my finances on a sound basis it is therefore probably better for me to stay the whole school year here. I thank you heartily, Professor, for your complaisance and I do hope that we, in any case, are going to have a pleasant cooperation next term. I heard that you, Professor, called me on Sunday and I tried to reach you in the evening. Hearty thanks for all trouble. Thus I am very much inclined on mathematics just now.

Viktor Bergström

2.10.6 Letter Copenhagen April 7, 1936

Köpenhamn 7/4 1936

B.B.!

Jag befinner mig på en liten utrikesresa. Jag har fullgjort min föreläsningsskyldighet för terminen, och ville därför begagna detta kanske sista tillfälle att se mig om i sydligare nejder. Mitt egentliga resmål är Spanien, där jag eventuellt tänkte cykla omkring ett par veckor, men jag stannar också ett par dagar i Paris. Med tanke på den vistelse i nordliga trakter, som ligger framför mig, kan det vara skönt att dessförinnan ha samlat intryck av annan art. Jag kommer tillbaka i slutet av maj, så jag hoppas att jag får tillfälle att tacka Dig för den här terminens och läsårets intressanta matematiska diskussionsämnen och höra något om det, som förekommit under min bortvaro. Överhuvud hoppas jag kunna hålla mig ajour med verksamheten i Lund även sedan jag lämnat staden, så att jag icke blir fullkomligt andligt isolerad, de år jag tillbringar i Norrland. Jag har för övrigt till min egen glädje kunna märka ett nytt spirande intresse för matematik, som vuxit till sig under årens lopp; om det kommer att bära några frukter får fram tiden utvisa.

Hjärtliga hälsningar

Viktor Bergström

Translation:

Dear Brother[13],

I am on a small journey abroad. I have fulfilled my teaching obligations for the present term, and so I wanted to use this perhaps last occasion to visit Southern neighbourhoods. My main destination is Spain, where I intend to go cycling for a couple of weeks, but I intend to stay also a few days in Paris. In view of the stay in Nordthern regions that lies in front of me, it might be agreeable before it to have collected impressions of a different kind. I'll be back at the end of May, so I do hope that I shall have the opportunity to thank you for the interesting subjects for mathematical discussion during this term and the academic year and to hear something about what has happened during my absence. In general, I do hope that I shall be able to keep myself informed of what happens in Lund, even after I have left the city, so that will not be totaly isolated spiritually, during

[13]Common formula for greeting in Sweden in older times among intimate friends, especially in academic circles.

the years I will spend in Norrland[14]. Besides, to my own great pleasure I have been able to notice a new germinating interest in mathematics, which has been growing during the course of years; if it will give rise to any fruits, future alone will show.

Hearty greetings

Viktor Bergström

2.10.7 Letter Paris Apr 11, 1936

Paris 11/4 36

P.S. Post kan nå mig antingen genom American Express avdelningskontor i Paris eller poste restante Madrid.

B.B.!

Jag har just erhållit brev från Hössjer. Jag är ledsen, att jag inte rådfrågade Dig innan jag reste, men Du var ju i Stockholm just den veckan. Då jag fullgjort min tjänstgöring för terminen, trodde jag inte några formella hinder mötte, att ge mig ut ett slag, då min utnämning till lektor sannolikt i alla fall kommer med det snaraste. Att någon, t.ex. Carlin kunde ha intresse att ställa mig till doms inför universitetskanslern, kom jag inte att tänka på, men det är ju möjligt att en sådan åtgärd kunde påskynda ledigförklarandet av docentstipendiet. Jag har inte biljetter längre än till Paris, så att ingenting hindar, att jag stoppar min resa här och reser hem efter påsk. En veckas ledighet, därtill under påsken, kan ju ingen ha något att anmärka på. För min personliga del betyder det ingen förlust; resan till Paris har varit intressant i och för sig och en resa till Spanien kan ju göra senare någon gång, om jag får lust. Kanske finns det förresten intressantare länder; det var egentligen mest tanken på en cykeltur i ett från Norden väsensskilt landskap, som jag hade förälskat mig i, men det hade nog blivit litet enformigt att cykla på egen hand i en 3 veckor. Jag har förresten hela tiden räknat med att alternativt stoppa i Paris, då med nuvarande billiga biljetpriser i Tyskland en resa Hälsingborg-Paris endast går till omkr. 60 kr., och därför beslöt jag att resa omedelbart. då Du med kännedom om min adress i Paris, hade möjlighet att yttra Dig om lämpligheten att av en forsatt resa. Då en resa till Spanien icke är något, som att jag på något sätt hänger upp min själ på, anser jag efter det brev Hössjer skrivit till mig, det enklaste och bästa vore, att jag vänder tillbaka igen, och reser härifrån måndag eller tisdag.

[14]Northern Sweden

Med hjärtliga hälsningar Viktor Bergström

Translation:

P.S. Mail can reach me either through the Paris office of the American Express or by poste restante Madrid.

Dear Brother,

I just got a letter from Hössjer. I am sorry that I did not ask your advice before I went on my trip, but you where in Stockholm precisely that week. As I had fulfilled my duties for the term, I thought that there were no formal obstacles for me going away for a while, as my appointement to lecturer probably anyhow will come very soon. That somebody, for example Carlin could have an interest to rise up against me in front of the Chancellor of the Universities, did not cross my mind, but it may be possible that such a thing could speed up the announcement of the docent fellowship. I do not have tickets furher than to Paris, so there is nothing that could prevent me from stopping my journey here and to go home after Easter. A week of leasure, especially during Easter, is something that nobody would mind. From my personal point of view it is no loss; the trip to Paris has been intereting in itself, and I could have a trip to Spain some-time later, if I wish. May be there are even more interesting countries; it was mainy the idea of a bicycle trip in a country essentially differing from Nordic ones that had caught my fancy, but it would probably have been very monotonous to cycle on once one during some 3 weeks. Besides I have all the time counted with the alternative to stop in Paris, but, in view of the current cheep ticket prises in Germany, the journey Hälsingborg[15] Paris costs only around 60 Crowns, and therefore I decided to go at once, as you, knowing my address in Paris, had the option to express the suitability of a continued journey. Since a trip to Spain is not of any great importance for me, I am, after the letter Hössjer wrote me, of the opinion that the best thing would be that I return, departing from here Monday or Tuesday.

Yours faithfully, Viktor Bergström.

[15]City north of Lund by the coast opposite to Helsingör (in Danish: Helsingør, Elsinore in Hamlet.) in Denmark, Nowadays the city's name is spelt Helsingborg.

2.11 Gert Bonnier[16]

2.11.1 Letter Göttingen November 10, 1913

Broder Riesz.

Jag befinner mig nu här i Göttingen och trivs mycket bra. Jag går egentligen endast och hör Carathédory: Konforme Abbildungen, som jag tror skall bli mycket nyttigt för mig.

Anledningen till detta brev är emellertid den, att jag skulle vilja fråga dig, om du vid tillfälle skulle ha tid, att sända mig beviset för Din generalisering av Carathédorys sats. Du skulle därmed göra mig en mycket stor tjänst.

I så fall är min adress: Pension Thielebeule Geismarchausee 7.

Med hjärtliga hälsningar broderligen Bonnier

Min fru hälsar.

Translation:

Dear Brother Riesz.

I am now here in Göttingen and I am enjoying it a lot. But I have really come just to I listen to Carathédory: Konforme Abbildungen Abbildungen (Conformal mappings), which I believe will be very useful to me.

The reason of this letter is, however, that I want to ask you if you could send me the proof of your generalization of Carathédory's theorem. In doing this you would do me a very great service.

In that case my address is: Pension Thielebeule Geismarchausee 7.

With hearty greatings, your Brother Bonnier

My wife sends you her regards.

[16]Gert Bonnier (1890-1961), mathematician and genetician, studied mathematics under Riesz at SH, fil.lic. 1916, turned later to genetics, professor at SH 1936-1958, one of the founders of genetic research in Sweden, together with Olof Tedin he wrote, in 1940 the book "Biologisk variationsanalys" (Biological Variation Analysis). Gert Bonnier was the father of the racing driver Joakim Bonnier (nicknamed "Jocke", 1930-1972), who died in a crash. [114].

2.12 Ragnar Berwald[17]

2.12.1 Letter Stockholm December 1916

Fz. R. Berwald

debet an

Marcel Riesz

1. Uppslaget att tillämpa Riesz's summationsmetod å de Eulerska summorna (tanken framlagd vid ett av undertecknads bägge föredrag inför Matematiska föreningen i Mars 1915).

   Den Riesz'ska metodens avgjorda företräde framför andra, vid studiet av Eulers summor beror därpå, att de lineära medelvärden, "moyennes typiques", varpå den grundar sig (i detta fall) omedelbart låta överföra sig i mycket enkla integral-uttryck – detta med tillhjälp av résidukalkylen.

2. Det bevis för att

$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{v<\omega}(-1)^{v-1}v^{2k}\big(1-\frac{v^2}{\omega^2}\big)^{2k+2}=0,$$

   varå paragraf 4 är byggd.

3. Tanken, att såsom i %3 bestämma storhetsordningen hos $S(z)$ genom jämförelse med $s(z)$ vilken kan lätt uttryckes genom *Gamma*-funktioner. Resultatet hade jag i det väsentligaste förut härledt genom rätt klumpiga integral-uppskattningar. I samband härmed påpekade Doc. Riesz betydelsen av komplement formeln för *Gamma*-funktionen.

4. Betydelsen av Teorem 21. Hardy and Riesz P. 36, använt såväl i %4 somi § 6.

5. Exemplet $(15'')$, vilket har varit utgångspunkten rörande entydigheten till systemet $\sum_{v=1}^{\infty}\gamma_v\tilde{\omega}_v^l amdabda=\delta_l amdabda$ $(lamda=0,1,2,\dots)$.

[17]Franz *Ragnar* Berwald (1882-1977), mathematician, graduation at KTH in electrotechnology in 1904, at UU as a fil.lic. in 1910, fil.dr. at SH in 1917, docent there 1931-1954, amanuensis 1909-1910. Taught at KTH 1932-1955. Berwald has 8 items in JFM (1913-1926). Should not be mixed up with the differential geometer Ludwig Berwald (Prag 1883 - Ghetto Lodz 1942).

6. Frågan varför ej den använda lösningsmetoden kunde ge värden sådana att serierna i nyssnämnda system konvergera, då det ju säkert finns system av samma form med dylika lösningar (framställd vid ett av nämnda föredrag).

7. Tanken att i § 2 ej begangna mig av Toeplitz's satser utan av metoden med partiell summation och integration, vilket ju är den naturliga, om man utgår från i Cesàro's och Riesz's mening summabla serier (Jag hade förut framställt ett annat bevis avseende summabilitet i Cesàro's mening och vilande på Toeplitz's satser).

8. Vid det i (7) åsyftade tillfället nämnde Doc. Riesz även i förbigående att den Stirlingska formeln kan deriveras.

Stockholm i December 1916, Fz. R. Berwald

Translation:

1. The idea to apply the Riesz summation method to the Eulerian sums (presented in one of my two talks in the Mathematical Society in March 1915).

   The pronounced advantage of the Riesz method, compared to other methods, in the study of Euler's sums depends on the fact that the linear meanvalues, "moyennes typiques" (typical means), on which it is founded (in this case) immediately can be transformed into very simple integral expressions – this with the help of residue calculus.

2. A proof that
$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{v<\omega}(-1)^{v-1}v^{2k}\big(1-\frac{v^2}{)}\omega^2\big)^{2k+2}=0,$$
   on which Section4 is based.

3. The idea that, as in § 3 determine the order of magnitude of $S(z)$ by comparison with $s(z)$ which function again is expressed in terms of Γ functions. I had derived essentially this result by rather clumsy integral estimates. In this connection Doc. Riesz pointed out the importance of the complementary formula for the Γ function.

4. The importance of Theorem 21, Hardy and Riesz p.36, used in § 4 as well as in § 6.

5. Example $(15'')$, which has been the point of departure regarding the uniqueness for the system $\sum_{v=1}^{\infty}\gamma_v\tilde{\omega}_v^l amdabda=\delta_l amdabda$ $(lamda=0,1,2,\dots)$.

6. The question why not the method of solution used could give values such that the series in the system just mentioned converge, as there surely exist systems of the same form with such solution (presented in one of the talks mentioned).

7. The idea that, in § 2, not to use Toeplitz's theorems but the method of partial summation and integration, which certainly is the most natural one, if one starts with series summable in the sense of Cesàro and Riesz (I had previously presented another proof for Cesàro summability relying on Toeplitz's theorem).

8. In the case alluded to in (7) Docent Riesz mentions also in passing that Stirling's formula can be derivated.

Stockholm December, 1916

Fz. R. Berwald

2.13 Arne Beurling[18]

2.13.1 Letter Uppsala Sep 18, 1941

Broder,

Först och främst vill jag sända Dig och Din dotter ett varmt men dock hjärtligt tack för de trevliga dar i Lund i vår.

Beträffande den fråga Du skrivit om tror jag ej att vi har samma bestämmelser. Jag citerar därför följande ur "urval för Uppsala universitets gällande stadga IV 1939": "Tillika föreskrivs, att innehavaren av ifråg. lärar-befattning skulle förodnas av kanslern för rikets universitet för högst 3 år i sänder på förslag av mat.-naturv. sektionen, samt att ..." Om undervisningsskyldigheten gäller: "... undervisning av propedeutisk karaktär i form av föreläsningar och övningar under minst 6 tim. i veckan". Dessutom gäller för oss: "att bef. som bitr. lärare i mat. skall genom anslag å univ. anslagstavla kungöras ledig av mat. naturv. sektionens dekanus med en ansökningstid av

[18] Arne Beurling (19056), very famous Swedish mathematician, professor at UU 19374, then at the Institute for Advanced Study in Princeton. His main contributions in mathematics were in harmonic and complex analysis and, further, potential theory. During WW II, in 1940, using mathematical methods, B. made it possible to decode the German telephone communication with Nazi occupied Norway through Sweden. (*Editors:* As the saying goes, the German mail reached the Swedish government before Hitler could read it.) The great-grandfather of Arne Beurling was the watchmaker Per Henric B. (1759 or 1763-1806). [114].

14 dagar och med tillkännagivande att de till kanslern ställda ansökningarna skola ingivas till dekanus."

Dessa, de provisoriska bestämmelserna, äro nu införda utan ändring.

Med hjärtlig hälsning
vännen Arne Beurling

[Samma kuvert innehåller också ett blad med följande innehåll:]

Recto

Skolreformen:

Nedskärningen av antalet timmar i matematik redan i realskolan har avgjort försämrat förutsättningarna för gymnasiet.

Utan att närmare ingå på de ensklida kursmomenten vilja vi ändå fästa uppmärksamheten på den något styvmoderliga behandling, som geometrien utsätts för.

Matematikens klyvning på realgymnasiet är historiskt uppkommen som korrigering av en förhastad skolreform. Specialmatematiken infördes på grund av bestämda önskemål från de högre tekniska undervisningens sida, där matematikkursens otillräcklighet påvisades.

Att uppdela matematiken i två ämnen är även en oriktig favorisering av dem, som ha båda dessa ämnen.

[Följande två stycken har blivit utraderade.]

Angående latinlinjens matematikkurs bör kanske anmärkas: det är ej så få, som ägnar sig åt matematisk-fysiska studier efter studentexamen på latinlinjen, och ännu flera, som studera statistik och nationalekonomi, ingående bl.a. i Statsvetenskaplig examen. I båda dessa ämnen erfordras utom ett visst kunskapsstoff framför allt matematisk färdighet, som ej torde kunna erhållas med den för latingymnasiet knappt tillämätta tiden.

Studiehandboken: Licentiatlitteraturens nedskärning. De la Vallé-Poussin.

Verso [i en annan hand]

Propedeutiska kursen ersättes med kompendium. Gårding lånade anteckningar.

För närvarande:

Andra året matematik, deltentamen i kemi.

Tredje året resten av kemi + fysik.

Pedagogikkurs endast på vårterminen.

ett provisorium från början

Translation(partial):

Dear Brother,

First of all I want to send you and your daughter warm but yet hearty thanks for the plesant days in Lund this spring.

Concerning the question you wrote about I do not believe that we have the same regulations. Therefor I quote the following from "Selection of the for UU valid statute IV 1939":

[OMITTED.]

With hearty greetings
your friend Arne Beurling

[The same envelope contains also two pages with the following content: LIKEWISE OMITTED.]

2.13.2 Letter May 9, 1948

Uppsala 9.5. 48

Käre Marcel!

Mste sända Dig ngra rader med tack för tack för vänlighet att lta välja mig i Fysiografen. Som Du kanske vet, har jag legat sjuk i njursten och är ännu ej terställd fastän p benen igen.

Den här terminen har varit rätt besvärlig, framför allt genom att jag arbetat så intensivt på egna problem i stället för att ägna mig t det förbannade sakkunniguppdraget. Ngot dylikt har jag lovat att aldrig mer åtaga mig. Hittills har jag bara läst en sak i skrifterna och det var en sats av Frostman, att varje sluten mängd av Hausdorff-mått > 0, rel. , kan bära en pos. massa fördelad Lip. Finns den någonstans? Jag menar naturligtvis ej att Du skall söka i saken men om Du vet det skulle jag bli tacksam för ett ord i frågan.

Jag har sysslat en hel del med spektralsatsen frn *Acta* arbetet, och funnit en rätt trevlig utvidgning till Hilbertska rum:

Om T är en *verklig* kontraktion av M, dvs

$$\|Tf\| \leq \|f\|, \quad \lim_{n\to\infty} \|T^n f\| = 0, \quad f \in H$$

s är ju ergodsatsen trivial eftersom alltid

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} T^n f \to 0.$$

Man kan nu frga sig, när det gäller att

$$b_f = \text{slutna höljet till } \sum c_\nu T^\nu f,\ c_\nu \text{ godt.}$$

alltid innehller ett egenelement till T, dvs ett element $f \neq 0$, $T\phi = lamdabda\phi$. För det första mste man givetvis förutsätta att $E =$ mängden av T:s egenelement är fundamental, dvs dess linjär kombinationer ligger tätt p H. Dessa förutsättningar äro dock ingalunda tillräckliga för att b_f alltid skall innehlla ett $\phi \in E$, om $f \neq 0$. Om däremot T^* är isometrisk gäller satsen, och ger s som corollarium: *För att* $T^{*n}g$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *skall vara ett fundamentalt system är det nödv. o. tillräckligt att*

$$(g, \phi) \neq 0 \textit{ för alla } \phi \in E.$$

När jag är färdig med allt för terminen vore det roligt att få träffas. Har Du planer att komma upp under juni månad?

Hj. hälsning

vännen Arne Beurling

Translation:

Dear Marcel, I send you some lines in order to thank you for your kindness to have me elected to the LFS. As you maybe know, I have been ill in bed because of kidney stones and I have not yet quite recovered, although I am again on my feet.

This term has been rather troublesome to me, mainly because I have worked so intensely on my own problems instead of devoting me to this damned expert business. Never again I will take on such a job. Sofar I have only read one thing in the papers and this was a theorem by Frostman, that each closed set of Hausdorff measure > 0, relatively α, can carry a positive mass distributed Lip_α.

Is this somewhere? Of course, I do not mean that you that you should involve yourself in this, but if you happen to know it, I'll be grateful if you inform me about it.

I have been busy a great deal with the spectral theorem from my *Acta* paper [14]. And I have found a rather nice extension to Hilbert spaces:

If T is a *proper* contraction of M, that is

$$\|Tf\| \leq \|f\|, \quad \lim_{n\to\infty} \|T^n f\| = 0, \quad f \in H$$

then the ergodic theorem is trivial, as always

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} T^n f \to 0.$$

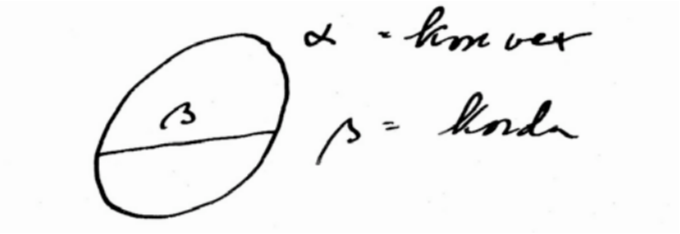


Figure 2.10:

One can now ask when it is true that

$$b_f = \text{closed hull of } \sum c_\nu T^\nu f,\ c_\nu \text{ arbitrary}$$

always contains an eigenelement of T, that is an element $f \neq 0$, $T\phi = lamdabdaf$. In the first place one has of course to assume that E, = the set of the eigenelements of E, is fundamental, that is, its linear combinations are dense in H. These assumptions are, however, not sufficient for b_f to always contain an $\phi \in E$, if $f \neq 0$. But if T^* is isometric, then the theorem holds, and as a corollary one obtains: *In order for* $T^{*n}g$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *to be a fundamental system it is necessary and sufficient that*

$$(g, \phi) \neq 0 \text{ for all } \phi \in E.$$

When I am ready with everyhting this term, it might be nice to meet each other. Do you have any plans att to come up here in June?

Yours truly Arne Beurling

2.13.3 Letter April 2, 1948

Uppsala 2.4. 48

Käre Broder!

Sänder ett par rader i all hast. Det var verkligt lustigt att få höra (av Salem) att även Du blivit inspirerad (!) av Fredrics beröm av Carlsons olikhet beträffande Gabriels problem. Jag satt ett par dagar och funderade p saken och fann bland annat följande:



Figure 2.11:

1.
$$\int_\beta |f(z)dz| < \int_\alpha |f(z)dz| \,.$$

2. Carlsons olikhet gäller också om ytterkurvan är konvex och om högra membrum multipliceras med en fix konstant k, $1 < k < 2$.

3. Om f hol. utanför α (konvex) samt $f(\infty) = 0$ gäller för [en] tangent L eller icke skärande L:
$$\int_L \left| f^2(z)dz| < 2 \int_\alpha |f^2(z)dz \right| .$$

Kan Du bevisa Gabriels hypotes i dess allmänna form?

Hj. hälsningar

Beurling

Translation:

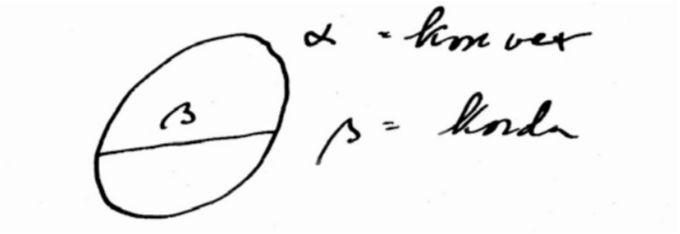


Figure 2.12:

In great hurry I send you some lines. I was really amusing to hear (from Salem) that you too have been inspirerad (!) by Frederic's praise of Carlsson's inequality regarding Gabriel's problem. For several days, I sat and thought of it, and found among other things the following:

1)

$$\int_\beta |f(z)dz| < \int_\alpha |f(z)dz| \,.$$

2) Carlsson's inequality holds also if the exterior curve is convex and the right member is multipliced with a fixed constant k, $1 < k < 2$.

3) If f is holomorph outside α (convex) and it holds $f(\infty) = 0$ for the tangent L or a not intersecting L:

$$\int_L \left| f^2(z)dz| < 2 \int_\alpha |f^2(z)dz \right| .$$

Can you prove Gabriel's conjeture in its general form?

Yours faithfuly Beurling

2.14 Letter Princeton Nov 4, 1952

Käre Marcel!

Hoppas detta brev når Dig i tid. Här har varit litet jäktigt de sista dagarna; seminariet m.m.och i dag presidentval.

Hj. tack för Ditt brev. I stipendiefrågan har jag samma uppfattning som tidigare, nämligen att det vore lämpligt om Institutet utdelade minst 3 stipendier nu på en gång samt att ett vardera ginge direkt till Lund, Stockholm och Uppsala, samt att *utdelningen notifierades i pressen.* Som kandidat från Uppsala föreslår jag Carleson (cirka 4.000 kr.)



Figure 2.13:

Håller på att leta efter mina anteckningar om Carlemans manuskript, men har ej hittat dem ännu. Skulle jag ej få i väg ett yttrande i kväll hoppas jag Du meddelar styrelsen följande: Mitt förslag går ut på, antingen 1) att manuskriptet publiceras i tidskrift såsom två posthuma avhandlingar och i så fall utan någon förändring eller bearbetning av texten, eller att manuskriptet publiceras som 1 bok i Stiftelsens skriftserie vilket i så fall krävde en bearbetning av manuskriptet. Min uppfattning är i övrigt att Carlemans arbete är av mycket stort intresse och därför bör offentliggöras så snart som möjligt, samt att alternativ 1) ur många synpunkter är att föredraga.

Det är roligt att höra att Du snart kommer hit. I så fall hoppas vi att få se Dig som gäst här. Både Karin och jag trivs utmärkt här och har det bra på alla sätt.

Vi sänder Dig de hjärtligaste hälsningar

Din tillgivna Arne

Translation:

Dear Marcel!

I do hope that this letter reaches you in time. It has been at litle bit hectic here during the last days; the seminar m.m. and today the presidental election.

Many thanks for your letter. As before, I have the same opinion in the I stipend issue, namely that it shouf be suitable if the Institute were to distribute at least 3 stipends now all at the same time, and that each would directly to Lund, Stockholm and Uppsala, and that this ought to be *notified in the press*. As a candidate from Uppsala f I suggest Carleson (c:a 4.000 SEK)

I am busy looking for my notes about Carleman's manuscriptd, but I have not yet found them. In case I will not succed in sending report tonight, I hope that you commicute to the Board the following: My suggestion amounts that either 1) the manuscript be published in a journal as two posthumous papers and in this case without any change or revision of the text, or else that the manuscrip be published as one book in the Foundation's series of booklets, in which case one woud require a revision of the manuscript. My opinion is otherwise that Carleman's work is of very great interest and therefore it ought to be published as soon possible, and farther that alternative 1) from many points of view should be preferred.

I am glad to hear that you soon will come here. If so, we hope to see you here as a guest. Both Karin and I like it here and enjoy our present life in all ways.

We send you our heartiest greetings.

Yours faithfully Arne

2.15 Hugo Björk[19]

2.15.1 Letter Lund June 29, 1942

Vördade Broder!

Får hjärtligt tacka för Din stora vänlighet att skriva.

Ursprungligen hade jag ju beräknat att vara klar för tentamen på algebran omkring den 10 juni. Emellertid fick jag, trots telegrafisk beställning, Dicksons Algebren från Schweiz först den 6 juni, och då jag vid genomgången fann, att jag glömt mer än jag väntat, fann jag det säkrast att ta 10 à 12 dagar på mig för repetitionen.

Under de båda dagarna 29 och 30 juni är Din tid säkerligen strängt upptagen, och eftersom en tentamen väl då blir Dig till stort besvär kan den väl bättre uppskjutas till

[19]Hugo Björk (1909-1975), mathematician, registered at LU 1927, graduated with a fil.kand. 1929, a fil.mag. 1943 and, finally, fil.lic. 1942 – besides the last exam in the same year as Lars Gårding. Employed at the insurance company "Svenska Liv" (Swedish Life) in 1944, assistant actuarian since 1946. Secretary of the Stockholm Chess Association since 1949; Secretary General of FIDE (Féderation International des Échec, World Chess Federation), since 1950.

medio av juli. Eftersom jag för en viktig affärsangelägenhets skull ändå är i Lund dessa dagar, kunde jag kanske ringa Dig den 29 juni.

Med hjärtligt tack

Din vördsamt tillgivnee

Hugo Björk

Translation:

My respected Brother,

I thank you heartily for your great kindness to write.

Originally I had thought to be ready for an exam in algebra around 10 June. However, I got, despite a telegraphic order, Dickson's Algebren from Switzerland only on 6 June, and, as working through it, I found that I had forgoten more than I expected, so I found it more sure to reserve 10-12 days for a repetition.

During the two days 29 and 30 June is your time for sure very occupied, and as an examination then will probably be a great inconvenience, will it not be better to postpone it to *medio* July? As I will anyhow will be in Lund during these days in business affair, I might perhaps phone you on 29 June.

With hearty thanks

Yours respectfully Hugo Björk,

2.15.2 Postcard Boden, probably summer of 1942

Vördade Broder

Har nu varit här i Boden i över fem veckor och haft övervägande angenäma överraskningar att notera. Min befattning (på Personaldetaljen) fordrar visserligen mycket arbete, även övertids dito, men bostadsförhållandena äro trivsamma och hela andan här överraskande human. Det är nu tydligen den rätta tiden på året att vistas här, och jag vill gärna bringa Dig ett varmt tack för Ditt goda råd i april, att jag själv skulle åtgärda inkallelse (sådana ansökningar är sällsynta här, men har goda chanser att bli bifallna)! Din tillgivne

Hugo Björk

My respected Brother,

I have now been here in Boden for over five weeks and have mainly pleasant surprices to report. My position (at the personal section) requires certainly much work, even overtime *ditto*, but the accomodation is comfortable and the whole spirit here is surprisingly human.

It is now apparently the right time of the year to be here, and I wish to thank you for your good advice in April, that I should myself arrange the call up (such applications are rare here, but the chances for consent are good)!

Yours affectionately, Hugo Björk

2.16 Carl Emanuel Blom[20]

2.16.1 Letter Stockholm Mar 2 1942

Stockholm 2.3.42
Herr Professor M.Riesz
Lund

Elementa fick före jul inneliggande manus från Budapest. Utan att granska dess innehåll hade red omedelbart klart för sig, att det inte kunde publiceras i *Elementa*. Omfånget var för stort, och formelapparaten kräver större format än Elementas.

Av nämnda skäl ägnade inte lektor Agne Wahlgren – som sköter avd. matematik i tidskriften – uppsatsen något ingående studium, men han fick intrycket att uppsatsens publikationsvärde kunde ifrågasättas.

De först nämnda skälen äro ju för red. motiv nog för ett avböjande. Men jag tänkte, att man kanske skulle kunna göra förf. en tjänst genom att nämna något om värdet, så att han inte kanske ödar tid på ett onyttigt arbete.

Förf hemort kom mig att tänka på att professorn kanske vilja göra honom en tjänst och kanske ge honom några anvisningar på hans eget språk, vilka jag kunde bifoga mitt brev till honom.

Detta är endast en vördsam fråga. Är Professorn ej böjd härför, returnera benäget manus till mig, och jag låter det gå åter till förf med ovannämnda motiv för avböjandet.

Med utmärkt högaktning
C.E. Blom
Lärov. adj. Karlbergsv. 16, Stockholm

[20]Carl Emanuel Blom (1883-1970), mathematics teacher, registered at SH 1902, fil.kand. there 1906, taught mainly physics, mathematics and chemistry at a school in Uppsala 1913-1948, honoray doctor at UU 1955; most known as founder and editor of the popular journal *Elementa*.

Translation:

Mr. Professor M.Riesz
Lund

Elementa received before Christmas the inclosed manuscript from Budapest. Without having investigated its contents it was immedately clear to the Editor that it could not be published in *Elementa*[21] Its size was too large and the formulae require a larger format than the one of *Elementa*.

By the reasons mentioned Lecturer Dr Agne Wahlgren[22] – who is in charge of our journal's division of mathematics – did not devote the paper any more close study, but he got the impression that its value for publication could be put under question.

The first mentioned reasons are certainly sufficient for thr Editor for a refusal. But I thought that one would perhaps do the author a favour by saying something about its value, so that he perhaps will not waste time on futale work.

The author's recidence made me att think that you, Professor, perhaps might want to do him a service and even give him some advice in his own language, which I could add to my letter to him.

This is just a respectful question. If you, Professor, are not inclined to this, please, return the manuscript to me, and I shall let it go back to the author with the previous motivation for the refusal.

Yours faithfully, C.E. Blom, secondary school adjoint. Karlbergsv. 16, Stockholm.

[21] *Elementa. Tidskrift för matematik, fysik och kemi*, now regretfully extinct (2004) popular journal whose Editor for many years was the author of this letter, Carl Emanuel Blom. His son again was the mathematical statistician Gunnar Blom (1920-2003; see *Elementa* Nr 1, 2004, p. 26.). [115].

[22] Agne Wahlgren (1879-1964), mathematician and teacher of mathematics, studies at UU, fil. dr. 1903 [169]

2.17 Göran Borg[23]

2.17.1 Postcard Uppsala Feb 15, 1947

Broder!

Jag tänkte bara i korthet meddela, att vi här i Uppsala, Eriksson, Essén och jag, på måndag skola återta våra ansökningar till Göteborg. Om du har lust, kunde du ju verkställa detsamma för din del *samtidigt*, Fremberg tycks numera inte vilja dra sig tillbaka, men för din del kvarstå väl de gamla skälen.

Jag har ingen anledning att på något sätt driva på er än göra som vi, men då hela aktionen och vårt sätt att se på denna sak har sin upprinnelse i ett välbekant brev från Lund, vill jag likväl underrätta. Fortfarande finnas skäl för ett samtidigt återtagande.

Hälsa Nils-Erik Fremberg så *hjärtligt*.

Din tillgivne Göran Borg

Translation:

Dear Brother, I just want to inform you briefly that we here in Uppsala, Eriksson, Essén and me, are going to revoke our applications to Göteborg on Monday.

If you like, you could do the same for your part *at the same time*, Fremberg seems now not to want to withdraw, but in your case certainly the old reasons remain.

I have no reason to want to agitate you to do as we, but I will still inform you that the entire action and our way to look at it has its origin in a known letter fom Lund. There are still reasons for a simultanous withdrawal.

Please, give *hearty* greetings to Nils-Erik Fremberg.

Yours faithfully Göran Borg.

[23]Göran Borg (19137), mathematician, professor at KTH 19536, rector there 19684, known for his work in ordinary differential equations. – The postcard below is presumably about an apointment of a position at GU. The persons mentioned by the author were all scientists working at UU at this period. Carl-Gustaf Esseen (1918-2001) was a professor of mathematical statistics at KTH (1949-67) and at UU (1967-84). He is known in connection of the Berry-Esseen inequalty giving the approximation error in the central limit theorem. Hans *Adolf* Sture Eriksson (1907-1986) was a docent of mechanics and mathematical physics. [114].

2.18 Agneta Bramson

2.18.1 Letter Stockholm May 6, 1938

Bramson-institut
Grevturegatan 14^{IV}
Stockholm
Tel. 62 58 57

Käre Marcel,

Troligen blir Du en smula förvånad att efter så många är få ett skriftligt meddelande från mig. Tyvärr har jag så pass mycket att göra att jag ej hinner skriva något trevligt eller personligt brev, utan får inskränka mig till att gå rakt på sak.

För en hel del år sedan råkade Du (som Du kanske kan erinra Dig?) – slå sönder en statyett. Juset var visst med den gången. Den lämnades till Carlman för att repareras och efter gansk lång tid fick jag den igen, vederbörligen lagad och fin. Arbetet hade, sade han, varit mycket tidsödande och besvärligt vilket också framgår av räkningen — tycker jag. Och dock sägs det vara ett "vänskapspris". Jag hade faktiskt glömt bort statyetten och blev mäkta snopen när han skickade upp den med räkning. Hade han meddelat mig kostnaden innan han tog itu med arbetet, så hade därav blivit intet. Nu är det emellertid som det är. Jag har fått påminnelse om räkningen och jag kan inte klara av det och tar mig härmed friheten att sända den till Dig med "hövlig förfrågan", om Du skulle vilja stå för den fatala olyckan? Trots att tidens tand har gåt väldigt upp och ned sedan dess.

Själv mår jag bra med undantag av ett överansträngt (och sönderlidet) hjärta. Och så de gamla utslitna bekymren för ekonomin och Petrus. Jag vet numera ingenting, det är Juset som ha hand om vårt äktenskap och Petrus' älskarinna. Ja käre Marcel, det är inte roligt. När tänker på alla de år som Juset och jag har varit tillsamman, allt vi haft tillsamman, allt vi varit för varandra, gör det mig ont att Juset *kan* vara så illojal mot mig. Att Ester gör mig illa det kan jag förstå, hon har aldrig kunnat med mig, men Juset, som har sett på nära håll hur jag har kämpat för att hålla det hela ihop. Hon förstår antagligen inte hur hjärtlöst grymt hon handlar.

Ibland sitter jag och tänker på de ljusa stunderna då vi sjöng ungerska folkvisor . . . så långt borta i tiden . . . det var allt en bra lycklig tid.

Nej, här sitter jag och blir sentimental som i forna dar. Det går inte alls. Gå vidare och glömma det är det enda. Hur kan man vänta sig någon förståelse av sina medmänniskor!

Jag hade inte alls tänkt att skriva något personligt, det blev så utav bara farten. Jag såg Dig så tydligt framför mig så allt gammalt revs upp . . . Förlåt mig.

[24]Mrs. Agneta Bramson, nicknamed Netan, friend of Riesz. Possible address: Regeringsgatan 5, Lund. *Editor.* Probably Stockholm is intended.

De innerligaste hälsningar från Din gamla vän Netan

Translation:

Dear Marcel, You will probably somewhat surprised to recieve, after so many years, a written message from me. Regretfully, I have that much to dot that I have no time for writing a nice or personal letter, but must restrict myself to pass directly to my business.

A few years ago you happened (as you maybe recall?) – to break a statue. Juset was probably along then. It was given to Carlman for repair and, after a fairly long period, I got it back, properly repared and nice. He told me that the work had been rather time consuming and cumbersome, which also is seen from the bill — I think. And still I was told that it was a price of "friendship". Indeed, I had forgoten the statue and was rather blank when he sent it with the bill. Had he told me the cost before he began working, I might have cancelled it. But it is this way now. I have got a reminder about the bill and I cannot aford it and so I take hereby the liberty to forward it to you with a "polite request", that you might cover the expences of the fatal accident? Although the tooth of time has gone mighty up and down since then Trots att tidens tand har gått väldigt upp and ned sedan dess.

I myself am feeling well except for that my heart is strained and broaken by suffering. And so, on top, the former worries for our economy and Petrus. Today I do know not anything, it is Juset who takes care of our marriage och Petrus's mistress. Yes, dear Marcel, it is note fun at all. While thinking of all the years that Juset and I have been together, all we had together, it hurts me that Juset *can* be so illoyal to me. I may understand that Ester does mean things to me, she has never liked me, but Juset, who has seen from a close corner how I have had to fight in order to keep all in pieces. Probably she does not understand how callous she is acting.

Sometimes I am sitting down to think on the bright moments when we were singing Hungarian folk songs ... so distant in time ... it was really a very happy period.

No, now I am getting sentimental, as in former days. It does not work at all. To go on and forget is what amounts. How can one expect any understanding from one's fellow creatures!

I did not at all intend to write anything personal, it just happened so. I saw you so clearly in front of me so all old things were raked up ... Forgive me.

With my innermost greetings, Yours faihtfully, your old friend Netan.

2.19 Torsten Brodén[25]

[25]Torsten Brodén (1857-1931), mathematician, professor at LU 1906-1922, devoted him-

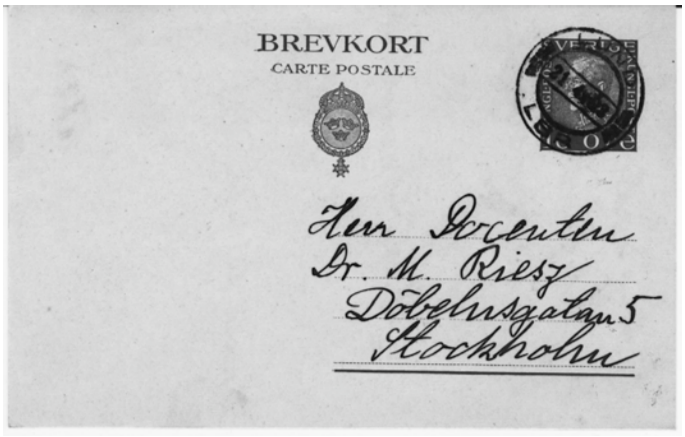


Figure 2.14: The cover of Brodén's postcard

2.19.1 Postcard Lund, Apr 21, 1923

Mottagandet av 5 skrifter erkännes härmed tacksamt

Högaktningsfullt
T. Brodén Lund 21 – 4 – 23

Translation:

I acknowledge the receipt of 5 papers, with thanks. Brodén.

2.20 Olof Byström[26]

[28]

self to constructing functions with densely situated singularities, moreover to differential equations of Fuchs type and Riemanns problem and, in later days, to the logical foundations of mathematics. [52].

[26]Olof Byström (1889-1971), historian of literature. Studies at SH, fil.lic. 1933, fil.dr. 1945, docent there 1945-1968, was given "professor's name"[27] in 1979. Museum lecturer and superintendent of Stockholm City Museum 1946-1964, first antiquarian there 1964-1967.

[28]According to [172] "professor's name" is, in Sweden and in Finland, a title awarded to elderly university dons as representaives of cultural life who have done an exceptional achievments. In Sweden this award is given by the government, in Finland by the Republic's president. It is curious that in [114] the notion "professor's name" is not formally defined, instead they record 251hits (träffar).

2.20.1 Postcard to Ånge, postal stamp Undersåker 1919

B.B.

Buafoket i Mellerstvallen hälsar att Du är hjärtligt välkommen, om Du kan foga Dig i de enkla vanor, som råda i buan. En filt, en sweater och varma underkläder torde om möjligt medföras, allt övrigt tillhandahålles på platsen. Tisdagen den 5 augusti passa vi vid Undersåker det tåg, som går från Ånge vid 6 tiden på morgonen. Vill Du komma tidigare torde Du kunna ta Dig fram till buan på egen hand. Det är drygt 3 timmars delvis tämligen brant väg över Vällista fjäll. Efter den 5 aug. är det ej alldeles säkert att vi äro i buan, enär vi möjligen ge oss ut på en längre vandring.

I hast vänl.
O. Byström
Mellerstvallen, Ottsjö[29] *undersåtar*

Translation:

Dear Brother, The villagers of Mellerstvallen wish you heartily welcome, if you can adjust yourself in the simple habits, which rule in the village. A blanket, a sweater and warm underwear should be brought, all the rest is provided on spot. On Tuesday 5 August, we, the subjects, will attend at Undersåker station the train leaving Ånge at 6 in the morning. If you want to come earlier you should be able to reach the village by your own. It is slightly 3 hours on a partly rather steep road across the Vällista fjeld. After 5 August we are not quite sure to be in the village, because it may be that we go for a longer hike.

2.20.2 Postcard forwarded to Ånge, original destination Döbelnsgatan 5, Stockholm Jan 5, 1920

Broder Riesz

Jag har i Programmet satt in dig våren föreläsa Diff.- och Int. kalkyl, Onsdagar och Torsdagar samma tider som förra terminen samt Fredagar kl. 12-1. I samband därmed har jag strukit din kurs in nyare geometri. Har du tänkt att hålla den kan ju naturligen alltid lokal beredas, detta endast för att underrätta dig om ändringen.

Godt nytt år Din I. Bendixson

Translation:

[29] Village in the Årefjällen mountain range, not far from Östersund. The word "undersåte" means "subject".

Dear Brother Riesz,

I have put you in the program to teach Differential and Integral Calculus during the spring, on Wednesday and Thursday on the same times as last term, and in addition on Fridays from 12-1 pm. In this connection I have cancelled your course in Newer Geometry. If you would still like to give it, space can, of course, be located for it. This is just to inform you of the changes.

Happy New Year to you.
Yours faithfully I. Bendixson.

2.21 John Böttiger[30]

2.21.1 Letter Stockholm May 21, 1931

Herr Professor!

Med anledning av Filosofiska fakultetens inbjudning att vid den av Fakulteten den 30 instundande maj anordnade doktors-promotionen emottaga jubileumskransen, för hvilken inbjudning jag har ännu äran vördsamt tacka, ber jag härmed få meddela, att det tyvärr av flera anledningar är mig omöjligt att vid nämnda högtid närvara.

Med utmärkt högaktning John Böttiger

Stockholm, d. 21 Maj 1931.

[30]John Böttiger (1853936), art historian and expert of museums. From 1885 active in the royal art collections, from 1915 superintendent and head of the "Husgerådskammaren" (Houshold Utensils Chamber). B:s important scientific adaption of the, from an international point of view, remarkable collection resulted, among other things, in the volume "Svenska statens samling af väfda tapeter" (1, 18958, Government Collection of Tapestry of Sweden), which is still viewed as a standard work. – J.B is a nephew of the writer Carl Wilhelm Böttiger (18078), also poet and historian of language and literature; his autobiography is a Swedish classic. Here opens up for us a bridge to [125]. It turns out that he was an uncle (on his mother's side) of the mathematician C. F. E. Björling (1839-1910), who again was involved in a very long professorship contest at LU 1871-1873, eventually won by him, but in which also his uncle took part by writing editorial letters to newspapers on behalf of his nephew. – Even stranger, I did meet Björling's unmarried granddaughter Miss Björling, who was head of the Daycare Centre of the Student Union in Lund, where I had placed my youngest son after my wife's death in 1972. Once I visited her summer house by the sea, North of Lund, in the company of a Hungarian friend of her, who had come to Sweden as a refugee in the era of the 1956 revolution and whom Miss Björling had taken good care of; she had married a Swede and her name was then Elisabet Larsson. . The lady herself not present on the occasion. The walls of the house were covered by pictures of famous mathematicians (Cauchy etc.). I wonder if the Miss understood to value them. [114]. [52].

Translation:

Dear Professor, In view of the invitation of the Faculty of Philosophy to receive, on the promotion of doctors arranged by the Faculty, on 30 coming May, the Jubilee Wreath, to which invitation I still have the honor to thank respectfully, I ask hereby to be allowed to communicate that, regretfully, because of several reasons, it will be impossible for me to participate at the celebration mentioned.

Yours faithfully John Böttiger

2.21.2 Letter Stockholm Jun 4, 1931

Herr Professor!

Genom en stark förkylning, som f.ö. även under promotionsdagen fängslade mig vid bädden, har jag tills i dag hindrats från att avlägga mitt vördsamma tack för den mig tillsända vackra lagerkransen. Den skall bliva mig ett kärt minne från en högtid, som det var bittert nog att ej kunde få bevista, men som jag säkert på grund av min nyckfulla hälsa gjorde klokt i att på förhand avstå från.

Med utmärkt högaktning vördsamt
John Böttiger
Stockholm d. 4. Juni 1931.

Translation:

Mister Professor, Due to a heavy cold, which by the way kept me ill in bedm even on the very day of the promotion, I have been unable until today to deliver worthy thanks for the beatiful wreath sent to me. It shall remain to me a dear memory from a festival day which, bitterly enough, could not attend, but, in view of my erratic health, I was probably wise to refrain from.

Sincerely Yours John Böttiger

2.22 Torsten Carleman[31]

[31]Torsten Carleman (1892-1949), mathematician, born in the northernmost part of the province of Scania - which in the 17-th century had rebelled against the then newly introduced Swedish rule in this former Danish province – Carleman choose to study at UU. He got his fil.dr. under Erik Holmgren (1873-1943) in 1917. Carleman is counted as one of the most influencal Swede among mathematicians, also from an international point of view.

2.22.1 Letter Tällberg Apr 13, 1919

Broder.

Vill endast härmed fråga om Du erhållit min försändelse innehållande manuskriptet till referatet över min doktorsavhandling. Ber Dig snarast möjligt återsända det, även om Du ej har hunnit med att gå igenom det.

Professorn frågar om Du erhållit hans brev, på vilket han väntar svar. Han reser härifrån omedelbart efter Påsk. Jag avreser ett par dagar tidigare.

Många hälsningar Din tillgivne Torsten Carleman.

Translation:

My dear brother, I just want to ask you herewith if you did recieve my package containing the manuscript of the summary of my Ph.D.-thesis. I ask you to return it as soon as possible, even if you have not had time to look it through.

The Professor [guess who?] asks if you did get his letter, he is waiting for an answer. He will depart from here immediately after Easter. I myself will leave a few days earlier.

yours truly Torsten Carleman.

He is remembered for his work in many branches of analysis: integral equations – foreboding the later work of von Nemann and others on selfadjoint operators in Hilbert space –; quasi-/ functions; approximation of functions; trigonometric series; moment problem; spectral theory of selfadjoint elliptic partial differential operators – later work by Pleijel and Gårding; uniqueness of Cauchy's problem for partial differential equations – later generalized by Hörmander; / transform – forshadowing the theory of /s; Boltzmann equation. Among Carleman's students we mention: Juringius; Pleijel: Hellsten; Hans Rådström. After Mittag-Leffler's death in 1927, Carleman was appointed as the first director of the Institute Mittag-Leffler. He lived there alone in two rooms. [37], [52], [110].

2.23 Lennart Carleson

2.23.1 Postcard from various mathematicians Stanford Mar 5, 1966

Stanford, 5/3 1966

Käre Marcel!

Vi har haft en god middag och sklat för Dig (mnga gnger). Butte, Lennart, Ruth Garsia, Gertrude Moser[33] + Jürgen Moser, Adriano Garcia[34]

Translation:

Dear Marcel, We have had a superb dinner and drunk your health (many times). Butte etc.

2.24 Fritz Carlson

2.24.1 Letter Stockholm Feb 8, 1932

Remark 3 *There is some confusion concerning dating of this and the following letter. Between these there is a draft to a reply by Riesz dated Lund 17 Feb 1932 (see Chapter 2). We have no good explanation of it.*

Broder. I Din egenskap av specialist på randvärden vill jag fråga Dig om Du känner till något resultat, som har samband med följande problem:

$\kappa(q)$ är det minst tal så beskaffat, att *varje* serie $f(z) = \sum a_n z^n$ med $a_n = \mathrm{O}(n^{q+})$ satisfierar

$$(1-r)^{\kappa(q)+} f(z) \to 0, \quad z = re^{i\phi}$$

[32]Lennart Carleson (b. 1928), mathematician, professor at SU 19545, at UU 19553. C. var editor of *Acta* 19569, director of Institute Mittag-Leffler 19684 and chairman of the International Mathematical Union (IMU) 19782. He has published important work in mathematical analys: function theory, harmonic analysis (/ series) and iteration theory. His perhaps most honorable rewards was the Wolff prize in 1992 and the Abel prize in 2006. [114]. His perhaps most quoted result states that the / series of a periodic function of class L^2 converges almost everywhere (except possibly on a set of measure zero), which solved a long open problem. Besides, Marcel Riesz was of a contrary opinion.

[33]Daughter of Richard Courant.

[34]Lennart is Lennart Carleson, and "Butte" the nickname of his wife then.

[35]Fritz Carlson (1888952), mathematician, professor at KTH 19207, at SH since 1927.

för *nästan alla* ϕ. Man kan visa, att

$$q + \frac{1}{2} \geq \kappa(q) \geq q.$$

Med tack på förhand för besväret!

Vännen F. Carlson

Stockholm, Östermalmsgatan 83, 8/2 32

Translation:

My Dear Brother, In your capacity of a specialist of boundary values I would like to ask you if you know of any result related to the following problem:

$\kappa(q)$ is the smallest number such that that *each* series $f(z) = \sum a_n z^n$ with $a_n = \mathrm{O}(n^{q+})$ satisfies

$$(1-r)^{\kappa(q)+} f(z) \to 0, \quad z = re^{i\phi}$$

for *almost all* ϕ. One can show that

$$q + \frac{1}{2} \geq \kappa(q) \geq q.$$

Thanks in advance for your efforts!

Yours faithfully F. Carlson

2.24.2 Letter Stockholm Feb. 9, 1932

BB![36]

Mycken tack för Din vänlighet att så utförligt besvara min fråga. På grund av mellan kommande förhinder har jag varit tvingad att lämna frågan åsido. Jag har varken haft tillfälle att se den avhandling av Hardy i *Natl. Acad. Sc.*, som Du nämnde eller själv genomföra räkningarna för Hardys ex

$$f(z) = \sum n^{\rho - \frac{1}{2}} e^{\alpha i n \log n} z^n.$$

Jag vet därför ännu inte om detta exempel är det, som besvarar min fråga. På denna grund ville jag också skjuta på det svar på Ditt brev, som nu tyvärr dröjt så länge. Jag

[36] "Bäste Bror" (Best among brother), another strange greeting phrase among university graduates in Sweden, in these days,

kände ju Hilles arbete och litteraturanvisningar. Av dessa fick jag den uppfattningen att Hardy visat, att

$$|f(z)| < \frac{c}{(1-r)^p}.$$

Vad jag däremot önskade veta var, om

$$\limsup(1-r)^{p-2}|f(z)| = \infty \quad (z = re^{i\theta})$$

för *alla* θ eller *nästan alla* θ.

Jag skall nu söka reda ut detta. Förlåt mitt dröjsmål och ännu en gång hjärtligt tack.

Vännen Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, Many thanks for your kindness to give such an extensive answer to my question. Because I have been prevented by some after business I was obliged to leave it aside. I have neither had the possibility to see Hardy's paper in *Natl. Acad. Sc.* mentioned by you, or carry out the calculations for Hardy's example myself.

$$f(z) = \sum n^{\rho-\frac{1}{2}} e^{\alpha i n \log n} z^n.$$

Therfore I do not yet know if it this example that answers my question. It is because of this that I wanted to postpone the answer to your letter, which regretfully now has been delayed that long. I certainly knew Hille's paper and the references to the literature. From these I got the impression that Hardy had shown that

$$|f(z)| < \frac{c}{(1-r)^p}.$$

But what I wanted to know was if

$$\limsup(1-r)^{p-2}|f(z)| = \infty \quad (z = re^{i\theta})$$

for *all* θ or *almost all* θ.

I shall now try to elucidate this. Please, excuse my delay and once more hearty thanks.

Sincerely yours, Fritz Carlson,

2.24.3 Letter Apr 4, 1932

Broder! Jag har äntligen lyckats få tag i Hardy-Littlewoods avhandling. Den lämnar precis det exampel jag önskade, nämligen

$$\limsup_{r=1}(1-r)^{\rho}|\sum n^{\rho-\frac{1}{2}}e^{i\alpha n\log n}z^n| > A > 0$$

för varje $z = r^i$. Synd bara, att denna mycket givande funktion presenteras i en så svårtillgänglig publikation! Från densamma framgår ju t.ex., att

$$\sum_2^\infty \frac{e^{i\alpha n\log n}}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha}e^{in} \quad (\alpha > 0)$$

är likformigt konvergent för alla och att

$$\sum (\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha})^p$$

är konvergent endast om $p \geq 2$ (sedermera behandlat av Hille) och Hardy-Littlewoods avhandling är ju från 1916.

Det förvånar mig att den sats som jag nämnde inte förekommer i littereaturen, för att den är så enkel att erhålla men också därför att den ger en uppfattning av potensseriens storleksordning. Om

$$|a_n| < Cn^p \quad (p \geq -\frac{1}{2})$$

så är

$$|f(z)| = \left|\sum a_n z^n\right| < \frac{C'}{(1-r)^{p+1}} \tag{2.1}$$

för alla . Väljer man t.e.x.

$$f(z) = \sum c_n \frac{z^n}{(1-z^n)^{p+1}} = \sum a_n z^n$$

med $c_n > 0$, $\sum c_n$ konvergent så är

1. $$|a_n| < Cn^p;$$

2. $$\lim(1-r)^{p+1}f(z)$$

   existerar och är $\neq 0$ för alla enhetsrötter e^i så att det finns abzählbar oändligt många radier längs vilka

$$\limsup|f(z)\cdot(1-r)^{p+1}| > 0.$$

Punktmängden där $\overline{\lim}(1-r)^{p+1}|f(z)|$ kan alltså vara abzählbar oändlig; men måste vara en *nollmängd*. Om det finns en serie där mängden ifråga t.e.x. har kontinuets mäktighet vet jag inte.

—

Tack vare Hardy-Littlewoods exempel ser man att $p+\frac{1}{2}$ är den verkliga exponenten,

- den punktmängd där $\limsup(1-r)^{p+1+\frac{1}{2}+}|f(z)|>0$ är *alltid* en nollmängd,
- den punktmängd där $\limsup(1-r)^{p+1+\frac{1}{2}-}|f(z)|>0$ är *kan* innehålla alla $p:r$ i $(0,2\pi)$.

Jag har alltså haft verklig nytta av Dina litteraturanvisningar! Tack!

V-n Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother,

Now I have finally managed to get hold of the Hardy and Littlewood paper. It gives preciely the example I was looking for, namely

$$\limsup_{r=1}(1-r)^{\rho}|\sum n^{\rho-\frac{1}{2}}e^{i\alpha n\log n}z^n|>A>0$$

for each $z=r^i$. It is only a pitty thay this very productive function is presented in so unaccessible publication! From this it follows, for instance, that

$$\sum_2^\infty \frac{e^{i\alpha n\log n}}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha}e^{in}\quad(\alpha>0)$$

is uniformly convergent for all and that

$$\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha}\right)^p$$

is convergent only if $p\geq 2$ (later treated by Hille) and the Hardy-Littlewood memoar is from 1916.

It surprises me that the theorem that I mentioned does not appear in the literature, especially when it is so simple to obtain, but also because it gives an idea of the order of maginitude of the power series. If

$$|a_n| < Cn^p \quad (p \geq -\frac{1}{2})$$

then

$$|f(z)| = |\sum a_n z^n| < \frac{C'}{(1-r)^{p+1}} \tag{2.2}$$

for all . If one takes, for instance,

$$f(z) = \sum c_n \frac{z^n}{(1-z^n)^{p+1}} = \sum a_n z^n$$

with $c_n > 0$, $\sum c_n$ convergent, then

1. $$|a_n| < Cn^p;$$

2. $$\lim(1-r)^{p+1} f(z)$$

   exists and is $\neq 0$ for all roots of unity e^i so that there are f *abzählbar* (uncountably) many radii along which

$$\limsup |f(z) \cdot (1-r)^{p+1}| > 0.$$

The point set, where $\overline{\lim}(1-r)^{p+1}|f(z)|$, can thus be *abzählbar* (countably) infinite; but has to be a *zero set*. I do not know if there is a series where the set in question has for example the power of the continuum.

—

Thanks to the example of Hardy-Littlewood one sees that $p + \frac{1}{2}$ is the real exponent,

- the point set where $\limsup(1-r)^{p+1+\frac{1}{2}+}|f(z)| > 0$ is *always* a zero set,
- the point set where $\limsup(1-r)^{p+1+\frac{1}{2}-}|f(z)| > 0$ *may* contain all $p : r$ in $(0, 2\pi)$.

Thus I have had a real use of your references to the literature! Thanks!

Yours faithfully, your friend Fritz Carlson.

2.24.4 Letter Marstrand July 3, 1935

Broder Riesz

Ett par reflexioner beträffande det problem jag nämnde om.

Vännen Fritz Carlson

Marstrand 3/7 1935

[Betrakta en rektangulär matris med m rader och n kolonner]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[Antag, att]

1) $a_{\mu\nu} \geq 0$

2) $$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots a_{m1}^2 & = & A_1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots a_{m2}^2 & = & A_2 \\ \dots & & \dots \\ a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \dots a_{mn}^2 & = & A_n \end{array}\right\} \text{där } A_1, \dots, A_n > 0 \text{ är givna.}$$

Sökt det största tal M med egenskapen i varje matris med föreg. egenskaper 1) och 2) finns åtminstone en rad med tvärsumman M. M är alltså

$$= \min \max \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}$$

för $\mu = 1, 2, \dots, m$.

Theorem 1 *I en matrix där extremvärdet M uppnås måste alla tvärsummor vara lika,*

I annat fall skulle det finnas en rad med tvärsumman $= M$ och en med tvärsumman $M_1 < M$. Låt

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} &= M, \\ a_2 + a_{22} + \dots + a_{2n} &= M_1. \end{aligned}$$

Betrakta då följande matris:

- a) Alla element i raderna $3, 4 \dots .m$ oförändrade;

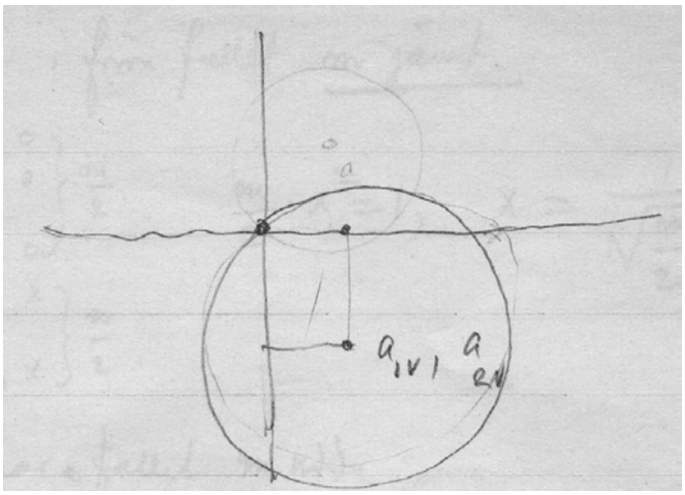


Figure 2.15:

- b) Om $a_{1\nu} > 0$ ersätt det med $a_{1\nu} - x$ och samtidigt ersätts $a_{2\nu}$ med $a_{2\nu} + y$ där x och y är så valda att $0 < x < a_{1\nu}$,

$$(a_{1\nu} - x)^2 + (a_{2\nu} + y^2 = a_{1\nu}^2 + (a_{2\nu})^2,$$

dvs $x^2 + y^2 - 2xa_{1\nu} + 2ya_{2\nu} = 0$.

x, y [är] en funktion på cirkeln.

Tvärsumman för 1:a raden *minskas*, för 2:a raden *ökas*. På grund av kontinuiteten kunna de olika x- och y-värdena väljas så att båda dessa summor bli $< M$: då M enl. antagandet var minsta värdet, så är antagandet $M_1 < M$ *otänkligt*,

---

$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 1$
Om m är en multipel av n, så är

$$M = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$

Bevis: a) Det finns en sådan matrix:

$$\left.\begin{array}{cccc} \overbrace{x & 0 & \dots & 0}^{n} \\ 0 & x & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x \end{array}\right\} n$$

$$\left.\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{cccc}0 & 0 & \dots & x\\ 0 & x & \dots & 0\\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x\end{array}}^{n}\end{array}\right\} n$$

dvs $\frac{m}{n}$ matriser av typen

$$\begin{array}{cccc}0 & 0 & \dots & x\\ 0 & x & \dots & 0\\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x\end{array}$$

ställda ovanpå varandra. Då skall

$$\frac{m}{n}\cdot x^2;$$

tvärsumman är

$$= x = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$

b) Ingen matris kan ha lägre tvärsumman än

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}.$$

[Sätt]

$$\begin{array}{lllll}a_{11}+ & \cdots+ & +a_{1n} & = & z_1\\ a_{21}+ & \cdots+ & +a_{2n} & = & z_2\\ & \dots & & & \\ a_{m1}+ & \cdots+ & +a_{mn} & = & z_m.\end{array}$$

Kvadrera och addera, så fås

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\,\text{st.}}+2\sum_{\mu}+\sum_{\nu,\nu'}a_{\mu\nu}a_{\mu\nu'}=\sum z_\nu^2.$$

Alltså är $\sum z_\nu^2 \geq n$ och om alla z_ν lika är $= x$. [Ur] $m\cdot x^2 \geq n$ [fås]

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}.$$

Om $n = 2$ så är $M = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$ [om] m jämnt; $M = \frac{1}{\sqrt{\frac{m-\frac{1}{2}}{n}}}$ [om] m udda, dvs i förra

fallet m *jämnt*, [ty]

$$\left.\begin{array}{cc} x & 0 \\ x & 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & x \end{array}\right\}\begin{array}{l}\frac{m}{2}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \frac{m}{2}\end{array} \qquad \frac{m}{2}\cdot x^2 = 1,\ x = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2}}};$$

i senare fallet m *udda*

$$\left.\begin{array}{cc} x & 0 \\ x & 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & x \end{array}\right\}\begin{array}{l}\frac{m-1}{2}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \frac{m-1}{2}\end{array} \qquad \frac{m-1}{2}x^2 + \frac{x^2}{4} = 1,\ x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{m-1}{2}}{2}}}.$$

Exempel. $n = 4$, $m = 6$, $M = \frac{1}{\frac{m-1}{n}}$.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 & x \\ 0 & 0 & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{array} \qquad x^2(1+\frac{1}{4}) = 1;\ \ x = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

Translation:

Dear Brother Riesz, A few reflections regarding the problem I mentioned. Yours faithfully Fritz Carlson

[Consider a rectangular matrix with m rows and n columns]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[Assume that]

1) $a_{\mu\nu} \geq 0$

2) $$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots a_{m1}^2 & = & A_1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots a_{m2}^2 & = & A_2 \\ \dots & \dots & \\ a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \dots a_{mn}^2 & = & A_n \end{array}\right\} \text{where } A_1, \dots, A_n > 0 \text{ are given.}$$

We seek the largest number M with the property that in each matrix with previous properties 1) and 2) there is at least one row with across sum[37] M. $M$is thus

$$= \min \max \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}$$

for $\mu = 1, 2, \dots, m$.

Theorem 2 *In a matrix where the extreme value M is attained all across sum must be equal,*

In the opposite case there would exist a row with the across sum $= M$ and another with across sum $M_1 < M$. Let

$$\begin{array}{rcl} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} & = & M, \\ a_2 + a_{22} + \dots + a_{2n} & = & M_1. \end{array}$$

Consider then the following matrix:

- a) All elements in rows $3, 4 \dots .m$ are unchaged;
- b) If $a_{1\nu} > 0$, replace it with $a_{1\nu} - x$ and, simultaneously, replace $a_{2\nu}$ with $a_{2\nu} + y$, where x and y are chosen so that $0 < x < a_{1\nu}$,

  $$(a_{1\nu} - x)^2 + (a_{2\nu} + y^2 = a_{1\nu}^2 + (a_{2\nu})^2,$$

  that is, $x^2 + y^2 - 2xa_{1\nu} + 2ya_{2\nu} = 0$.

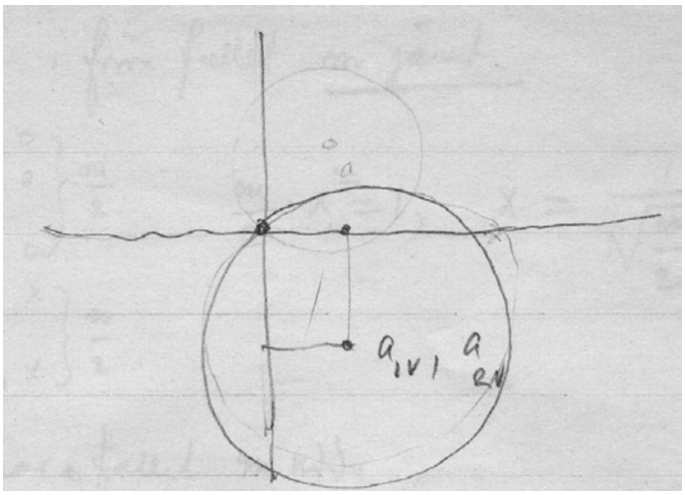


Figure 2.16:

x, y [is] a function on the circle.

The across sum for the 1-st row is *diminished*, for the 2-nd row *increased*. In view of the continuity we can choose the different x- and y-values in such a way that both these sums are $< M$: as by our assumption M is the least value, then the assumption $M_1 < M$ is *unthinkable*,

---

$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 1$
If m *is a multiple of* n*, we have*

$$M = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$

Proof: a) There is a matrix such that :

$$\overbrace{\begin{matrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x \end{matrix}}^{n} \Bigg\} n$$

[37]For any matrix $a_{\mu\nu}$, the *across sum* of the μ-th row we understand here $\sum_\nu a_{\mu\nu}$.

$$\left.\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{cccc}0 & 0 & \dots & x\\ 0 & x & \dots & 0\\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x\end{array}}^{n}\end{array}\right\} n$$

that is, $\frac{m}{n}$ matrices of type

$$\begin{array}{cccc}0 & 0 & \dots & x\\ 0 & x & \dots & 0\\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x\end{array}$$

put one on the top of the other. Then we must have l

$$\frac{m}{n}\cdot x^2;$$

the across sum is

$$= x = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$

b) No matrix can have a lower across sum than

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}.$$

[Set]

$$\begin{array}{lllll}a_{11}+ & \cdots+ & +a_{1n} & = & z_1\\ a_{21}+ & \cdots+ & +a_{2n} & = & z_2\\ & \dots & & & \\ a_{m1}+ & \cdots+ & +a_{mn} & = & z_m.\end{array}$$

Taking squares and adding one gets

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\,\text{copies}}+2\sum_{\mu}+\sum_{\nu,\nu'}a_{\mu\nu}a_{\mu\nu'}=\sum z_\nu^2.$$

Thus we have $\sum z_\nu^2 \geq n$ and if all z_ν are equal $= x$. [From] $m\cdot x^2 \geq n$ [one gets]

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}.$$

If $n = 2$ then $M = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$ [if] m even; $M = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{m-\frac{1}{2}}{n}}}$ [if] m odd, that is, in the previous case m *even*, [because]

$$\left.\begin{matrix} x & 0 \\ x & 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \frac{m}{2} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \frac{m}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \frac{m}{2} \cdot x^2 = 1,\ x = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2}}};$$

in the latter case, m *odd*

$$\left.\begin{matrix} x & 0 \\ x & 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \frac{m-1}{2} \\ \\ \\ \\ \\ \frac{m-1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \frac{m-1}{2}x^2 + \frac{x^2}{4} = 1,\ x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{m-1}{2}}{2}}}.$$

Example. $n = 4$, $m = 6$, $M = \dfrac{1}{\frac{m-1}{n}}$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 & x \\ 0 & 0 & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 & x \\ 0 & 0 & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{matrix} \qquad x^2(1+\frac{1}{4}) = 1; \;\; x = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

2.24.5 Letter Mar 25, 1943

26/3 43.

Broder.

Det skulle väljas en ny ledamot av 1:a klassen, den utländska, och jag ville fråga dig om de via undertecknad bifogade förslag och sedan återsända det till mig. En kortare motivering skall sedan framtagas.

Jag kommer just från Erik Holmgrens begravning, som var här i Stockholm. Det blir en ny plats ledig i den inländska klassen. Det har talats om J. Malmquist som ju har åldern inne. Vad säger Du härom?

Min stackars bok kommer nu, dvs om en vecka eller så.

Vi kanske råkas i Lund under cencorstiden. Hälsningar

Din tillgivne Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, There will be an election of a new member of the 1-st class, the foreign one, and I would like to ask you [about your opinion] concerning the inclosed suggestion added via me and then send it back to me. As short motivation will then be put together.

I have just come from the funeral of Erik Holmgren, which [event] took place here in Stockholm. There will be a new place free in the Swedish class. One has spoken of J. Malmquist, who certainly has the right age. What do you say to this?

My miserable book[38] will soon be published, that is, in a week or so.

May be we see each other in Lund during the examination period. Regards.

Sincerely Yours your friend Fritz Carlson

[38]This is a reference to a geometry text-book by Carlson.

2.24.6 Postcard Äppelviken June 20, 1944

Broder,

kunde jag på ett par dagar få låna Dicksons algebra, som vi talade om som eventuell kursbok? Jag vill se igenom den.

Vännen Fritz Carlson

Författarvägen 27, Ålsten, 20/6

Translation:

Dear Brother, could I borrow, for a couple of days, Dickson's /, which we spoke of as a possible prescribed book? I would like to have a look at it.

Sincerely yours, your friend Fritz Carlson

2.24.7 Letter Ålsten Feb 2, 1946

Broder,

Då vi reste spårvagn tillsammans nämnde du, att du senare skulle överväga, om du skulle trycka din monografi i *Acta* eller i skriftserien. Carleman ansåg, att man gärna kunde anstå ytterligare en tid med Fredholms samlade arbeten, och på så sätt skulle pengar finnas för din bok i skriftserien. Jag tycker, att det vore bra om du toge den vägen.

Som du väl vet, har det inte blivit något av de gemensamma skrivningarna detta läsår. Emellertid borde jag inte påminna Dig om så tråkiga saker som tentamina. Jag ville endast be dig tala med Beurling; själv har jag ingen önskan.

Tillgivne Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, When we were traveling together in the tram, you mentioned that you would later consider if you were to print your monograph in the *Acta* or in the series of memoirs [of KVA]. Carleman was of the opinion that one could still wait some time with the collected works of Fredholm, so in this way there would be money for your book in the series of memoirs. I think that it would be excellent if you were to take that route.[39]

As you certainly know, nothing came of our plans to have common written examinations during this academic year. However, I should not remind you of such dull thing as exams. I just want you to speak to Beurling; I myself have no wishes.

[39] *Ed.* it was after all publishe in the *Acta* [**?**].

Sincerely Yours Fritz Carlson

2.24.8 Letter Stockholm Mar(?) 13, 1945

Broder, Beurling och jag har gått igenom uppg. och föreslå

AB 19/3 1. Undersök ant. reella rötter
2. $f(x)$ deriverbar $\ldots \int_0^\tau |\alpha - f(x)|dx$

3. $\lim \sum_{\nu=0}^{\infty}(1 - \frac{2\nu}{n^2})^{n^2}$
5. $P_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$.

Visa att P_n polynom med positiva, dist. nollst.
Visa att $\int e^{-x}P - nP_m dx0 =$, $n \neq m$. (Inget mera)

20/3 6. Två godt. rätvinkliga
7. C sluten konvex
8. En 2:a gradsyta, som har ett symmetriplan e, skäres med ett klot osv.
9. $|x|^p + |y|^p = 1$. (Ingen generalisation för rymden.)

B 19/3 1. Visa att yta är ett cirkelsegment.
2. Angiv $\ldots x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2)$
3. $x_1x_2x_3$ rötterna för

4. Sök $\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3}}$

20/3 5. En ellips har brännp. ...
6. En liksidig hyperbel
7. AB diameter i en cirkel ...
8. Genom hörnen i en triangel

(med hänsyn till att 5. 6. 7. äro lätta fick 8 kvarstå).

Hj. hälsningar Hälsningar

Arne Beurling F. Carlson

Translation:

Dear Brother, Beurling and I have gone over the problems [for the written exams] and suggest. ...

Hearty Greeting

Arne Beurling F. Carlson

2.24.9 Letter Djursholm Mar 28, 1950

Djursholm den 28 mars 1950

Broder,

Akademiens Sekreterare föreslår att en nationalkommitté för matematik bildas och att denna (i likhet med vad bl.a. botanister och zoologer gjort) består av 1:a klassen. Sedermera kan en ju taga upp frågan om ev. utvidgning av kommitén tagas upp liksom frågan om ordförande o. dyl. I en del fall (t.ex. botanister) har detta tillsvidare lämnats å sido. Ber Dig underteckna bifogade skrivelse och sända den antingen åt mig eller till Sekreteraren.

Hjärtliga hälsningar
Tillgivne Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, The Secretary of the Academy suggests that a National Committe for Mathematics be formed and that it (similarly to, what for instance the botanists and the zoologists have done) consists of the 1-st Class. Later one can, of course, bring up the question of a possible extension of the committe, as well as the question of chairman and such. In some cases (for instance, the botanists), this has, for the present, been left aside. I ask you to sign the attached document and send either to me. or to the Secretary,

yours faithfully Fritz Carlson

2.24.10 Letter Stockholm Apr 23, 1952

Institut Mittag-Leffler

Djursholm

Broder,

angående invalet i Akademien, så går nog Wiman på Frostman. Skriv ett förslag på F. och be Wiman skriva på, sänd det sedan till mig, så skall jag fråga Nagell om han vill skriva på. Men formulera förslaget klokt.

Tuus
Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, Regarding the election to the Academy, Wiman will probably support Frostman. Please, write a letter supporting F. and let Wiman sign, send it then to me, then I shall ask Nagell if he will join. But you must formulate it in a clever manner.

Tuus
Fritz Carlson

2.24.11 Letter Djursholm Sep 2, 1952

Djursholm den 2/9 1952

Broder, efter några diskussioner ha Beurling och jag samsats om bifogade protokoll, som jag anhåller Du ville, om Du anser det rikigt, pryda med Din underskrift.

Förslaget på Pleijel har jag underteckat och sänt till Sekreteraren.

Hj. hälsning tillgivne Fritz Carlson

Translation:

Dear Brother, After some discussion, Beurling and I have agreed on the attached minutes, which I beg you, provided you find it correct, decorate with your signature.

I have signed the suggestion [for the election] of Pleijel and sent it to the Secreterary.

Sincerely Yours Fritz Carlson.

2.25 Maja Carlsson

2.25.1 Undated Note, Postal Stamp Stockholm 27 Jul, 1926

Dear Professor Riesz, Med detta goda svarta bläck skriver jag nu till Eder och översänder detta kort om det roar Eder att se, huru familjen Bergholm med gäster togo sig ut midsommardagen 1926.

Trevlig semester och många hälsningar Maja Carlsson

Translation:

Mister Professor Riesz, With this excellent black ink, I write now to you and transmit this card if it please you to see what the Bergholm family and their guests looked like on Midsummer Day 1926.

A happy holiday and many greetings Maja Carlsson

2.26 Gustaf Cederstrand

2.26.1 Letter Stockholm Jan 1 1922

Stockholm, den 1 januari 1922

Skeppargatan 41 [troligen med Riesz hand]

Bäste Broder!

Vi talade en gng under försommaren 1921 om det ekonomiska betrycket[41] för matematiken i Tyskland, Österrike och Ungern. Detta ledde ju till att jag beslöt söka ngot för att stadkomma lättnad därutinnan. Jag har ocks sedan dess otligt väntat p det ena och än p det andra för att komma fram till ett resultat, och en lng tid har jag ju tyvärr kommit att förlöpa under denna väntan. Nu artar det sig emellertid, till min stora glädje, att kunna bliva ngot konkret utan min tanke. v. och har nämligen anslutit sig till ett upprop om en penninginsamling och Bendixson och Fredholm liksom ngra yngre äro, tyckes det, att präkna. Men det har uppsttt en liten svrighet, som kanske Du kan undanröjda, och det är därför, jag nu tillskriver Dig. Saken är följande.

Min tanke var ju först – med utgngspunkt ifrn en uppfattning, jag ftt av vrt samtal – att vi frn Sverige skall lämna *Acta* som gva till universitet (o. likn.) i Tyskland, Österrike och Ungern, och jag tänkte mig, att vi / ocks skulle kunna genom detta framkalla liknande handlingar frn andra nationer. v. och delade emellertid inte denna sista förhoppning; p den grund ansg han lämpligare, att vi inriktade de sannolikt helt begränsade möjligheter, som skulle kunna sammanbringas, p att bispringa – tminstone i första hand – en speciell institution. Han berättade ocks, att Kolosvár avträtts till Rumänien, och att dess universitet terupprättats i Szeged[in], men att detta under kriget förlorat hela sitt bibliotek. Denna institution insg han därför lämplig, att man försökte bispringa för anskaffade av litteratur (matematisk). Man vinner, som det tycks, lättare anslutning till en aktionsform av detta slag, och den är väl därför bäst att välja. Kännedomen om de ekonomiska betingelserna i de nämnda länderna tycks emellertid varken vara just säker eller omfattande hos dem. Som Du förstr representerar istället Bendixson skepticismen, ehuru väl

[40]Gustaf Cederstrand (1890-1974), astronomer, registered at SH 1910, amanuensis SH 1913-1917, amanuensis KVA Observatory, 1913-1918, director of Skansen Observatory 1923-1928, later school-teacher, fil. kand. 1915, fil. lic. 1916.

[41]nöd,

han lägger i dagen all välvilja gentemot mina intentioner. Det har därför, särskilt för hans del visat sig nödvändigt hava riktigt säkra uppgifter att stödja sig p, dels ifrga om de allmänna ekonomiska betingelserna för matematiken i Tyskland, Österrike och Ungern dels om speciellt svrt ställda institutioner i dessa länder. Är Du i tillfälle lämna upplysningar om dessa saker, vore jag mycket tacksam för dem. Säg mig annars godhetsfullt, hur jag skall kunna skaffa dem. Skriftliga upplysningae är allts, ssom Du förstr, vad som erfordras. Bendixson har ltit mig först/, att sdana, lämnade av Dig, äro honom tillfyllest. Fr jag dem, skall jag slunda förelägga honom dem.

Jag föreställer mig, att hela denna sak ligger Dig om hjärtat väl som mycket som mig, och inskränker därför min begäran om ursäkt till att omfatta endast min ovrdade brevskrivning. Den skulle emellertid hav blivit mera vrdad, om det icke varit min iver, att nu, / det artar sig, komma till ett snabbt resultat

Slutligen, ett gott nytt år!
Vänskapsfullt Gustaf Cederstrand

Translation:

Dear Brother, During the early summer of 1921 we spoke once about the finacial distress for mathematics in Gemany, Austria and Hungary. As you remember, this led me to decide that I should try to do something in order to bring some relief in the situaton. Since then I have also impatiently waited for one thing after the other to occur in order to arrive at a result, and, regtretfully, a long time has passed during this suspence.

But now it looks, to my great pleasure, that there may be something concrete without my intervention. Namely v. Koch has joined an appeal for found-rasing, and Bendixson and Fredholm, as well as some younger ones, it seems, may be counted. But there has arisen a little difficiulty that you maybe can remove, and it is why I now write to you. It is the following.

My first idea was, as you know. – starting with the impression that I got from our conversation – that we in Swedem will offer *Acta* as a gift to universities (etc.) in Germany, Austria and Hungary, and I thought that we then also could in this way induce similar acts from other nations. v. och, however, did not share this last expectation; on this basis, he was of the opinion that it would be more suitable that we directed the probably quite limited possibilities, that could be collected, to assist – at least in the first place – a particular institution. He told also that Kolozsvár has been ceded to Romania, and that its university has reopened in Szeged[in], but that it did lose its whole library during the war. Therefore he considered this institution as a suitable one to be supported by obtaining literature (mathematical). It seems that one more readily gains association to form of an action of this kind, and so it is therefore probably the best to choose. Knowledge

of the economical conditions in the said countries. however, does not seem to be neither sure nor extensive to them. As you understand, Bendixson instead represents scepticism, although he pretends to show all benevolence towards my intentions. Therefore it has proved necessary, especially because of him, to have absolutely correct information to rely on, both concerning the financial condition for mathematics in Germany, Austria and Hungary, and about institutions in those countries, whose situation is especially severe. If you were in a position to give information about this, I would be much obliged for it. Else tell me kindly how I could acquire it. What is needed, as you understand, is written information. Bendixson has let me understand that such provided by you would be sufficient to him. If I get such I shall thus present it to him.

I imagine, that you have it very much at heart – as much as I myself – and I restrict therefore my demand of an excuse to comprise only with my careless manner of writing letters. However, it would have been even more careless, if I had not been so eager to arrive to a quick result, now when the thing seems to begin moving.

Finally, I wish you a Happy New Year!
Sincerely yours, Gustaf Cederstrand

2.27 Carl Vilhelm Ludvig Charlier

2.27.1 Undated Letter probably around 1930

Broder Riesz!

Med *Kamedas* [98] bevis är jag nog på det klara. Det är utmärkt därför att det är enkelt och rätt fram. Fast det nog har sina betänkligheter. Det är emellertid ej därför jag nu ville besvära Dig.

I mämnda bevis, och liknande, fäster man vissa villkor vid den funktion som skall utvecklas (i A-serie). Äro villkoren uppfyllda så kan funktionen utvecklas i en konvergent serie. Och detta är ju bra emellanåt att veta.

Om man betraktar, såsom jag gör, en frequens funktion såsom uppkommen genom addition av ett stort antal små inflytanden, så är det av intresse att veta: hur skall

[42]Carl Vilhelm Ludvig Charlier (1862934), astronomer, professor at LU 1897927. C. devoted himself first to celestial mechanics and wrote the text-book *Die Mechanik des Himmels* (German, Mechanics of the Heavens, 1, 19027). C. obtained his greatest fame when he around 1905 began to investigate the foundation of mathematical statistics and then applying statistical theory in many branches of astronomy (the so called Lund school of stellar statistics). His hierarchic model of an infinite universe is well-known. He translated into Swedish, and commented Newton's *Principia*(1, 19271). [114].

frekvens funktionen för dessa källor vara beskaffad för att resulterande frekvenser låta uttrycka sig i en A-serie?[43]

Jag skall ej uppehålla dej med några detaljer om dessa saker. Matematiskt sett torde frågan kunna reduceras till följande problem:

Låt $f(x)$ vara en frequens funktion (för en tillhörande källa), som uppfyller följande villkor

(a) $f(x)$ är positiv för alla värden på x.

(b) $f(x)$ är alltid mindre än 1.

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = +1$.

Och vi kunna också, i detta sammanhang, tillägga att vi kunna anta

(d) att $f(x)$ är kontinuerlig och ej har oändligt tätt liggande max. och min.

2. Antag nu att $P(\omega)$ är en funktion definierad genom /en

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{ix\omega} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Jag vill bevisa att $P(\omega)$ är en *holomorf* funktion, om man pålägger ännu ett villkor (5), som sedan skall definieras.

Enl. (5) är $P(0) = +1$.

Antag först att ω är *reell*. Då är, såsom *Poisson* har bevisat för cirka 100 år sedan,

$$|P(\omega)| < 1 \quad \text{för } \omega \neq 0.$$

Ty

$$\begin{aligned} |P(\omega)|^2 &= [\textstyle\int dx f(x) \cos x\omega]^2 + [\int dx f(x) \sin x\omega]^2 = \\ &= \textstyle\int dx f(x) \cos \omega x \times \int dx' f(x') \cos x'\omega + \\ &+ \textstyle\int dx f(x) \sin \omega x \times \int dx' f(x') \sin x'\omega = \\ &= \textstyle\iint dx dx' f(x) f(x') \cos(x - x')\omega, \end{aligned}$$

som uppenbarligen är < 1.

Antag sedan att ω är imaginär: $\omega = a + b\sqrt{-1}$: Då är

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \textstyle\int dx e^{-bx + ax\sqrt{-1}} \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-bx} \cos ax + \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-bx} \sin ax \end{aligned}$$

och genom att använda samma konstgrepp som *Poisson* får man att

$$|P(\omega)| \leq m$$

[43] A-series appear in probability, they attempt to give corrections in the central limit theorem in the convergence to the normal distribution. Harald Cramér wrote about these and other series. See [31], Chap. 19.6.

om vi anta

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-bx} = M$

och ponera $\underline{\mathrm{M}}$ oberoende av (e).

Således, om vi anta $f(x)$ uppfyller villkoret (e) blir $P(\omega)$ ändligt för alla ändliga, reella eller imaginära värden på ω. Om man anser $P(\omega)$ som en analytisk funktion, är alltså $P(\omega)$ en *holomorf* funktion av ω och kan utvecklas i en *ständigt* konvergent potensserie av ω (eller ωi).

3. Låt $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ vara s funktioner allesammans uppfyllande villkoren (a), ..., (e) samt $P_1(\omega), P_2(\omega), \ldots, P_s(\omega)$ vara de motsvarande P funktionerna. Då är $P_1, P_2, \ldots, P_s$ också holomorfa av ω och likaså

$$X(\omega) = P_1(\omega)P_2(\omega)\ldots P_s(\omega).$$

Låt oss nu betrakta funktionen

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega)e^{-z\omega i}.$$

Skulle man här för $X(\omega)$ insätta en potensserie i ω (eller ωi) kunde man naturkigtvis icke integrera term för term, då gränserna är $\pm\infty$, men man kanske kan skaffa en annan utveckling.

Eftersom $X(\omega)$ is holomorf, så är också

$$e^{-a_1 i\omega - a_2 i^1\omega^2} \times X(\omega)$$

en holomorf funktion och kan säkert skrivas under formen

$$1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu,$$

som ständigt konvergerar. Ergo är

$$X(\omega) = e^{-a_1 i\omega - a_2 i^1\omega^2}[1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

och nu är *måhända* villkoren för integation term för term uppfyllda. Jag medger att villkoren i *är mwich* [20] §176 ej fullt uppfyllda. Så $\sum A_\nu i^\nu \omega^\nu$ är visserligen konvergent uniformt för alla ändliga ω men ej för $\omega = \infty$. Men kan här ej utfyllas med nytt villkor?

Om man får integrera term för term då är A-serien direkt given. Det är den väg jag har gått. Det kan naturligtvis fyllas igen genom att påtvinga $F(x)$ vissa villkor (t.ex. Kamedas), men kan man ej lägga villkoret på $f(x)$?

4. Om vi ej betrakta en produkt av P-funktioner utan tager en enda P-funktion så blir

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega)e^{-z\omega i} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ix\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)e^{iy} \end{aligned}$$

och då är ju enligt / $F(x) = f(x)$.

På det sättet kunde ju direkt ett villkor på $f(x)$ erhållas för framställning i A-serie.

Du kan ju, om Du har tid, titta på ovanstående. Kanske kan Du omedelbart säga mig lösningen? Du behöver ej skriva, det är enklare att telefonera. Fast jag tyckte mig bättre skriftligen framställa saken såsom den står för mig.

Vännen CVL Charlier

I det sista fallet (§4) har man

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{iy\omega}$$

och vet att $P(\omega)$ är holomorf, om $f($$y$ uppfyller villkoren (a) ... (e). Ergo är

$$e^{-a_1 i\omega - a_2 i^2\omega^2} \times P(\omega)$$

holomorf och således

$$P(\omega) = e^{a_1 i\omega + a_2 i^2\omega^2}[1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

och

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-(x-a_2)i\omega + a_2 i^2\omega^2}[1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

och den första termen är

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(x-a_2)i\omega + a_2 i^2\omega^2} = \phi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{(x-a_1)^2}{2a_2}}$$

och de senare termerna dess derivator såsom omedelbart framgår av integraluttrycket för $\phi(x)$.

Translation:

Dear Brother Riesz, I am quite familiar with *Kameda's* proof [98]. It is excellent, because it is simple and straightforward. But probably it has its doubts. However, it is not because I now want to trouble you.

In the mentioned proof, and in similar ones, one attaches some conditions on the function to be developed (in an A-series). If these conditions are fulfilled, the function can be expanded in a convergent series. Which is good to know sometimes. If one considers, as I do, a frequency function arising by addition of a great number of small influendces, it

is of interest to know: how shall the frequency function of these sources be constituted in order that the resulting frequencies admit an expansion in an A-series?[44]

I shall not bother you with any details about these things. Mathematically viewed the question may be reduced to the following problem:

Let $f(x)$ be a frequency function (for a / source) satisfying the following conditions

(a) $f(x)$ is positive for all values of x.

(b) $f(x)$ is always less than 1.

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = +1$.

And we can also, in this connection, add that one may assume

(d) that $f(x)$ is continuous and does not possess infinitely densily siuated max. and min.

2. Assume now that $P(\omega)$ is a function defined by the equation

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{ix\omega} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

I wish to prove that $P(\omega)$ is a $\nearrow$ function of ω, if one imposes yet another condition (5), which will be defined below.

According to (5) one has $P(0) = +1$.

Assume first that ω is *real*. Then, as *Poisson* proved c. 100 years ago,

$$|P(\omega)| < 1 \quad \text{för } \omega \neq 0.$$

Because

$$\begin{aligned} |P(\omega)|^2 &= [\int dx f(x) \cos x\omega]^2 + [\int dx f(x) \sin x\omega]^2 = \\ &= \int dx f(x) \cos \omega x \times \int dx' f(x') \cos x'\omega + \\ &+ \int dx f(x) \sin \omega x \times \int dx' f(x') \sin x'\omega = \\ &= \iiint dx dx' f(x) f(x') \cos(x - x')\omega, \end{aligned}$$

which apparently is < 1.

Next assume that ω is imaginary: $\omega = a + b\sqrt{-1}$: Then

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int dx e^{-bx + ax\sqrt{-1}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-bx} \cos ax + \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-bx} \sin ax + \sqrt{-1} \end{aligned}$$

and using the same clever device as *Poisson* one gets that

$$|P(\omega)| \leq m$$

[44] A-series appear in probability, they attempt to give corrections in the central limit theorem in the convergence to the normal /. Harald Cramér wrote about these and other series. See [31], Chap. 19.6.

if we assume

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-bx} = M$

and suppose now that M is independent of (e).

Thus, if we assume that $f(x)$ satisfies condition (e), then $P(\omega)$ will be finite for all finite, real or imaginary values of ω. If one regards $P(\omega)$ a an / function, then $P(\omega)$ is thus a / function of ω and can be developed into a *steadily* convergent power series of ω (or ωi).

3. Let $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ be s functions all filfilling the conditions (a), ..., (e), $P_1(\omega), P_2(\omega), \ldots, P_s(\omega)$ being the / P functions. Then $P_1, P_2, \ldots, P_s$ also are / in ω and likewise

$$X(\omega) = P_1(\omega) P_2(\omega) \ldots P_s(\omega).$$

Let us now consider the function

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega) e^{-z\omega i}.$$

If one here would substitute for $X(\omega)$ a power series in ω (or ωi) one could of course not integrate term by term when the limits are $\pm\infty$, but one could perhaps produce another expansion.

As $X(\omega)$ is /, then

$$e^{-a_1 i\omega - a_2 i^1 \omega^2} \times X(\omega)$$

is a / function and can surely be written in the form

$$1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu,$$

which is steadily convergent. *Ergo* is

$$X(\omega) = e^{-a_1 i\omega - a_2 i^1 \omega^2} [1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

and now *maybe* the conditions for integration term by term are fulfilled. I admit that the condition in *Bromwich* [20] §176 are not fullu fulfilled. as athough $\sum A_\nu i^\nu \omega^\nu$ is convergent uniformly for all finite ω but not for $\omega = \infty$. But cannot here be filled out by a new condition?

If one is allowed to integrate term by term, then the A-seried is directly given. It is the path I have walked. It can of course be filled again by imposing on $F(x)$ some restraint (e.g. Kameda), but one cannot put the condition on $f(x)$?

4. If we do not regard a product of P-functions but take a single P-function we obtain

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega) e^{-z\omega i} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ix\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{iy} \end{aligned}$$

and then one has, according to /, $F(x) = f(x)$.

In this way one could, of course, obtain directly a condition on $f(x)$ for representation in an A-series.

You can, if you have time, have a look on the above. Perhaps you can tell me immediately the solution? You need not write, it is simpler to phone. But I thought it was better to present the thing in writing the way I see it.

Yours faithfullly, your friend CVL Charlier

In the last case (§4) one has

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{iy\omega}$$

and knows that $P(\omega)$ is / provided $f(y)$ fulfills the conditionds (a) ... (e). *Ergo* is

$$e^{-a_1 i\omega - a_2 i^2\omega^2} \times P(\omega)$$

/ and thus

$$P(\omega) = e^{a_1 i\omega + a_2 i^2\omega^2}[1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

and

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-(x-a_2)i\omega + a_2 i^2\omega^2}[1 + \sum A_\nu i^\nu \omega^\nu]$$

and then the first term is

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(x-a_2)i\omega + a_2 i^2\omega^2} = \phi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{(x-a_1)^2}{2a_2}}$$

and the later terms its derivatives, as results immediately from the integral expression for $\phi(x)$.

2.28 Stig Comét

2.28.1 Letter Stockholm 9 Mar 1941

Broder.

Då jag nu sänder några skriverier, vill jag passa på och tacka Dig för Din välvilja mot mig, och särskilt tänker jag då på vad som hände. när jag senast var i Lund. Det var ansträngande – men roligt, och det är i en känsla av befrielse, som jag nu efter examen pysslar med matematik.

Under det gångna kokslovet har vårt lilla privata seminarium, som Du kanske minns jag talade om, sammanträtt ganska ofta, och då ha vi gemensamt läst och diskuterat Mac Duffe's matrisbok. Den är koncentrerad och ger ibland anledning till spekulationer. Redan på sid.2 fick jag en del funderingar, vilka resulterade i bifogade "Note sur la représentation régulière d'une algèbre linéaire". Innehållet kompletteras rätt naturligt med den lilla satsen om vänsterenhetselement (§4), som uppstod av följd av ett "hemtal", jag fick under tentamina. Uppsatsens resultat (de kursiverade meningarna i slutet av §2, i mitten av §3 och i början av §4) torde, så vitt jag har kunnat finna, vara nya – även om de ej är särskilt sensationella.

Dessutom medsänder jag "Une applications des nombres complexes à un problème de la géométrie élémentaire", vars innehåll är en något förbättrad upplaga av seminarieföredraget den 28 jan. Av räkningarna har jag medtagit så mycket, att läsare inte skall behöva känna det obekvämt. Den "involution" som ekv. (A) med variabla r skulle ge upphov till, har jag ännu ej undersökt, då detta väl skulle falla utom ramen för denna elementära uppsats. Jag skall emellertid försöka, både med ekv. (A) och ekv. (A_n), som gäller för en omskriven n-hörning. Beträffande n-hörningar har en japan, Tyuzi Adati [2] bl.a. härört ett samband mellan de symmetriska funktionerna av de tal, som i det komplexa talplanet svara mot hörnpunkterna, z_j. De äro emellertid mera invecklade, på grund av att han använder z_j och inte $\dfrac{z_j}{r_j}$; enkla samband kan man få fram ur formelm mittpå sid 7.

[45] Stig Comét (1908-1981), studied under Marcel Riesz at LU, fil.mag. 1930, fil.lic. 1941, "adjunkt" (adjoint) at the "högre allmänna läroverket" (grammar school) in Bromma 1939-1946, "laborator" at the FRA (Defence Radio Institution) since 1953, consultant at Unesco 1958-59. He was the Swedish chief delegate at a conference on programming languages, arranged by Unesco in Paris in the latter half of the summer of 1958 [?]. Also member of the organization Committe of the conference. In 1961 he represented FRA at a conference in Teddington about "Machine translation of languages". In 1964 Comét moved to Darmstadt, where he was employed by the European Space Data Centre, and in 1972 to Italy. He was the director of a Euoropean International Computing Center in Rome. After retirement he is supposed to have become a wine grower. He died Italy. [Personal communication from Hans Riesel, Bengt Beckman and Stig-Arne Ekhall along with Rooney Magnusson.]

Så ber jag Dig slutligen "communiquer¨ uppsatserna, om Du tycker att de är värda publicering. Språket har jag låtit en kollega på läroverket (språklärare) titta på, så att de värsta felen torde vara borta. För den händelse Du anser uppsatserna redan vara tryckfärdiga, bifogar jag t.o.m. ett P.M. till tryckeriet.

Till slut en hjärtlig hälsning från

Din tacksamme och tillgivne Stig Comét.

Translation:

Dear Brother, When I now send you some manuscripts, I would like to thank you for your benevolence against me, and, in particular, I think of what happened last time I was in Lund. It was trying – but fun, and it is with a feeling of relief that I now after my exam busy myself with mathematics.

During the past coke-holiday[46] we had our little private seminar, that you perhaps recall that I spoke of, which did meet rather often, and we had then read together and discussed Mac Duffe's matrix book. It is condenced and gives sometimes rise to speculation. Already on page 2 I got some ideas which resulted in the attached "Note sur la représentation régulière d'une algèbre linéaire" (French, Note on the regular representation of a linear algebra). Its contents are complemented in a natural way with the little theorem about the left unit element (§4), which arose as a sequel to the "homework" I got during my examination. The results of the paper (the slanted sentences at the end of §2, in the middle of §3 and the beginning of §4) ought to be, as far as I have been able to find, new – even if not very sensational.

In addition, I include "Une applications des nombres complexes à un problème de la géométrie élémentaire" (French, An application of complex numbers to a problem of element geometry), which is a somewhat improved version of my seminar talk on 28 January. I have included, of the calculations, that much so that the Reader does not have to find it uncomfortable. The "involution" that equation (A) with variable r should give rise to, has not yet been investigated by me, as it probably shoul fall outside the frame of this elementary paper. However, I shall try with both with equation (A) and equation (A_n), which hold for a surcumscribed n-gone. Regarding n-gones there is a Japanese, Tyuzi Adati [2] who has, among other things, derived a relation between the / functions of the numbers in the complex plane corresponding to the corner points, z_j. These are however more involved, because he uses z_j and not $\dfrac{z_j}{r_j}$; simple relations can be obtained from the formula in the middle of page 7.

[46]Such a holiday was introduced in Sweden in 1940 in order to economize in classrooms. [172].

Finally I ask you to "communiquer" (French, communicate) the papers, provided you find them worth to be published. I have asked a colleague at the grammar school (a language teacher) to have a look on the French, so the worst errors are probably removed. In case you find them already fit printing, I have even attached a P.M. to the printer.

Finally a hearty greeting to you

Yours faithfully, Stig Comét.

2.28.2 Postcard Stockholm 12 Jun 1941

Broder!

Vill med dessa rader tala om att jag blivit inkallad till militärtjänst fr. o. m. den 16 juli. I telefonsamtalet nämnde Du, att Du skulle komma till Stockholm just den dagen, och jag gladde mig åt ett sammanträffande. Tydligen får jag nu i stället gå och glädja mig åt ett sammanträffande längre fram. Kontakten kan dock upprätthållas per post, ty posten eftersändes tlll mig. Med hjärtliga hälsningar från

Din tillgivne krigare Stig Comét

Translation:

Dear Brother, With these lines I wish to tell you that I have been called up for military service from 16 Jul on. In your phone call you told that you would come to Stockholm precisely that day, and I was so glad to meeting you. Apparently, I have instead look forward to meeting you later on. But we can still keep contact by mail, because my mail will be forwarded. With hearty greetings

Yours faithfully, your warrior Stig Comét

2.28.3 Letter Stockholm 12 Jul 1941

Broder!

Nu har jag hittat det där stället i *Elementa*, som jag tänkte på, när det gällde kägelsnittets / i avseende på ett par konjugatdiametrar som koordinataxlar. Det är Henrik Petrini [132]. I den andra av dessa uppsatser ingår ett avsnitt om snedvinkliga koordinater. Däri behandlas (p. 130 ff) "den allmänna andragradsekvationen", varvid (efter en kort betraktelse) symmeteriegenskaperna kring konjugatdiametrarna användes för att härleda /ens form: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$. Diskussionen av $\pm$ fullföljes ej, emedan förf. endast vill framföra *metoden* (för eventuellt skolbruk). Inte heller nämnes *explicit* något om

att välja (halva) diametrarna till enhetsvektorer; följden av ett sådant val framgår dock omedelbart.

En hänvisning till detta ställe tror jag i alla fall inte skulle skada.

Så önskar jag Dig en fortsatt, skön sommar!

Hjärtlig hälsning från Din tillgivne Stig Comét.

P. S. Mina uppsatser i Elementa före den om matriser ha alla kommit tidigare än 1939. Därför är det väl knappast någon idé, att jag skriver till bibliotekarie Norlind (utan h!) om den. D.S.

Translation:

Dear Brother, Now I have found the passage in *Elementa*, which I thought of in connection with the equation of the conic section / a pair of conjugate diameters a coordinate axes. It is Henrik Petrini [132]. In then second of these notes there is a passage about oblique coordinates. The author treats here (p. 130 etc.) "the general second order equation", where (after a short consideration) the symmetry properties about the conjugate diameters are used for the deduction of the equation's form: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$. The discussion of $\pm$ is not pursued, while the author only wants to present the *method* (for possible use in school). Nor does he say anything *explicit* about choosing the (half) diameters as unit vectors; the consequence of such a choice follows however immediately.

A reference to this passage, I believe in any case, would not harm. Finally, I wish you a continued pleasant summer!

Yours faithfully, Stig Comét.

P. S. All my notes in the *Elementa* before this one about matrices did appear earlier than 1939. Therefore it hardly makes sense that I write to Librarian Norlind (without an h!) about it. *Idem.*

2.28.4 Letter Stockholm 4 Aug 1941

Broder!

Nu sänder jag Dig åter en uppsats. Den är resultatet av funderingar på att generalisera satserna om sfärer som tangerar varandra. I själva verket kunna förutsättningarna hållas ganska allmänna. Avståndsbegreppet definieras med en bilineär form. Beträffande "koordinaterna" behöver man endast förutsätta att de tillhör en kropp, vars karakteristika dock ej får vara 2 eller delare till $n-1$, om n = antalet dimensioner i rymden. Man

får således ganska allmänna resultat. Tillämpningar på vissa punktgitter har roat mig mycket!

Determinanträkningarna tycker jag själv att jag har lyckats pressa ihop riktigt ordentligt tack vare matrisbeteckningarna. Hoppas att Du anser detsamma!

Finessen (om jag får använda ett så fint ord), som gör att man kan härleda formlerna (25), (26), (27) på samma gång, är utbytet av f mot ϕ i §8, "Passage au cas général"; ϕ är symmetrisk i alla indices $0, 1, 2, \ldots, n$, vilket inte f är.

Och så får jag be Dig, om Du finner de värd att publiceras, lägga fram den för Fysiografiska Sällslapet. Sedan lovar jag (om möjligt) i framtiden undvika sfärer som tangerar varandra!

Till sist en hjärtlig hälsning från

Din tillgivne Stig Comét.

Translation

Dear Brother, Now I send you again a note. It is the results of thoughts to generalize the theorems about spheres tangent to each other. As a matter of fact, the assumptions can be kept rather general. The notion of distance is defined by a bilinear form. Concerning "coordinates" one needs only to assume that they belong to a field, the characteristic of which must not be 2 or a divisor of $n - 1$, where $n =$ is the number of dimensions in space. One gets thus rather general results. The applications to certain point lattices have amused me a lot !

The determinant calculations, I think myself, have been squeezed to a minimum thanks to the matrix notation. I do hope that you think likewise!

A special point, which make it possible to deduce the formulae (25), (26), (27) simultaneosly, is the exchange of f for ϕ i §8. "Passage au cas général" (French, Passage to the general case); ϕ is symmeric in all indices $0, 1, 2, \ldots, n$, but f is not.

Finally, I ask you, if you judge my note worth a publication, to present it to the LFS. Then I shall promise (if possible) to try to avoid spheres tangent to each other in the future!

Yours faithfully, Stig Comét.

2.28.5 Letter Stockholm 10 Oct 1941

Broder!

Här sänder jag nu den utlovade andra upplagan av "Un problème de la géométrie à n dimension", praktiskt taget befriad fråm determinanter.Härledningarna är nu korrekta även för icke-kommutativa rymder, där koordinaterna är hämtade från någon kommutativ kropp. Sålunda gälla de speciellt för t.ex. för Cliffordska tal.

"Passage au cas plus général" har jag gjort om och varit mycket försiktg med (med tanke på eventuella nolldelare). Även remarque B är fullständigt omarbetad, så att det skall gälla även [om] kroppen C inte är "angeordnet".

Därmed tror jag uppsatsens innehåll har blivit generaliserat så långt som möjligt. Och nu ber jag Dig att, om Du tycker den är värd att publicera, lägga fram uppsatsen för FS. Med många hälsningar från

tillgivne Stig Comét

Uppsatsens 1:a upplaga kan makuleras.

Translation:

Dear Brother, Here I send you now then promised second edition of "Un problème de la géométrie à n dimension" (French, A problem in n dimensional geometry.), practically liberated from determinants.[47] The derivations are now correct even in non-/ spaces, where /s are taken from a non / field. Thus they hold, in particular, for example, for Clifford numbers.[48]

"Passage au cas plus général" has been altered; I have been very careful (with possible zero divisors in view). Also Remark B has been changed completely, so that it would hold even if the field C is not "angeordnet" (ordered).

In this way, I believe, the paper's content has been generalized as far as possible. And now I beg you that you, if you find it dign to be published, to present it to the LFS.

yours faithfully Stig Comét

The paper's first editíon may be maculated.

[47] The author speaks here of his paper [29].

[48] The author makes a mistake here. A Clifford algebra is in general *not* a field.

2.29 Harald Cramér

2.29.1 Invitation to the wedding to Marta Djursholm 20 Jun 1918

2.29.2 Letter Blue Boar Hotel Cambridge 8 Jun 1924

2.29.3 Letter Stockholm 30 Dec 1940

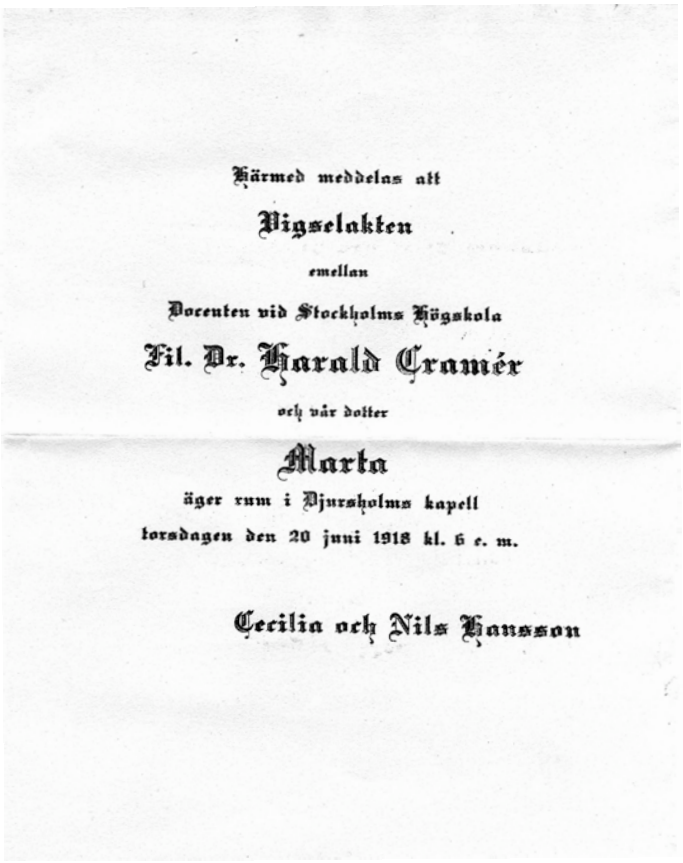
Broder Marcel!

Av min hustrus brev hörde jag, att du tänkte sända mig Cassels skrivelse, och att den var värre än vi tänkt oss. Kanske har du redan sänt den, och i så fall antagligen till Oxford. Jag kom emellertid att stanna i Cambridge längre än jag tänkte, emedan Hardy hade svårt att taga emot mig före den 10-de. Här i staden har jag haft en mycket trevlig tid och har bott både i Trinity och i Peterhouse. Littlewood är en utomordentligt angenäm bekantskap, och jag har även träffat åtskilligsa yngre mathematici. Av Hardy såg jag en skymt häromdagen, som Du ser av bifogade snapshot. Jag visade honom tidningsnotisen om Carlemans utnämning och redogjode så gott jag hann (tiden var knapp) för vad som förekommit. Det var så vitt jag kunde se en nyhet för honom, men hans enda reflexion då var ungefär "sowas komt in den besten Familien vor!" I Oxford skall jag väl tala litet utförligare med honom, så får vi se vad han säger. Vad Littlewood beträffar, har jag däremot haft en känsla av att han ej var alldeles främmande för saken, och han har också yttrat sig rätt försiktigt. Det är ju möjligt, att han först fick den uppfattningen, att det var fråga om professuren i Lund, och att det i så fall inte var någon nyhet för honom är ju klart. – Jag är mycket glad att höra, att Stridsberg tagit hand om frågan angående en eventuell protest. Skriver samtidigt till honom. Hoppas du i möjligaste mån håller mig underrättad om vad ni göra och tänka! Likaledes om vad som eventuellt säges eller göres från högre ort, såsom bland stadsfullmäktige eller försäkringsdirektörer.

Jag kommer nu att vara hos Hardy till omkring den 15-de. Därefter blir min adresss:

[48]Harald Cramér (1893985), Swedish statistician, one of the prominent figures in mathematical statistics in the 20-th century. C. got his Ph.D. in mathematics in 1917, was a docent in this subject at Stockholm University 19179, a professor there in insurance mathematics and mathematical statistics 19298, rector 19508, and the Chancellor of the Swedish universities 19581; after a controversy with Edenman and another government official, however, he retreated from this post.

He served also as an actuary at life assurance companies. C. was a brilliant speaker and an excellent writer. His research concerned mainly probability theory, involving the central limit theory and the theory of stationary stochastic processes. His monograph [31] (1946) has been of paramount importance for education och research. [114]; [32] (a biography by his son Tomas Cramér).


Härmed meddelas att

Vigselakten

emellan

Docenten vid Stockholms Högskola

Fil. Dr. Harald Cramér

och vår dotter

Marta

äger rum i Djursholms kapell

torsdagen den 20 juni 1918 kl. 6 e. m.

Cecilia och Nils Hansson

Figure 2.17: Invitation to wedding to Marta 20 Jun 1918

c/o Mr. B. Eyre, 17 Crown Hill, Norwood, London S.E.19.

Hälsningar

Din tillgivne H.C.

Translation:

Dear Brother Marcel, I heared from my wife's letter that you are intending to send me Cassel's report, and that it is worse than we thought. Maybe you already sent it, and then probably to Oxford. But I am going to stay in Cambridge longer than I thought, because it is difficult for Hardy to receive me prior to 10 January. I have had a very nice time here and have stayed both at Trinity and at Peterhouse. Littlewood is an extremely pleasant aquaintance, and I have also met several younger *mathematici*. I saw a glipmpse of Hardy the other day, as you see from the attached snapshot. I showed him the press cuting about the nomination of Carleman and explained as well as I could (time was short), what had happened. It was as far as I could see, it was news for him, but his only reflexion was something like "sowas komt in den besten Familien vor!" (such things happen i all families) In Oxford I intend to speak a little bit exhaustively with him, so let us see what he says. Regarding Littlewood, I have however had the feeling that the matter was not quite new to him, and he expressed himself very carefully. But it is possibly that he first got the impression that it was a question of the professorship in Lund, and, in such a case it is, of course, not a novelty to him. – I am very glad to hear that Stridsberg has taken care of the question of a possible protest. I write at the same time to him. I hope that you as far as possible keep me informed what you are doing and what you think! Similarly about what one possibly says or does on a higher level, as among town concilors or directors of insurance companies.

I shall now be with Hardy till until 15 January. After that my address will be: c/o Mr. B. Eyre, 17 Crown Hill, Norwood, London S.E.19.

Greeting

Yours faithfully, H.C.

2.29.4 Postcard with Prague stamp Apr 15 1932

Det lilla som är kvar av undertecknad efter en veckas vistelse i denna gästfria stad kommer att söndag afton anbefalla sig i Din välvilliga vård! Hoppas jag ej kommer olägligt för Dig.

Hjärtliga hälsningar frn tillg.

H.C.

Translation:

That little that is left of yours truly after one week's stay in this hospitable city will arrive Sunday afternoon and put himself in your benevolent care! I do hope that I will not come unconveniently for you.

Hearty greetings from your affectionate

H.C.

2.29.5 Letter Stockholm 30 Dec 1940

Käre Marcel!

Tack för Ditt brev, som jag bort besvara för länge sedan! Beträffande Gyllenberg och professuren var ju utgången på förhand given. För min del försökte jag dock på alla sätt att vara så snäll som möjligt mot honom i mitt utlåtande, samtidigt som det ju var nödvändigt att göra konklusionen fullt klar. Det skulle vara roligt att någon gång höra Din mening om Wolds matrisarbete, som ju ligger åtskilligt vid sidan av mina vanliga sfärer. – Nu har jag en sak att fråga Dig om. Prof. Alfred Tauber (of the Tauber'ian theorems!) sitter i Wien under svåra förhållanden och drömmer om att komma till Sverige, men synes ännu vara tämligen aktiv, att döma av en del manuskript, som han sänt mig genom Bergholms protégé d:r Gruder Om jag efter genomgång av dessa avser mig kunna skriva ett intyg för att utverka anslag åt honom som intellektuell landsflykting, skulle Du då kunna tänka Dej att skriva under jämte mej! Undersökningarna gäller försäkringsmatematik, utjämningsteori o. dylikt. Vore snällt om Du ville svara härpå!

Din tillgivne Harald

Translation

Dear Marcel, Thanks for your letter, which I should have replied too a long time ago! Regarding Gyllenberg and the professorship, the outcome was of course clear beforehand. For my part, I still tried, in my expert report, to be in all ways as kind as possible to him, at the same time it was of course necessary to make the conclusion completely clear. It

would be nice to hear on some occasion your opinion about Wold's work on matrices,[49], which of course lies quite far from my usual spheres. – Now I have something to ask you. Professor Alfred Tauber (of the Tauberian theorems!) sits in Vienna in difficult conditions and dreams of coming to Sweden, but seems still to be fairly activ, as judged from some manuscripts, which he sent me through Bergholm's protegé dr Gruder[50]. After having gone through these, I feel myself capable of writing a testimonial for raising funds for him as an intellectual refugee, would you then consider to sign it jointly with me! The investigations concern insurance mathematics, smoothing theory and such. I would be nice if you could reply to this.

sincerely yours Harald

2.29.6 Letter Stockholm 26 Oct 1942

Käre Marcel!

Jag återsänder härmed Benckerts anteckningar. Hans sållmetod förefaller mig småtrevlig men inte alltför märkvärdig – kanske saken skulle bli intressantare om det kunde visas, att metoden är användbar för en allmän klass av aritmetiska serier. Jag vill minnas, att jag redan för många år sedan föeslog B. något i den vägen för den sållmetod han då sysslade med. För närvarande har jag varken tid eller tankekrafter disponibla för att sätta mig in i saken. Nu till Din fråga beträffande Quensel. Jag har ansett mig kunna utan tvekan förklara honom kompetent i den del av området för hans nuvarande professur, som omfattar teoretisk statistik – detta trots vissa anmärkningar mot hans teoretiska arbeten. Jag tror inte att jag skulle vilja kompetensförklara honom till en *professur* i teoretisk statistik. Att taga honom som examinator i teoretisk statistik tycker jag ej skulle behöva möta betänkligheter – *om* man skall sätta en gräns där och ej behöver låta lic.-examen följa med automatiskt. Det är i korthet min syn på saken, och jag hoppas Du kan ha någon nytta av den. Vore roligt att få tillfälle att språka muntligt både härom och om andra frågor.

Din tillgivne Harald

[49]Herman Wold (1908-92), statistician, professor at UU 1942-70. and at GU 1970-75. He was a scientist rich of ideas and mot productivm who made pioneering work inom time series analysis, econometry and so-called soft modelling of social data. Among his publications one notices his doctoral thesis "A Study in the Analysis of Stationary Time Series" (1938) and the monograph "Demand Analysis (1952), the latter jointly with Lars Juréen (1914-91). W. was a member Nobel committee for economi 1968-80. Father of Svante W. b. 1941, chemist, professor at UmU sincr 1986. [114].

[50]Osias Gruder (1887-1964).

Translation:

Dear Marcel, I return hereby Benckert's notes. His sieve method seems to me mildly amusing but not too remarkable – maybe the thing would be more interesting if it could be shown that the method is applicable to a general class of arithmetisc series. I recall that I, already several years ago, suggested to B. something of this kind for the sieve method, with which he then was busy. Right now I have neither time nor mental forces at disposal in order to familiarize myself with the matter.

Now to your question regarding Quensel[51] [52]

I think that, any doubt, I am able to declare him competent in that part of the domain of his present professorship that comprises theoretical statistics – this despite some remarks against his theoretical work. I do not think that I would like to declare him comptent to a *professorship* i theoretical statistics. To take him as an examiner in theoretical statistics, I believe, would not need to encounter doubts – *if* one puts a limit there, and does not let the licentiate-examination follow along authomatically. This is, in short, my view of the matter, and I hope you may have some use of it. It would be nice to have the opportunity to discuss orally with you both about this and of other questions,

Yours faithfully, Harald.

2.29.7 Letter Djursholm 31 Jan 1948

Käre Marcel!

Jag återkommer till frågan om Din brors föredrag på mitt institut, som vi talade om under den trevliga kvällen hos K.-G.:s. Enligt vad som preliminärt överenskoms, skulle han hålla ett föredrag om ergodteori, närmare bestämt om den statistiska eller medel-ergodiska satsen, som är av stor betydelse för oss här. Vi tänka oss, om jag minns rätt, att det skulle kunna bli någon gång under februari, och jag ville höra närmare, vilken tidpunkt som skulle passa. För vår del går det ungeför när som helst, men jag vill givetvis ha den dagen bestämd så snart det blir möjligt för Din bror.

I går behandlades i fakulteten frågan om medel ur det statliga anslaget för gästföreläsare, och Carlson begärde 300 kr. för ett föredrag av Din bror, varpå jag anmälde ytterligare ett föredrag av samme föreläsare och föreslog en passande höjning av beloppet. Carlson upptog förslaget tämligen syrligt, förklarade att det skulle rubba den "uppgjorda planen"

[51] Carl-Erik Quensel (1907-1977),

[52] Carl-Erik Quensel (1907-1977), statistician, professor LU 1941-1974, member of the International Statistical Institute ISI, [172], see also obituary in [**?**]. – As a curiosity, I mention that a distant relative of his was Conrad Quensel (1676 in Stockholm - 1732 in Lund), professor of mathematics at the Swedish University in Pernau (now Pärnu in Estonia); this nothing but the Swedish University in Dorpat (now Tartu) transferred to a new location, thought to be more safe for Russian invation, in 1699. [108], [**?**].

och tycktes vara rädd att det skulle bli för mycket pengar för en föredragshållare. Jag blev tämligen förbannad, men behärskade mig, och beslutet blev att Din bror skulle inbjudas att hålla *två* föredrag vid Högskolan, med ett arvode som skulle bestämmas senare, vilket förmodligen betyder med hänsyn till vad han får på andra håll.

Jag vill nu bedja Dig ha detta i minnet vid eventuella vidare förhandlingar med Carlson eller Beurling. Meningen är från min sida absolut inte att Din bror skall bli på minsta sätt lidande på anordningen, och jag kan utan svårighet *under hand* skaffa fram kompletterande anslag, exempelvis från Aktuarie föreningen. Men rent principellt måste jag bestämt hålla på att en till vårt institut inbjuden föredragshållare har samma rätt till anslag från fakulteten som någon annan, och detta synes mig vara ett gott tillfälle att statuera ett exempel! Jag skulle vara tacksam, om Du ville hålla mig à jour i saken den närmaste tiden.

Med hjärtliga hälsningar till Din bror och Dig själv,

Din tillgivne Harald

Translation:

Dear Marcel, I come back to the question of your brother's talk at my Institute, as we spoke about during the pleasant evening at the K.-G.:s. According to what was agreed upon preliminarily, he was supposed to give a talk on ergodic theory, more precisely on the statistical or mean-ergodic theorem, which is of major importance for us here. We think, if my memory is correct, that it could be some time in February, and I wanted to hear more closely, which date would suit. For our part, it may be practically any time, but I would of course have the day fixed as soon as it will be possible for your brother.

Yesterday, there was treated, in the Faculty, the question of funds from the governmental allotment for guestspeakers, and Carlson applied for 300 Crowns for a lecture by your brother, whereupon I announced another lecture by the same lecturer and suggested a suitable rise of the amount. Carlson took this suggestion rather acidly, declared that this would disturbed the "plan agreed upon" and seems to be afraid that this would be too much money for one lecturer. I got rather angry, but controled myself, and so the decision was that your brother will be invited to give *two* lecturs at the University, with a fee which will be determined later, which presumably means, with respect to what he will receive in other places.

I ask you now to have this in mind in possible futher negotiations with Carlson or Beurling. The idea is, from my side, absolutely not that your brother would suffer in the slightest from such an arrangement, and I can without difficulty *privately* procure additional funds, for example from the Actuarian Society. But as a matter of principle I must maintain that a speaker invited to our Institute has the same rights to funds from the Faculty as anybody else, and this seems to me an excellent occasion to set an example!

I would be grateful to you if you keep me informationed about this case in the immediate future.

With my heartiest greetings to your brother and to yourself,

Sincerely yours, Harald

2.29.8 Letter Djursholm 18 Oct 1949

Käre Marcel!

Efter vårt senaste långa och trevliga samtal vid lunchen på Stadshuskällaren hade jag ändå känslan att jag lämnat en del osagt! Framför allt skulle jag något försöka motivera för Dig, varför enligt min uppfattning den sannolikhetsteoretiska terminologien, med stokastiska variabler, fördelningar osv ger ett naturligt och adekvat uttryck för de frågeställningar, som uppkomma i olika slag av tillämpningar. Situationen är väl helt analog med den som tidigare rått inom den matematiska fysiken och de delar av matematiken, som direkt påverkas av de fysikaliska problemställningarna. För närvarande ha vi under utveckling en ny stor grupp av tillämpningsfrågor, som ha en viss gemensam och självständig karaktär, och som ge upphov till delvis nya matematiska problem. Det är väl då ändå inte onaturligt om terminologien vid den matematiska behandlingen lånar en del av terminologien på de konkreta områdena – på alldeles samma sätt som beträffande det äldre fallet med fysiken!

Jag hade som sagt haft i tankarna att skriva litet mera ingående till Dig i sådana frågor, men under de veckor som gått har jag varit alltför upptagen för att hinna med detta. Särskilt har jag fått åtskilligt att tänka på och styra med på grund av två dödsfall i Martas släkt, som nyligen inträffat, nämligen hennes moder och hennes yngsta syster.

Därför sänder jag Dig i stället ett särtryck av mitt föredrag vid Princetonkonferensen 1946, som Du väl fick se i stencil men kanske inte sedan fått i tryck. Om Du har tid att se på sid. 179 och följande, så ge de kanske ett perspektiv på utvecklingen med sannolikhetsteoretiska begreppsbildningar och termologi, t.ex. när man kommer in i den Hilbertska rymden!

Har Du möjligen sett en liten bok av Khintschine [99], nyligen utkommen på engelska i översättning av Gamow. Jag tror att den skulle intressera Dig, och hans syn på användningen av sannolikhetsteoretiska betraktelsesätt är för mig synnerligen tilltalande.

Din tillgivne Harald

Translation:

Dear Marcel, After our last long and agreeable during lunch at the "Stadshuskällaren"[53] I had nevertheless the feeling that I had left quite a lot untold! Most of all, I would like

[53]Well-known restaurant at the Stockholm City Hall.

to try to motivate for you why in my opinion the probability theoretic terminology, with stochastic variables, /s etc., gives a natural and adequat expression for the questions which arise in various kinds of applications. The situationen is quite analogous to what formerly ruled in Mathematical Physics and in those parts of Mathematics, which directly affected by physcal considerations. Presently we are developing a new big group of applied questions, giving rise to partly new mathematical problems. Then it is certainly not unnatural if the terminology in the mathematical treatment borrows some of the terminologt in the concrete /s – in exactly the same way as in the older case of Physics!

As I told you I had in mind to write to you a little more in detail abour such questions but during the past weeks I have been too occupied to have time for this. In particular I have got quite a lot to think of and to arrange, because of two deaths in Marta's family, that occured recently, namely the death of her mother and of her youngest sister.

Therefore I sender you instead a separate of my lectures at the Princeton Conference in 1946 [31], which you presumably saw as a stencil but perhaps was not sent in print. If you have time to look at page 179 and the following, this will perhaps provide a perspective of the development of probability theoretic notions and terminology, for examplr when one enters Hilbert spaces!

Have you possibly seen a booklet by Khintschine [99], recenly edited in Engelish with translation by Gamow. I think that it might interest you, I find his view of the use of probability theoretical considerations rather attractive,

Yours faithfully, Harald

2.29.9 Letter Stockholm 31 Oct 1951

Käre Marcel!

Först vill jag tacka Dig för Din vänliga gästfrihet på Ditt utomordentliga institut och hos Dig själv. Jag frågar mig, om och när vi vid SH komma att få ett institut av den kvalitén!

Det var roligt att resonera matematik, och jag gläder mig åt att i sinom tid få se Din avhandling om måtteori [143], som lovar att bliva utomordentligt värdefull. Beträffande von Neumanns matrissats har Du kanske redan märkt, att det bevis, som Du skisserade sent på kvällen, icke är tillräckligt. Det ger endast ena hälften av satsen, som innebär, att de båda grupperna av olikheter icke kan bestå samtidigt. För att få den fullständiga satsen är man tvungen att göra något mera bruk av de konvexa mängdernas egenskaper. Satsen är i själva verket ekvivalent med följande:

"Låt i den n-dimensionella rymden A vara den positiva "oktanten" och B en sluten begränsad konvex mängd, som icke har någon punkt gemensam med A. Då finns ett stödplan till A, som har B helt och hållet på motsatt sida mot A.

Om Du låter i den givna matrisen raderna representera punkter och B den minsta konvexa mängd, som innehåller alla punkterna, så får man omedelbart satsen: Antigen har A och B en punkt gemensam, och då gäller den ena gruppen av olikheter, eller också kan man använda ovanstående sats och får den andra gruppen. Detta är knappast enklare än det bevis, som finns i den von Neumann-Morgensternska boken [117], men något mera direkt och kanske upplagd för direkt generalisation.

Vi talade om Din tentamensstatistik. Skulle Du utan större besvär kunna skaffa mig en avskrift eller ett utdrag av låt oss säga de två sista läsårens siffror till någon dag före kanslermötet, vore jag Dig tacksam.

Med tack och hjärtliga hälsningar Din tillgivne Harald

Translation:

Dear Marcel, First I want to thank you for your kind hostibitability at your extraordinary institute and at your own home. I am asking myself if and when we at SH are going to get an institute of this quality!

It was nice to discuss mathematics, and I am looking forward with expectation to see in due time your memoir in measure theory [143], which promises to be extraordinarily valuable. Regarding von Neumann's matrix theorem you have perhaps already noticed that the proof that you outlined late in the evening is not sufficient. It gives only one half of the theorem which means that the two groups of inequalities cannot hold simultanously. In order to get the full theorem one is obliged to make somewhat more use of the properties of convex sets. The theorem is indeed equivalent to the following:

"In n-dimensional space, let A be the positive "octant" and B s closed / convex set having no point in common with A. Then there is a plane of support to A having B entirely on the opposite side to A.

If you let the rows of the given matrix represent points and B the smallest convex set containing all points, one obtains at once the theorem: Either A and B have a point in common, and then holds one of the group/ of inequalities, or else one can apply the preceding theorem and gets then the other group. This is hardly simpler than the proof found in the von Neumann-Morgenstern book [117], but is slightly more direct and perhaps inviting for a direct generalization.

We spoke of your examination statistics. Could you, please, without any great trouble get me an excerpt of, say, the figures of the two last academic years till a few days before the chancellor meeting, I would be very grateful to you.

Greetings, Yours faithfully, H.C.

2.29.10 Letter Djursholm 15 Nov 1961

Käre Marcel!

På Din 75-årsdag i morgon sända Marta och jag våra innerliga hälsningar och lyckönskningar! Vi tänker med tacksamhet tillbaka på den långa tid, då vi varit vänner och emellanåt haft tillfälle att råka Dig, vare sig här hemma i gamla Sverige or på andra sidan Atlanten! Och icke minst komma vi med glädje ihåg vårt sista sammanträffande med lunch och pratstund efter promotionen in Lund härom året. Tiden går så fort, och det är redan länge sedan dess – gärna skulle vi vilja råka igen! Men till dess få vi nöja oss med att sända Dig tacksamma födelsdags hälsningar.

För min personliga del tänker jag också på allt, som jag under tidernas lopp haft Dig som läromästare att tacka för. Jag har ännu kvar gamla föreläsningsanteckningar från SH, där docenten Marcel Riesz föreläste om differentialgeometri, integral/er och Lebesgues integral. Och det händer inte så sällan att jag får anledning att konsultera dem, nästan alltid med gott utbyte! Ändå är ju detta inte det väsentligaste jag lärt av Dig, ty ännu viktigare ha alla personliga samtal under många år varit, med allt de inneburit av uppslag, goda råd och det bästa föredöme. Tack för detta, käre Marcel!

Marta och jag ha för några veckor sedan kommit hem efter ett par månader i Schwartzwald, Paris och Italien. Som nybliven pensionär var det skönt att lufta på sig ett slag, och vi voro en hel månad i Italien utan några officiella plikter av något slag. Nu är det också skönt att vara hemma igen. Det kanske kan intressera Dig, att vår yngste pojke Kim, skall disputera som medicinare i Göteborg i december. Han skriver om några invecklade kemiska ämnen i blodserum, vilket gläder en gammal kemist som hans fader.

Än en gång de hjärtligaste hälsningar från Marta och

Din gamle vän och lärjunge Harald

Translation:

Dear Marcel, For your 75-th birthday tomorrow, Marta and me are sending our devoted greetings and congratulations!

We are thinking back, with gratitude, on the long period that we have been friends and often have had occasion to meet you, if here at home in Old Sweden or on the other side of the Atlantic! And not least we recall with joy our last meeting with lunch and discussion after the promotion in Lund a year ago or so.

Time passes so quickly, and it is already such a long time since then – we would gladly want to meet again! But until then we have to be content to send you grateful birthday congratulations.

From my personal point of view, I think also of everything that I have had you to thank you, as my master, in the course of time. I keep still my old notes from lectures at

SH, where Docent Marcel Riesz taught differential geometry, integral equations and the Lebesgue integral. And it happens not so seldom that I have a reason to consult them, amost always with a god outcome! But certainly it is not this that is the most important I learnt from you, because of even greater weight are all the personal conversations during many years, with all that they have meant in terms of ideas, good advise and the best example. Many thanks for this, Dear Marcel!

Marta and I have came back home a few weeks ago after several months in Schwartzwald, Paris and Italy. As a fresh senior citizen, it has been most agreeable to go out for a breath of air for a while, and we were an entire month in Italy without any officieal duties of any kind. Now it is also pleasant to be back home again. It might interest you that our youngest boy Kim will defend his thesis in medicin in Göteborg in December. He writes about some involved chemicals in blood serum, which brings pleasure to an old chemist as his father. Once more heartiest greetings,

Sincerely yours, Marta, and your old friend and disciple Harald

2.30 Marta Cramér

2.30.1 Letter Djursholm Aug 14 1943

Käre Marcel,

Som Du nog vet fyller Harald 50 år den 25/9. Han föreläser som vanligt på morgonen 9-10 och det ser ut som om studenterna och även andra tänkte uppvakta honom i morgonstunden i det lilla institutet. På aftonen ta vi emot de närmaste vänner som vilja komma och vara med oss på högtidsdagen, och jag skriver nu för att säga Dig, att det vore mycket kärt att få se Dig här då, om Du kan passa in en Stockholms resa lämpligt. Tåget 1/2 8 från Stockholm passar bäst, och det är smoking. Kom om Du kan!

Med hjärtlig hälsning Din tillgivna Marta C-r.

Translation:

Käre Marcel,

As you probably know, Harald is going to be 50 on 25 September. He is going to teach as usual in the morning 9-10 and it looks also as the students and likewise others intend to pay their respects to him in the early morning hour in the little Institute. In the evening we are going to receive those closest friends who wish to come and be with us on our festival day, and I write now to tell you that it would be very nice to see you here then, provided you suitably fit in a trip to Stockholm. The train 1/2 8 [to Djursholm] from Stockholm is most convenient, it will be dinner jacket. Please, come if you can!

With hearty greetings sincerely yours trully Marta C-r.

2.31 Thorild Dahlgren

2.31.1 Letter 6, 1917

Härr Docent!

Efter att ha konstaterat, att det f.n. är praktiskt taget omöjligt att genom härvarande boklådor erhålla Hardy & Riesz [67] vänder jag mig till Eder med förfrågan, huruvida Ni möjligen är i besittning av något eller några ex. av nämnda arbete, som Ni skulle kunna överlåta till oss lundensare. Vi äro här några stycken, som starkt känt saknaden av arbetet i fråga.

Om Ni skulle vara i tillfälle att tillmötesgå oss, vore jag tacksam, om Ni ville under postförskott och under min adress sända 2 (ev. 1) ex. I vilket fall som hälst vore jag tacksam för ett svar inom de närmaste dagarna, enär några av oss snart lämna staden.

Med utmärkt högaktning
Thorild Dahlgren
Fil. lic.

Translation:

Dear Docent Riesz, After having found that it is currently practically impossible to obtain, through the bookshops here the Hardy & Riesz book, [67], I address myself to you with the request whether you possibly are in possesion of one or several copies of this treatice that you could transfer to us mathematicians in Lund. We are a few men here, who strongly miss the book in question.

If you should be in position to comply with our wish, I would be grateful if you could send as a cash on delivery and to my address 2 copies (possibly just 1). In any case I would be happy to receive a reply within the nearest days, as some of us will soon be out of town,

Yours faithfully, Thorild Dahlgren,
Licentiate of Philosophy

[54]Thorild Dahlgren (1888-1968), mathematician, active in the insurance business, studied at SH with Marcel Riesz as advisor, fil.dr. in 1918 (thesis: [34]). Worked later as a director of a leading insurance company. Being a rather wealthy man he made a donation to LU, the returns of which were supposed to go to mathematics and related field; for instance, my stay in France in 1958/59 was financed that way.



Figure 2.18: Letter Stockholm Dec 12, 1919

2.31.2 Letter Stockholm Dec 12, 1919

Stockholm den 12/XII 1919.

Broder!

Då jag ej lyckats komma i telefonförbindelse med Dig, får jag på detta sätt meddela dig, att Du inte fick någon av de böcker på Thuuseränska bokauktionen, som Du bad mig ropa på- De gingo nämligen till mellan 10 och 15 % högre belopp än dina maximigränser. De blevo, med andra ord, hutlöst dyra: Flaubert innemot 25:-, de båda France 15:25 pr. st.

Med hälsningar

Vännen Thorild Dahlgren

Translation:

Dear Brother, As I have not been able to reach you by phone, I notify you in this way that you did not get at the book auction at the "Thuuseränska" any of the books that you asked me to call for. Namely they were sold to a between 10 and 15 % higher amount than your maximi limits. /, theyt were impudently expensive: Flaubert close to 25:-, the two Frank 15:25 each. Greetings

yours faithfully, Thorild Dahlgren

2.31.3 Letter Malmö Jan 10, 1940

THORILD DAHLGREN
FILOSOFIE DOKTOR
V. VERKSTÄLLANDE DIREKTÖR
I. BRAND- och LIFFÖRSÄKRINGS A.-B.
SKÅNE

MALMÖ den 10.I. 1940
BOX 110

Käre Marcel!

Jag tackar för ditt erbjudande. Denna gången skall jag emellertid själv delta i detta liksom i ett par andra sammanträden i Stockholm på måndagen. På Tisdag em. skall jag utdela 1 st. medalj i Norrköping.

Hoppas att Du inte brutit α) armar eller β) ben under dina skidturer i Saltsjöbaden.

Hälsa Stochastes-familjen!

Tuus
Th. D.

Translation:

Dear Marcel, I thank you for your offer. But this time I shall participate myself in it as well as in a couple of other meetings in Stockholm on Monday. Tuesday afternon I shall jag deliver a medal in Norrköping.

I do hope tha you have note broken α) any arms or β) legs during your skiing tours in Saltsjöbaden.

Greetings to the Stochastes-family!

Tuus
Th. D.

2.31.4 Letter Malmö May 6, 1959

Professor Marcel Riesz

Matematiska Institutionen

Lund.

Broder Marcel!

Jag tillåter mig sända dig ett genomslag av mitt remissyttrande över avkastningen av Skånes jubileumsfond.

Tror Du inte det vore möjligt att få den finske försäkringsmatematik-docenten – hans namn har jag tyvärr glömt – att ge några veckors kurs i Lund på vägen till U.S.A.

I hast

Tuus

Thorild Dahlgren

Bilaga. Undertecknad föreslår, att för avsett ändamål 1.000 kronor tilldelas jur.kand. Ulf Persson.

Önskvärt vore, att med övriga disponibla medel vid universitetet kunde ordnas en kurs i försäkringsmatematik, varav behov f.n. torde föreligga.

Malmö den 6 maj 1959

Thorild Dahlgren

Translation:

Dear Brother Marcel, I allow me to send you a carbon of my opinion of the yield of "Skånes jubileumsfond" (the Skåne Jubilee Foundation).

Don't you think that it might be possible to have the Finnish docent of acturial mathematics – regretfully I have forgotten his name[55] – to give a course of some weeks in Lund on his way to U.S.A.

In hurry,

Tuus
Thorild Dahlgren

[55] *Editors.* Probably Gustav Elfving (1908-1984).

Attachement. I, the undersigned propose that for the purpose intended 1.000 Crowns be given to Ulf Persson, graduate in Law.

It would be desirable that there could be given, with other available means, a course in acturial mathematics at the University, of which there seems to be a need right now.

Malmö 6 May 1959

Thorild Dahlgren

2.32 Helge Dalin

2.32.1 Letter Malmö Sep 15, 1928

Malmö den 15/9 28.

Herr Professor Riesz, Lund.

Jag har tillbringat en del av eftersommaren med att fundera över vad som vore lämpligt som seminarieföredrag. Tänkte ett slag taga sannolikhetskalkyl. Efter diverse funderingar har jag stannat för en avhandling av Poincaré. Avhandlingen är av ett visst historiskt intresse, därör att den visar hur / genom sysslandet med en viss differential/ kom fram till ett speciellt fall av de automorfa funktionerna, innan han grep sig an med att ställa upp de automorfa funktionernas allmänna teori. Tror att avhandlingen är rätt så lämplig, därför att den ej förutsätter så många speciella förkunskaper. När en / av formen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(x) \cdot y \quad (R(x) \text{ rationell}) \tag{2.1}$$

är av Fuchsiska typen, [så] att bråket

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z, \tag{2.2}$$

[56]Helge Dalin (1891-1938), mathematician, studies at LU, probably, before Marcel Riesz's arrival there and got his fil.lic. then. In a biography of Riesz in the University's roll, one finds the following lines: "Enligt intyg av prof. M. Riesz, Lund, utfört matematiska undersökningar av asymptotiska serie och kvasi-analytiska funktioner. Avhandlingen ej publicerad, enär prof Ostrowki i *Acta* publicerat en avhandling med väsentligen samma resultat." (According to a certificate by Prof. M. Riesz, Lund, he has performed mathematical investigations of asymptotic series and quasi-/ functions. The paper was not published, because Prof. Ostrowki published in the *Acta* a memoir [113] with essentially the same result.) Dalin got a permanent job as a teacher in 1933. What happened to him later is, regretfully, unknown to us.

där y_1 och y_2 är oberoende lösningar av (2.1), övergår i

$$\frac{ay_1 + by_2}{cy_1 + dy_2} = \frac{az + b}{cz + d},$$

då x gör omlopp kring de singulära punkterna till ekv. (2.1), att en lineär / kan vara elliptisk, parabolisk osv, allt detta är ju saker, som antingen äro kända eller fort avklaras. Det är en sak, som jag emellertid ej är riktigt på det klara med. Om y är en algebraisk funktion av x och y satifierar en / av den speciella formen (2.1), måste då y vara av formen $y = C \cdot (x - a_1)^{\rho_1}(x - a_2)^{\rho_2} \dots (x - a_p)^{\rho_p}$, där talen ρ är rationella, mao y^m vid lämpligt val av m rationell. Är denna sats sann och finns den i så fall bevisad någonstans?

Om det intresserar herr Professorn, skall jag antyda huvudpunkterna i avhandlingen? Närmaste utgångspunkten för / var en avhandling av Fuchs över (2.1). Fuchs hade påstått, att under vissa villkor på $R(x)$ i (2.1), så blir x i (2.2) en entydig funktion av z, $x = g(z)$. / visar först, att Fuchs villkor ej äro tillräckliga. Han sysselsätter sig sedan med det fall, då x blir en dubbelperiodisk funktion (antingen av z, eller av $t = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma + \delta}$ eller av $u = \log t$). För att sedan undsersöka ett fall, då $g(z)$ är entydig men ej kan återföras på en dubbelperiodisk funktion, väljer han för enkelhets skull en viss ekv. (2.1) med endast två singulära punkter, visar att därvid varje blad av den mot ekv. (2.2) svarande Riemannska ytan för x avbildas schlicht på en "Kreisbogenviereck" i z-planet, alla dessa ligger emellertid inom och utfylla fullständigt en viss cirkel i z-planet. Denna cirkel blir alltså vad som nu kallas Hauptkreis för den automorfa funktionen $g(z)$. Vore tacksam om jag fick besöka herr Professorn tisdag elle onsdag eftermiddag. Jag ringer herr Professorn på måndag kl. 10.

Med utmärkt högaktning

Helge Dalin

Translation:

Dear Professor Riesz, Lund, I have spent part of the later summer to think of what could be suitable for a seminar talk. For a while, I thought of the Calculus of Probability[57]. Finally I decided to pick up a memoir of Poincaré[58]. It is of some historical interest, because it indicates how Poincaré by busying himself with a certain differential equation

[57]Some things from Borel, *Traité des probabilités et de ses applications*.

[58]I have checked it out from the Library of the Seminar. I don't think they have it at the på University Library.

arrived at a speciall case of the automorphic functions in general, before he began to work out the theory of automorphic functions. I think that this memoir is quite suitable, because it does not need so many special prerequisites. When an equation of the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(x) \cdot y \quad (R(x) \text{ rational}) \tag{2.1}$$

is of Fuchsian typen[59], [so] that the fraction

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z, \tag{2.2}$$

where y_1 and y_2 are independent solutions of (**??**), is transformed into

$$\frac{ay_1 + by_2}{cy_1 + dy_2} = \frac{az + b}{cz + d},$$

when x makes a revolution about the singular points of the equation (2.1), that a linear / may be elliptic, parabolic etc., all this are certainly things that either are known or can be readily settled. However, there is one thing that I do not manage quite. If y is an algebrais / of x and y satifisfying an equation of the special form (2.1), is it then true that y is of the form $y = C \cdot (x - a_1)^{\rho_1}(x - a_2)^{\rho_2} \dots (x - a_p)^{\rho_p}$, where the numbers ρ are rational, / y^m rational for a suitable choise of m . Is this theorem true and, if so, is it proved anywhere?

If you are interested, Mr. Professor, shall I indicate the main points of the memoir? The nearest point of departure for / was a memoir of Fuchs concerning (2.1). Fuchs had stated that under certain condutions on $R(x)$ in (2.1), x in (2.2) will be a univalent [?] function of z, $x = g(z)$. / shows first that Fuchs's conditions are not sufficient. He turns then to the case, when x is a doubly periodic fonction (either of z, or of $t = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma + \delta}$, or $u = \log t$). In order to investigate a case, when $g(z)$ is univalent but cannot be brought back to a doubly periodic /, he chooses for the sake of simplicity a certain equation (2.1) with only two singular points, shows that each leaf of the Riemann surface / to equation (2.2) for x is smoothly mapped on a "Kreisbogenviereck" (circle arc quadrangle) in the z-plane, all these lie however inside and fill up completely a certain circle in the z-plane. This circle is thus what nowadays is called a Hauptkreis (main circle) for the automorphic function $g(z)$. I would be grateful if I could visit you, Mr. Professor, Tuesday or Wednesday afternoon. I call you, Mr. Professor, Monday at 10 o'clock.

Med utmärkt högaktning

Helge Dalin

[59]Immanuel Lazarus (1833-1902), German mathematician, taught in Berlin and Göttingen. Devoted himself mainly to the study of ordinary differential equations. Fuchs was a source of inspiration for Poincaré. [61].

2.32.2 Letter Malmö Jun 20, 1930

Malmö den 20/6 30.

Herr Professor Riesz, Stockholm.

Jag har nu lånat hem Ostrowskis avhandling och tittat litet närmare i den. Om inom $|z-1|=1$

$$|f(z)| < |z^n| \cdot A_n, \tag{2.3}$$

dvs

$$|f(z)| \leq \min_{0\leq n\leq\infty} |z^n| \cdot A_n = \frac{1}{\max \frac{r^n}{A_n}}.$$

Sättes

$$T(r) = \max \frac{r^n}{A_n},$$

$r$ast, fås

$$|f(z)| \leq \frac{1}{T(r)}.$$

Divergensen av $\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}$ är då tillräcklig för att $f(z) \equiv 0$. Omvänt, om denna integral konvergerar finns en $f(z) \not\equiv 0$, som satisfierar (2.4).

På samma sätt, om $\mu(lamdabda) = \lim \sup_{|z-1|=1} \left|\frac{f(z)}{z^l amda}\right|$ och $T(lamdabda) = \max_{0<lamda<\infty} \frac{r^l amda}{\mu(lamda)}$, r fast, så är (i huvudsak)

1. $\log \mu(lamdabda)$ konvex;
2. $\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^l amdabdadlamdabda}$ [konvergent].

nödvändiga och tillräckliga villkor på $\mu(lamdabda)$. Enligt vad jag kan finna ersätter han aldrig villkoret 2) med det enklare $\int_1^\infty \frac{dlamdabdabda}{[\mu(lamdabda)]^{\frac{1}{lamda}bda}}$ konvergerar.

För övrigt är huvudvikten lagd på villkor $\mu(lamdabda)$, då $|z-1|=1$ ersättes med ett generellare område.

Hans exempel på, att Borels sats ej gäller för funktioner med asymptotisk nollutveckling, är ej ett konkret exempel, för vilken satsen ej gäller.

Till en given talföljd $m_l amdabda$ eller funktion $m(lamdabda)$ konstruerar han såväl den största log konvexa minoranten $M(lamda$ samt den största $B(lamdabda) \leq m(lamda)$ med $\sqrt[lamdabda]{B(lamdabda}$ växande vilka kallas för de Wimanska resp.

Faberska minoranterna, men enl. vad jag kan finna, visar han aldrig att $\int \frac{dlamda}{\sqrt[lamda]{M(lamda}}$ och $\int \frac{dlamda}{\sqrt[lamda]{B(lamda)}}$ måste konvergera.

Med utmärkt högaktning

H. Dalin

Translation:

Mr. Professor Riesz, Stockholm.

I have now borrowed Ostrowski's memoir and had a closer look at it.[60] If inside $|z-1|=1$

$$|f(z)| < |z^n| \cdot A_n, \tag{2.4}$$

that is

$$|f(z)| \leq \min_{0\leq n\leq\infty} |z^n| \cdot A_n = \frac{1}{\max \frac{r^n}{A_n}}.$$

If one sets

$$T(r) = \max \frac{r^n}{A_n},$$

$r$ixed, one finds

$$|f(z)| \leq \frac{1}{T(r)}.$$

The divergence of $\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}$ is the sufficient for $f(z) \equiv 0$ to hold true. Conversely, if this integral converges there is a $f(z) \not\equiv 0$ that satisfies (2.4).

In the same way, if $\mu(lamda) = \lim \sup_{|z-1|=1} \left|\frac{f(z)}{z^l amda}\right|$ and $T(lamda) = \max_{0<lamda<\infty} \frac{r^l amda}{\mu(lamda)}$, r fixed, then is (mainly)

1. $\log \mu(lamda)$ convex;
2. $\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^l amdadlamda}$ [convergent] a necessary and sufficient condition on $\mu(lamda)$.

[60] Probably [113].

a necessary and sufficientcondition on $\mu(lamda)$. By what I can find, he never replaces condition 2) by the simpler $\int_1^\infty \frac{dlamda}{[\mu(lamda)]^{\frac{1}{lamda}}}$ convergent. The divergence of $\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}$ is then sufficient for $f(z) \equiv 0$ to hold true. Conversely, if this integral converges there is a $f(z) \not\equiv 0$ that satisfies (2.4).

Besides the main emphasis is layed on the condition $\mu(lamda)$, when $|z-1| = 1$ is replaced by a more general /.

His example that Borel's theorem does not hold for /s with an asymptotic zero-expansion is not a concrete example for the theorem not to hold.

Given a sequence of numbers m_lamda or a / $m(lamda)$ he constructs the least log-convex minorant of $M(lamda)$ as well as the biggest $B(lamda) \leq m(lamda)$ with $\sqrt[lamda]{B(lamda}$ increasing, which are called the Wiman / the Faber minorants. But, according to what I can find, he never shows that $\int \frac{dlamda}{\sqrt[lamda]{M(lamda}}$ and $\int \frac{dlamda}{\sqrt[lamda]{B(lamda}}$ must converge.

Yours faithfully

H. Dalin

2.32.3 Letter Eslöv Nov 12, 1930

Eslöv den 12/11 30.

Herr Professor Riesz, Lund.

Jag tror mig nu ha kommit på ett slags bevis, fast om detta är så enkelt och överensstämmer med beviset i föredraget, vågar jag ej uttala mej om. Antag $g(x)$ given och

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)^2 dx$$

konvergent. Sätt

$g_a(x) = g(x)$ i $[-a, +a]$;
$g_a(x) = 0$ utanför $[-a, +a]$
och

$f_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} g_a(t) dt,$

Då visas först Parsevals teorem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_a(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a(t)|^2 dt \tag{2.1}$$

Härur följer, att $f_a(x)$ "im Mittel" konvergerar mot en gränsfunktion $f(x)$, som också har

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)^2 dx$$

konvergent.

Sättes sedan

$$\begin{array}{lll} f_b^*(t) & = f(t) & \text{i } [-b,+b]; \\ f_b^*(x) & = 0 & \text{utanför} \\ & & \text{och} \end{array}$$

$$\mathfrak{G}_b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_b^*(t)dt$$

och

$$\mathcal{G}_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixt} f_b^*(t)dt, \tag{2.2}$$

så skall bevisas, att $\mathcal{G}_b$ "im Mittel" konvergerar mot $g(t)$, d.v.s.

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - \mathcal{G}_b|^2 dt = 0. \tag{2.3}$$

I ställlet för (2.3) visas först, att

$$\lim_{a,brightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - \mathcal{G}_b(t)|^2 dt = 0.$$

[Vi har]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_a(t) - \mathcal{G}_b|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_a - \mathcal{G}_b)(\overline{g}_a - \overline{\mathcal{G}}_b)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a \cdot \overline{g}_a + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_b \cdot \overline{\mathcal{G}}_b -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} g_a \overline{\mathcal{G}}_b dt - \int_{-\infty}^{+\infty} + \mathcal{G}_b \overline{\mathcal{G}}_b.$$

Nu är enl. (2.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a \overline{g}_a dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a \overline{f}_a dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_a|^2 dt.$$

Vidare fås

$$g_a(x) \cdot \overline{\mathcal{G}}_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixt} \overline{f_b^*(x)} \cdot g_a(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\overline{\mathcal{G}_b(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixt} \overline{f_b^*(x)} \cdot g_a(x)dt.$$

Eftersom till höger alla intervall är ändliga ($g_a g_b = 0$ utanför $[-a, +a]$, $[-b, +b]$) kan integrationsordningen ändras, varav

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a \cdot \overline{G} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_b^*(x)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} g_a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_b^*(x)} f_a(x) dt.$$

[Härur fås sedan]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_a|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_b^*|^2 dt - \qquad (2.4) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f^*(t)} \cdot f_a(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f_b^*(x) \cdot \overline{f_a(t)} dt. \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Då nu såväl f_a och f_b^* konvergerar mot f, fås härur

$$\lim_{a,brightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f} \cdot f dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \overline{f}$$

Speciellt fås då

$$\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 = 0,$$

dvs

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g - \mathcal{G}_b|^2 = 0,$$

Härmed skulle beviset vara färdigt. Om jag lyckas komma på ett bevis med mindre räkningar, skall jag meddela dett på tisdag.

Med utmärkt högaktning

Helge Dalin

Translation:

Professor Riesz, Lund.

I believe now that I have found a kind of proof, but I dare not tell if if is so simple and consides with the proof im my talk. Assume $g(x)$ is given and that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$$

converges. Set

$$\begin{array}{ll} g_a(x) & = g(x) \quad \text{in } [-a,+a]; \\ g_a(x) & = 0 \quad \text{outside } [-a,+a] \\ & \text{and} \end{array}$$

$f_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} g_a(t) dt,$

Then one shows first Parseval's theorem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_a(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a(t)|^2 dt \tag{2.1}$$

From here it follows ,that $f_a(x)$ converges "im Mittel" (in the mean') to a limit / $f(x)$, which also has

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)^2 dx$$

convergent.

If we then set

$$f_b^*(t) = f(t) \text{in } [-b,+b]; f_b^*(x) = 0 \, \text{outside} \tag{2.2}$$

and

$$\mathfrak{G}_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x t} f_b^*(t) dt, \tag{2.3}$$

we have to prove that $\mathcal{G}_b$ converges "im Mittel" (in the mean) to $g(t)$, *i. e.*

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - \mathcal{G}_b|^2 dt = 0. \tag{2.4}$$

Instead of (2.3) we show first that

$$\lim_{a,brightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - \mathcal{G}_b(t)|^2 dt = 0.$$

[We have]

$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_a(t) - \mathcal{G}_b|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_a - \mathcal{G}_b)(\overline{g}_a - \overline{\mathcal{G}}_b) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a \cdot \overline{g}_a + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_b \cdot \overline{\mathcal{G}}_b -$

$- \int_{-\infty}^{+\infty} g_a \overline{\mathcal{G}}_b dt - \int_{-\infty}^{+\infty} + \mathcal{G}_b \overline{\mathcal{G}}_b.$

Now according to (2.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a \overline{g}_a dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a \overline{f}_a dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_a|^2 dt.$$

More over we get

$$g_a(x) \cdot \overline{\mathcal{G}}_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} \overline{f_b^*(x)} \cdot g_a(x) dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x) \overline{\mathcal{G}_b(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} \overline{f_b^*(x)} \cdot g_a(x) dt.$$

As all intervals two the right are finite ($g_a g_b = 0$ outside $[-a, +a]$, $[-b, +b]$), can we change the order of integrations, hence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a \cdot \overline{G} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_b^*(x)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} g_a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_b^*(x)} f_a(x) dt.$$

[From here we then obtain]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_a|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_b^*|^2 dt - \qquad (2.5) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f^*(t)} \cdot f_a(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f_b^*(x) \cdot \overline{f_a(t)} dt. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

As now both f_a and f_b^* converge in the mean to f, we get from this

$$\lim_{a,brightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f} \cdot f dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \overline{f}$$

In particular, we then get

$$\lim_{b \to \infty} \lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_a - \mathcal{G}_b|^2 = 0,$$

i. e.

$$\lim_{b \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g - \mathcal{G}_b|^2 = 0,$$

In this way the proof seems to be complete. If l manage to find a proof with fewer cumputations, I shall commuicate it on Tuesday.

Yours faithfully, Helge Dalin

2.33 Gösta Danielsson

2.33.1 Postcard Hälsingborg Aug 29, 1945

Hälsingborg den 19 aug. 1965

Korrektur har för i dag anlänt från Elementa. I juli fick jag manuskriptet tillbaka och blev ombedd att göra vissa omredigeringar enl. förslag av fil. lic. Stig [Comét]. Då jag ansåg, att Professorn redan haft tillräckligt besvär med denna uppsats, brydde jag mig ej om att på nytt fråga Professorn till råds beträffande detta förslag, som jag f.ö. fann gott.

Korrekturet har begärts åter omgående. Då jag ej vet, om Professorn är hemma, och en eftersändning resp. utebliven dito är olämplig, eftersom saken tydligen är brådskandes, vågar jag ej skicka det. Jag kommer emellertid till Lund i morgon, oberoende av denna sak, och ringer på förmiddagen för den händelse att Professorn skulle vilja se det.

Högaktningsfullt

Gösta Danielsson

Translation:

The proofs did arrive today from the *Elementa*. In July I got back the manuscript and was asked to make some changes suggesed by Stig [Comét]. As I thought that you, Professor, already had had enough trouble with this paper, I did not bother to ask for advice from you regarding this suggestion, which I, by the way, found excellent.

The proofs have been asked to be returned instantly. As I do not know if you, Professor, are at home, and a forwarding / an omitted ditto are unsuitable, the matter apparently being urgent, I do not dare to send it. However, I will come to Lund tomorrow, independently of this matter, and I will call before lunch in case you, Professor, would like too look at it.

Högaktningsfullt

Gösta Danielsson

[61] Gösta Danielsson (1918-1994), registered LU 1939.

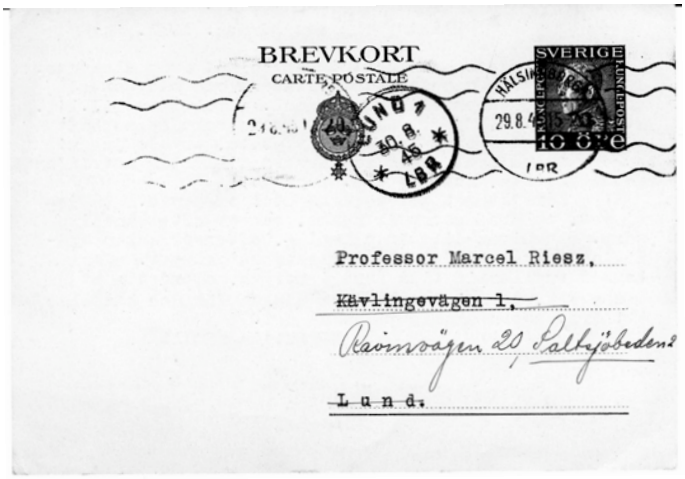


Figure 2.19: Postcard Hälsingborg Aug 29, 1945

2.34 Karl Dickman

2.34.1 Letter Råsunda Mar 6, 1929

Råsunda 6/3 1929

Broder Riesz!

Enligt överenskommelse skall jag nu försöka lämna en kort redogörelse för innehållet i de enkla forskningar i talteori, varmed jag roat mig på gamla dar.

För halvtannat år sedan försökte jag få in i Vetenskapsakademiens arkiv en liten uppsats "On the maximum number of consecutive positive addenda contained in a positive integer". Jag indelade där talen i olika klasser och sade, att ett tal tillhörde en klass n, om det utgjorde en summa av n och icke mer än n konsekutiva hela pos. tal. Om n är udda, låter jag P betyda en potens av 2. Om n är jämnt, betyder P ett primtal > 2. Förutom vissa tal mellan $\frac{N^2}{2}$ och $\frac{N^3}{2}$, bestå de tal som tillhöra klass n, av alla tal av formen $t = \frac{nP}{2}$, där $P > n$.

[62]Karl Dickman (1861-1947), fil. kand. 1884, worked as an actuary at the insurance company Liv ture. as well as other offices.

Exempel.

Klass	1	består av	2^{y-1}	(alla potenser av 2)
Klass	2	består av	P	(alla primtal > 2)
Klass	3	består av	$3 \cdot 3 \,\text{och}\, 3 \cdot 2^{y-1}$,	där $y > 1$
Klass	4	består av	$2 \cdot 3 \cdot 3 \,\text{och}\, 5 \cdot p$,	där $p > 4$
Klass	5	består av	$5 \cdot 3, 5 \cdot 5, 5 \cdot 2 \cdot 5 \text{och}\, 5 \cdot 2^{y-1}$,	där $y > 2$
Klass	6	består av	$2 \cdot 3 \cdot 3 \,\text{och}\, 3 \cdot p$,	där $p > 6$

Jag betecknar med $\mathcal{N}_n(x)$ antalet tal $< x$ tillhörande klass n. Då är

$$\mathcal{N}_{2g-1}(x) \sim \frac{\log x}{\log 2};$$

$$\mathcal{N}_{2h}(x) \sim \pi(\frac{x}{h}) \sim \frac{\frac{x}{h}}{\log \frac{x}{h}} \sim \frac{x}{h \log x},$$

$\pi(x)$ är antalet primtal $\leq x$. Alltså följer

$$\frac{\mathcal{N}_{2g-1}(x)}{\mathcal{N}_{2h}(x)} \sim \frac{h}{\log 2} \cdot \frac{\log^2 x}{x} = 0; \quad x \to \infty.$$

Om däremot $\Sigma_{2g-1}(x)$ betecknar antalet tal $< x$ tillhörande *alla* udda klasser och $\Sigma_{2k}(x)$ antalet tal $< x$ tillhörande *alla* jämna klasser, lyckades jag *icke* bevisa, att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Sigma_{2g-1}(x)}{\Sigma_{2k}(x)} = 0$$

men ägnade senare delen av min uppsats åt att söka göra troligt, att så är förhållandet.

Funderingarna härpå ledde mig in på ett annat problem.

Det har ju gjorts åtskilligt rörande *antalet* primfaktorer och divisorer till hela tal, men däremot är mig intet bekant om undersökningar rörande frekvensen av tal med primfaktorer och divisorer av viss relativ *storlek*.

Beträffande primfaktorer har jag kommit till följande resultat.

en given positiv kvantitet < 1.

$\phi(, x)$ antalet hela tal $t \leq x$, för vilka den största primfaktorn är $\geq t$.

Det gäller att finna ett approximativt uttryck för

$$f() = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \phi(, x).$$

Då $\geq \frac{1}{2}$, är $f() = \log \frac{1}{} = \int_{1} \frac{dy}{y}$.

Då $\frac{1}{n+1} \leq < \frac{1}{n}$, är

$$f() = f(\frac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}} \frac{1}{y}(1-f(\frac{y}{1-y}))dy$$

$$(\leq y \leq \frac{1}{n} \text{medför}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{}{1-} \leq \frac{y}{1-y} \leq \frac{1}{n-1}.$$

$$\begin{aligned} f() &= f(\tfrac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}} \tfrac{1}{y}(1-f(\tfrac{y}{1-y}))dy \\ &(\leq y \leq \tfrac{1}{n} \text{ medför } \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{}{1-} \leq \tfrac{y}{1-y} \leq \tfrac{1}{n-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f() &= f(\tfrac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}} \tfrac{1}{y}(1-f(\tfrac{y}{1-y}))dy \\ &(\leq y \leq \tfrac{1}{n} \text{ medför } \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{}{1-} \leq \tfrac{y}{1-y} \leq \tfrac{1}{n-1}). \end{aligned}$$

$$\int_{\beta} |f(z)dz| < \int_{|f(z)dz|.}$$

$$\int_{\beta} |f(z)dz| < \int_{|f(z)dz|.}$$

$$\int_{L} \left| f^2(z)dz| < 2 \int_{|} f^2(z)dz \right|.$$

$$\begin{aligned} f() &= f(\tfrac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}} \tfrac{1}{y}(1-f(\tfrac{y}{1-y}))dy \\ &(\leq y \leq \tfrac{1}{n} \text{ medför } \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{}{1-} \leq \tfrac{y}{1-y} \leq \tfrac{1}{n-1}). \end{aligned}$$

Sannolikheten för att den största primfaktorn till ett tal t ligger mellan t och t^{β} kan sägas vara $f() - f(\beta)$, där $0 \leq < \beta < 1$.

Genom successiv beräkning av integralerna kom jag till följande exempel.

	$1-f()$
1	1
1/2	0.3068 5282 $(=-\log 2)$
1/3	0.0486 0844
1/4	0.0049 1096
1/5	0.0003 5473
1/6	0.0009 1/964
1/7	0.0000 1964

Sista siffran i talet är kanske inte exakt.

Beträffande sannolikheten $\phi(,\beta)$ för att ett tal t skall ha en primfaktor mellan t och t^β har jag ställt upp formeln för det fall, att såväl som β ligger mellan $\frac{1}{n+1}$ och $\frac{1}{n}$, fann sålunda följande sats:

Om $\frac{1}{n+1} \leq < \beta \leq \frac{1}{n}$, så är

$$\phi(,\beta) = \log\frac{\beta}{-} - \frac{1}{2}(\log\frac{\beta}{-})^2 + \frac{1}{3}(\log\frac{\beta}{-})^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(\log\frac{\beta}{-})^n.$$

Jag har här meddelat mina resultat utan bevis, dels emedan jag förut så noga utformat dem och inte haft tid att sedan i somras syssla med dessa saker, dels emedan jag nu inte hinner att söka återupptaga mina tankar, förr än jag i nästa månad blir pensionerad. Då vore det trevligt att få tillfälle att tala litter med dig.

Vännen

Karl Dickman

Translation:

Dear Brother Riesz,

As we agreed, I shall now try give a short description of the contents of some simple research in Number Theory that I have amused myself with in myold age.

A year and a half ago I tried to published in the *Archive* [of the Academy] a small note "On the maximum number of consecutive positive addenda contained in a positive integer". I divided there the numbers into various classes and said that a number belonged to a class n if it was the sum of n and not more than n consekutive integer. If n är odd, I let P denote a power of 2. If n is even, then P stands for a prime > 2. Besides certain numbers between $\frac{N^2}{2}$ and $\frac{N^3}{2}$, the numbers belonging to class n consist of all numbers of the form $t = \frac{nP}{2}$, with $P > n$.

Example.

Klass	1	is made up of	2^{y-1}	(all powers of 2)
Klass	2	is made up of	p	(all primes > 2)
Klass	3	is made up of	$3 \cdot 3 \,\text{och}\, 3 \cdot 2^{y-1}$,	where $y > 1$
Klass	4	is made up of	$2 \cdot 3 \cdot 3 \,\text{och}\, 5 \cdot p$,	where $p > 4$
Klass	5	is made up of	$5 \cdot 3, 5 \cdot 5, 5 \cdot 2 \cdot 5 \text{och}\, 5 \cdot 2^{y-1}$,	where $y > 2$
Klass	6	is made up of	$2 \cdot 3 \cdot 3 \,\text{och}\, 3 \cdot p$,	where $p > 6$

Next I denote by $\mathcal{N}_n(x)$ the number of integers $< x$of class n. Then

$$\mathcal{N}_{2g-1}(x) \sim \frac{\log x}{\log 2};$$

$$\mathcal{N}_{2h}(x) \sim \pi(\frac{x}{h}) \sim \frac{\frac{x}{h}}{\log \frac{x}{h}} \sim \frac{x}{h \log x},$$

$\pi(x)$ is here the number of primes $\leq x$. Hence

$$\frac{\mathcal{N}_{2g-1}(x)}{\mathcal{N}_{2h}(x)} \sim \frac{h}{\log 2} \cdot \frac{\log^2 x}{x} = 0; \quad x \to \infty.$$

/, if ${}_{2g-1}(x)$ denotes the number of integers $< x$ belonging to *all* odd classes and ${}_{2k}(x)$ the number of integers $< x$ belonging to *all* even classes, I did *not* manage to prove that

$$\lim_{x \to \infty} \frac{{}_{2g-1}(x)}{{}_{2k}(x)} = 0$$

but devoted the latter part of my paper to try to make it plausible that so is the case.

These considerations then led me to another problem.

A lot has been done regarding the number of prime factors and divisors of integers, but nothing is known to me about investigations of the frequency of integers with prime factors and divisors of a certain relative *magnitude*.

Concerning prime factors, I have arrived at the following resultat.

a given positive quantity < 1.

$\phi(, x)$the number of intgers $t \leq x$ for which the largest prime factor is $\geq t$. We want to find an approximate expression of

$$f() = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \phi(, x),$$

If $\geq \frac{1}{2}$, then $f() = \log \frac{1}{} = \int_{1}^{\frac{dy}{y}}$.

If $\frac{1}{n+1} \leq < \frac{1}{n}$, then

$$f() = f(\tfrac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{y}(1-f(\frac{y}{1-y}))dy}$$
$$(\leq y \leq \tfrac{1}{n} \text{ implies } \tfrac{1}{n} \leq \frac{}{1-} \leq \frac{y}{1-y} \leq \tfrac{1}{n-1} \text{ }).$$

The probability for the largest prime factor of a number t to lie between t and t^β may be said to be $f() - f(\beta)$, where $0 \leq < \beta < 1$.

By successive computation of the integrals I arrived to the following example.

	$1 - f()$
1	1
1/2	0.3068 5282 $(= -\log 2)$
1/3	0.0486 0844
1/4	0.0049 1096
1/5	0.0003 5473
1/6	0.0009 1/964
1/7	0.0000 1964

The last figure in the number is perhaps not exact.

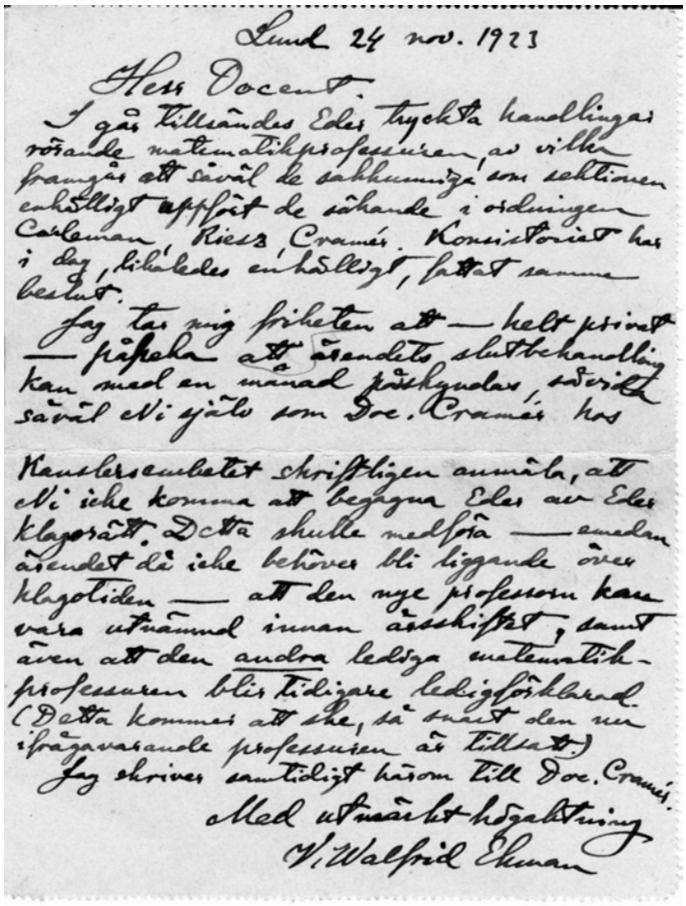
Regarding the probability $\phi(, \beta)$ for a number t to have a prime factor between t and t^β, I have stated a formula in the case that both and β lie between $\frac{1}{n+1}$ and $\frac{1}{n}$, and thus found the following theorem:

If $\frac{1}{n+1} \leq < \beta \leq \frac{1}{n}$, *then*

$$\phi(, \beta) = \log \frac{\beta}{} - \frac{1}{2}(\log \frac{\beta}{})^2 + \frac{1}{3}(\log \frac{\beta}{})^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(\log \frac{\beta}{})^n.$$

I have here communicated my results without proof, partly because I have previously formulated them so carefully and did not have time since last summer to busy myself with these matters, partly because I now do not have the possibility to try to resume my thoughts before I retire next month. It would be nice to have a chance to tallk a little to you then.

Yours faithfully Karl Dickman



Lund 24 nov. 1923

Herr Docent.

I går tillsändes Eder tryckta handlingar rörande matematikprofessuren, av vilka framgår att såväl de sakkunniga som sektionen enhälligt upplört de sökande i ordningen Carleman, Riesz, Cramér. Konsistoriet har i dag, likaledes enhälligt, fattat samma beslut.

Jag tar mig friheten att — helt privat — påpeka att ärendets slutbehandling kan med en månad påskyndas, vilket såväl Ni själv som Doc. Cramér har Kanslersembetet skriftligen anmäla, att Ni icke komma att begagna Eder av Eder klagorätt. Detta skulle medföra — emedan ärendet då icke behöver bli liggande över klagotiden — att den nye professorn kan vara utnämnd innan årsskiftet, samt även att den andra lediga matematikprofessuren blir tidigare ledigförklarad. (Detta kommer att ske, så snart den nu ifrågavarande professuren är tillsatt.)

Jag skriver samtidigt härom till Doc. Cramér.

Med utmärkt högaktning

V. Walfrid Ekman

Figure 2.20: Facsimile of Postcard Nov. 24, 1923

2.34.2 Postcard Hälsingborg Aug 29, 1945

2.35 V. W. Ekman

2.35.1 Postcard Nov 24, 1923

Herr Docent.

I går tillsändes Eder tryckta handlingar rörande matematikprofessuren, av vilka framgår att såväl de sakkuniga som sektionen enhälligt uppfört de sökande i ordningen Carleman, Riesz, Cramér. Konsistoriet har i dag, likaledes enhälligt, fattat samma beslut,

Jag tar mig friheten att – helt privat – påpeka att ärendets slutbehandling kan med en månad påskyndas, såvida Ni själv som Doc. Cramér hos Kanslersämbetet skriftligen anmäla, att Ni icke komma att begagna Eder av Eder klagorätt. Detta skulle medföra — emedan ärendet då icke behöver bli liggande över klagotiden – att den nye professorn kan vara utnämnd innan årsskiftet, samt även att den *andra* lediga matematik-professuren blir tidigare ledigförklarad. (Detta kommer att ske, så snart den nu ifrågavarande professuren är tillsatt.)

Jag skriver samtidigt härom till Doc. Cramér.

Med utmärkt högaktning

V. Walfrid Ekman

Translation:

Mr. Docent, Yesterday there were sent to you the acts concerning the professorship in Mathematics [at SH], from it follows that both the Section and the experts have unanimously put the applicants in the order Carleman, Riesz, Cramér. The Senate has today, likewise unanimously, made the same decision. I take myself the liberty – entirely privately – to point out that the finalization of the decision can be accelerated by one month if you as well Doc. Cramér report to the Senate in writing that you are not going to use your right to complain. This would imply — because then the matter will not be lying beyond the period of complaint – that the future professor can be appointed before the turn of the year, and also that the second vacant professorship in Mathematics will be annouced earlier. (This will happen as soon as the professorship in question is appointed.)

I am going to write at the same time about this to Doc. Cramér.

[63]Vagn Walfrid Ekman (1874-1954) – he wrote himsef always as V.W. –, /ist and oceanographer, professor in mechanics and mathematical /s at LU 19109. [114]. He wrote also a widely used text-book in mechanics, where he also took pains to teach about the history of the subject. When I was a student in the mid 1950's a passage from there had become proverbal: "Newton föddes 1642, samma år som Gailei dog." (Swedish, Newton was born in 1642, the same year as Galilei died.)

Yours faithfully

V. Walfrid Ekman

2.35.2 Postcard Oct. 18, 1940

Broder,

Det hade varit frestande att resa ned till Lund över lördag och söndag och träffa de danska kollegerna och vännerna. Senare i höst kommer jag ner, men just nu skulle det kollidera med en Stockholmsresa som jag ej kan uppskjuta. Det vore emellertid vänligt av Dig om Du – i den mån Du träffar dem – ville hälsa Nörlund, Harald Bohr, Jakob Nielsen och H.M. Hansen. Teologieprofessor Nörregaard träffar Du kanske ej, men gör Du det så ber jag även där om min hälsning. Liksom även förstås till kamraterna inom vår egen sektion.

Tillgivne

V. Walfrid Ekman

Translation;

Dear Brother,

It might have been temptating to go down to Lund for Saturday and Sunday to meet our Danish colleages and friends. Later this fall I will come down, but right now it would collide with a trip to Stockholm which I cannot postpone. Howerver, it would kind of you if you could – to the extent you see them – say hellow to Nörlund, Harald Bohr, Jakob Nielsen och H.M. Hansen. You will maybe not meet Nörregaard, Professor of Theology, but if you see him I beg you to give my greetings likewise to him. Not to forget the comrades in our own Section.

Yours faithfully

V. Walfrid Ekman

2.36 Alex Frank

2.36.1 Letter Jan 1, 1926

Docenten Herr M. Riesz
Stockholms Högskola

[64] Alex Frank (1898-1971), mathematician.



Figure 2.21: Facsimile of Postcard Oct.18, 1940 recto



Figure 2.22: Facsimile of Postcard Oct.18, 1940 verso

Undertecknad, inskriven vid SH h:t 1924, anhåller härmed vördsamt att få besvära Herr Docenten med att utfärda ett intyg, om att jag gått de för betyget Med beröm godkänd i fil. mag. examen erforderliga föreläsningarna och räkneövningarna. – Jag studerde matematik vid Högskolan läsåret 1924-25. Emellertid fick jag på grund av ekonomiska svårigheter söka mig förvärvsarbete, men jag hoppas dock, att jag skall kunna återvända till Högskolan h:t 1927. Ett intyg utfärdat av Herr Docenten skulle vara mig till nytta. Samtidigt vore jag ytterst tacksam för en upplysning huruvida det ej finnes någon möjlighet att få avlägga tentamen under sommarmånaderna juni, juli eller augusti. Det extra arbete jag i så fall förorsakade vederbörande examinator skulle jag naturligtvos själv ekonomiskt gottgöra.

Katrineholm den 4/1 1926
Alex Frank.

Translation:

I the, undersigned, registered at SH in the fall of 1924, hereby ask respectfully to be allowed to bother you, Docent by issuing a certificate that I have attended the courses and the calculating exercises necessary for the grade AB in the fil. mag. exam, – I studied mathematics at SH in 1924-25. However, because of economical hardship I had to find gainful employment, but I still hope to be able to return to SH in the fall of 1927. Thus, a certificate issued by you, Docent would be of use to me. I would, similarly, be utterly grateftul for information whether there might be any possibility to pass the exam during the summer months June, July or August. The extra job, that I in such case cause the examiner in question, will of course be compensated economically by me.

Katrineholm 4 January 1926
Yours faithfully, Alex Frank.

2.37 Ivar Fredholm

[65]Ivar Fredholm (1866-1927), mathematician, studies at UU, fil.dr. there 1898, in which year he also became a docent at SH, professor in mathematical /s there from 1906 on. Fredholm is most known for his work on integral equations, where he wrote a famous *Acta*-paper in 1900, culminating in the so-called *Fredholm alternative*. Also remembered because of his work on fundamental solutions of partial /s. [52], [114].

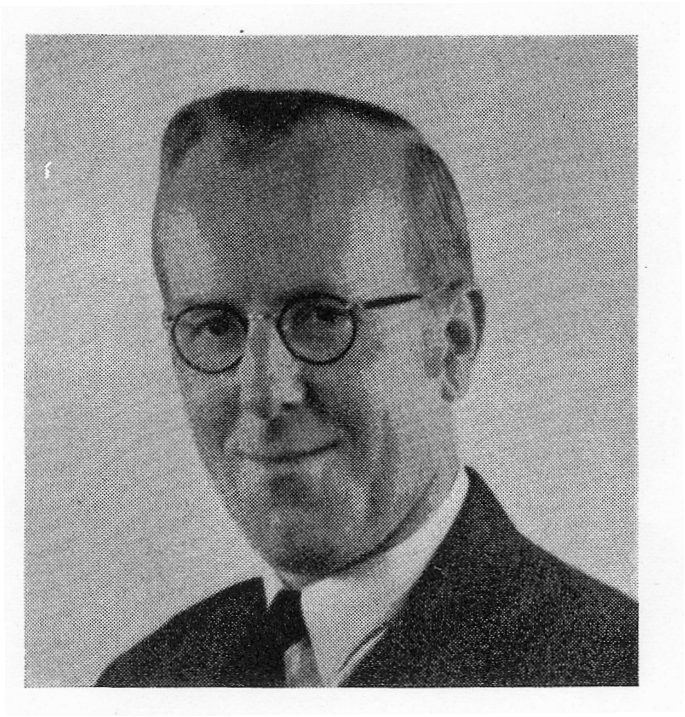


Figure 2.23: Nils Erik Fremberg. From [138].

2.37.1 Letter from Ivar Fredholm addressed to the Mathematical Society at SH

Jag har hjärtligt att tacka för den glädje som Matematiska föreningen vid Stockholm Högskola hedrar mig genom sin hälsning p min 60 rs dag.

Ivar Fredholm

Translation:

I have to thank heartily for the happines with which the Mathematiccal Society at SH honors me through its greetings on the occasion of my 60-th birth day.

Ivar Fredholm

2.38 Nils Erik Fremberg

2.38.1 Postcard July 20 1942

20/7 42.

B.B. En liten hälsning ur en icke oäven flik av Östersjön, där krafter och livsmod så smått börjar återvända. Hoppas Du också har det skönt. Jag har inte öppnat en bok, sedan jag kom hit, inte ens en detektivroman, men seglar och fiskar – badning är det sämre med. Min fru hälsar hjärtligt förvisso även tillgivne Nils Erik F-g.

Translation:

Dear Brother. A greeting from a not so bad corner of the Baltic Sea, where forces and courage to live slowly begin to return. I hope that you too have a nice time. I have not opened a book since I came here, not even a detective story, but I am sailing and fishing – not so much bathing. My wife sends you hearty regards and so does for sure, Yours faithfully, Nils Erik F-g.

2.38.2 Letter Jun 30 1945

Skenninge den 30 juni 1945
Professor Marcel Riesz
Lund

Broder,

[66]Nils Erik Fremberg (1908-1952), mathematician, student of Marcel Riesz at LU, fil.dr. 1946. In an unpublished seminar talk in 1939, Fremberg pointed out an essential mistake in Volterra's treatnent of a *problème mixte* for the cylindric wave equation in a polyhedrically / /. Otherwise his scientific work was directed on the *Riesz integral*. Fremberg's life was a tragedy, mainly due to a fractured leg as a boy, which ulcer never healed. According to Åke Pleijel [138], Fremberg had passed some 30 surgeries till 1947. Fremberg taught first at a famous Lund grammar school called "Spyken" (see Letter 29 Apr 1947), and since 1939, as a assistant teacher at LU. Beside being a talented and most devoted scolar, Fremberg was also a dedicated and gifted teacher. In particular, he wrote a compendium in Analysis, which became a model for the later text-book of Hyltén and Sandgren and of course carried the hallmark of Riesz; it was still in use in the curriculum in 1954, when I began to study mathematics. In 1949 the "riksdagen" (parliament) created a special postition for him as a "laborator". Fremberg played also an active rôle in the creating of the "panscandivian" journal *MathScand*, and being its first Swedish editor, representing the journal in the "Svenska matematikersamfundet" (Swedish Mathematical Society). [40]. [52], p. 289, [138].

I enlighet med gårdagens telefonsamtal skickar jag Dig korrekturet. Jag vill gärna rådfråga Dig om några detaljer.

På sid 3 nederst står, att det är variationen i τ, motsvarande variationen d av . Nu har $d\tau$ och d motsatt tecken, så uttrycket är inte väl ej fullt adekvat. Kan det lämpligem stå: dh is the numerical variation of τ ...?

Formlerna (8) och (11) på sid. 5 och 7 äro med anledning av de typografiska svårigheterna på medföljande löst papper.

Sid. 9. I tillämpningarna av lemmat $\lim_{rightarrow0} g(x)\,dx = g(0)$ beror även av på oskyldigt sätt. Bör detta påpekas t.ex. i en not? Samma sak gäller sid. 9 första raden: "according to the second row of (11)" måste väl efter omändringen formuleras annorlunda, t.ex. "according to the formula (11) for $p = 2$" eller "according to the second formula (11)"? sid. 10. Det är ju självklart, om > 0 och $\beta > 0$ i lemmat. Bör detta dock påpekas? Sid. 11 näst sista stycke står $S(t, x_i)$ och $f(x)$. Måste ändras. $S(t, x_i)$ och $f(t, x_i)$ *eller* bara S och f? Bör överallt i $\lim_{\to a0}$ stå $\to +0$?

Vi har det mycket bra i Skenninge, ett trevligt rum, mycken och god mat och snälla människor. Vädret har frånsett gårdagen, som var strålande, varit ojämnt, regn på morgnar och förmiddag, sedan solsken på eftermiddagarna. Det viktigaste är, att Jonas kunnat vara ute större delen av dagen och tycks må väl av västkustluften. Han lever rövare värre, jagar höns och katter, biter andra småbarn i näsan och står på huvudet nedför hoppor och kullar.

Jag måste nu rusa iväg till posten med brevet, för att det skall komma iväg före måndag. Hjärtliga häsningar från Din tlllgivne

Nils Erik F-g

Anmärkning 1 *I samma kuvert som ovanstående brev fanns också 3 sidor av nedanstående sats jämte bevis men inga som helst kommentarer.*

Sats 1 [Låt f_n vara en svit av mätbara (?) funktioner på räta linjen $\mathbb{R}$.] Om man för varje par av positiva tal och δ kan finna ett tal n sådant, att $|f_{n'+p} - f_{n'}| <$ utom i en punktmängd av måttet högst δ, konvergerar en delföljd f_{n_i} nästan överallt mot en gränsfunktion f.

Enligt modernare terminologi kallas en svit som f_n is satsen ovan för "Cauchy i mått" (Cauchy in measure). Se [41], där begreppet är definierat å sid. 37 medan satsen återfinns å sid. 38.

Translation:

Skenninge 30 June 1945
Professor Marcel Riesz
Lund

Dear Brother, As agreed in yesterday's phone call I send you the proofs. I would like to consult you in some details.

On p. 3 from the bottom it is written that it is the variation in τ, / to the variation d of . But $d\tau$ and d have opposite signs, so this expession is may be note fully adequate. Is it possible to write: dh is the *numerical* variation of $\tau \ldots$?

The formulae (8) and (11) on p. 5 and 7 are because of the typographic difficulties on an attached separate sheat.

p. 9. In the application of the lemma, $\lim_{\rightarrow 0} g(x)\, dx = g(0)$ depends also on in an innocent way. Should this be pointed out e. g. in a footnote? The same thing concerns p. 9 in the first line: "according to the second row of (11)" must probably after this change be formulated differently, e.g. "according to the formula (11) for $p = 2$" or "according to the second formula (11)"? p. 10. It is, of course, self-evident if > 0 and $\beta > 0$ in the lemma. Must this be pointed out? On p. 11 in the penultimate paragraph it is written $S(t, x_i)$ and $f(x)$. Must be changed $S(t, x_i)$ and $f(t, x_i)$ *or* just S and f? Must one everywhere in $\lim_{\rightarrow 0}$ write $rightarrow + 0$?[67]

We enjoy very much Skenninge[68] a nice room, a lot of good food and friendly people. Except yesterday's, which was brilliant, weather has been uneven, rain in the morning and a.m. then sunny in the afternoon. The most important thing is that Jonas has been able to be outdoors most of the days and seems to feel fine in the west-coast air. He raisws hell, chases hens and cats, bites other small children in their nose and stands on his head up and down hills.

Now I have to rush to the postoffice with letter to have it sent befor Monday. Hearty greetings

[67] *Editor:* Some passages in the above paragraph are in *English* in the original, / what is within quotes.

[68] Nowadays spellt Skänninge, small town (pop. 3242, 2006), not far from Lake Vättern and not far from the slightly bigger town Mjölby (pop. 11 972, same year), again to the South West of Linköping. [114]

Yours faithfully Nils Erik F-g

Remark 4 *In the same envelope as the above letter there also 3 pages with the following theorem including a proof but not any kind of comment.*

Theorem 3 [Let f_n be a sequence of measureble (?) functions on the real line $\mathbb{R}$.] If one can find for any pair of positive numbers and δ a number n such that $|f_{n'+p} - f_{n'}| <$ except for a point set of measure at most δ, then there is a subsequence f_{n_i} convergent allmost everywhere to a limit function f.

According a more modern terminology, a sequence like f_n in the / above is said to be "Cauchy in measure". See [41], where this notion is defined on sid. 37 while the / is is found sid. 38.[69]

2.38.3 Postcard 22 Dec 1950

Lund den 21.12. 1950

Broder! Jag har talat med Kjellberg och bestämt skrivningsdagarna 16-18 jan. – Det ser faktiskt ut, som om jag skulle klara mig undan infektionen denna gång, och det kan verkligen behövas, eftersom hela familjen f.ö. ligger till sängs och säkert måste göra det flera dagar till. Hoppas, att allt är väl med Margit och hennes familj. Det är möjligt, att vi reser till Småland vid nyår.

Hjärtliga hälsningar till Er alla, God Jul!

Din tlllgivne Nils Erik

Translation:

Dear Brother, I have spoken to Kjellberg[70] and fixed the days for the written exams to 16-18 January. – It really looks like that I would avoid having an infection this time, and this is really of need, as besides, the rest of the family is sick in bed and will probably a few days more. I hope that all is well with Margit and her family. It is possible that we go to Småland[71] for the New Year.

Hearty greetings to you all, Merry Christmas,

yours truly Nils Erik

[69] *Eds*: All information in this paragraph was communicated Alexandru Aleman. Indeed, he was teaching precisely on this matter the very day I asked him about it!

[70] Bo Kjellberg (19xy-zw), mathematician, studied under Beurling at UU, fil.-dr. thesis citekj, later professor at KTH. [**?**], p. 153.

[71] District in Sweden to the North of the district of Skåne, were Lund is cituated.

2.38.4 Letter 29 Apr 1947

Lund den 29 april 1947

Käre Broder.

Av informationer som ingått från Amerika tycks framgå, att Du trivs bra och det gläder mig. Här går allt sin gilla gång, men just i dagarna har ett allvarligt orosmåln seglat upp, vilket är orsaken att jag skriver detta brev. Jag borde egentlige skämmas lite över att först av brännande personliga skäl låta höra av mig, men hoppas på överseende. Saken är den, att Universitetskanslerns yttrande över Universitetsberedningens förslag kommit för en tid sedan. Han bryter där helt sönder beredningens utredning om preceptoraten. Kanslern anser, att preceptorat skall ingå blott i sådana ämnen, som sakna professur, eller som representera självständiga forskningsområden inom fack, där professur finnes, t.ex. ekonomisk historia. I ämnen, där det i första hand kommer an på meddelande av elementär undervisning, vill han bibehålla de biträdande lärarna, med arvodet höjt till 10.400 kr (mot 9.360 nu). I matematiken föreslås inalles två biträdande lärare. Universitetskanslerns yttrande har skrivits av en biträdande statssekreterare, Edelman, så enligt vad Kjölleström först påpekade måste man vänta sig att regeringens proposition slulle bli likalydande. Det går ju inte på remiss, så det föreföll som om ingenting skulle kunna göras åt saken. Fö har jag varit trött (efter en envis käkinfektion, som slutligen måste opereras, vilket skedde under påsklovet. Bra nu.) och besviken, att jag inte har haft lust till att undersöka möjligheter för slutpåminnelser. Men Carsten Welinder var på mig och så i går träffade jag Kjöllesrtröm, som meddelade att det var stor opposition mot kanslern på alla håll, vilket resulterat i ett trappspring hos vederbörande i Stockholm. Jag talade med Zeilon i dag. Han hade inte reda på någonting och blev mycket upprörd över det jag berättade. Han menade att vi absolut borde göra vad som göras kunde för att rikta uppmärksamheten på den särställning, som matematiken dock intar inom sektionen. Denna särställnig har ju tidigare också kommit till uttryck genom att matematiken (liksom geografin) hade en speciell lärarbefattning, men detta har nu undanskymts genom inrättandet av lärarbefattningar i andra ämnen också. Alla har i kanslerns yttrande behandlats i en klump. Jag ringde till Uppsala för att höra deras inställning och fick veta, att Beurling varit mycket förbannad. De har inte heller tänkt sig någon möjlighet att kunna åstadkomma en ändring. Enda möjligheten är naturligtvis att uppvakta regeringen på något sätt och det måste nog ske så fort som möjligt. Propositionen kommer den 10 maj. Det är verkligen hårt för mig, att Du och Torsten Gustafson inte är här nu, also to T.G., who is supposed to be in Washington these days. Han kan möjligen rikta Erlanders uppmäksamhet på saken.

Så som det nu ser ut att gå med min tjänst är det ju klart att jag omedelbart måste revidera mina framtidsplaner. Men för ögonblicket är det en idé jag fått som förefaller leda till visst andrum. Du får inte misstycka att jag framlägger detta förslag, men det blir ju helt

beroende på Din inställning. (Endast Pleijel, indirekt även Ragnarsson, är informerade.) Jag hade trott att jag skulle få stanna i Lund ännu några år och då under för mig så ovanliga förhållanden att slippa plottra bort tiden med extratjänster utan under drägliga ekonomiska omständigheter, som skulle möjliggöra för mig att verkligen spänna krafterna på allvar. (Förra vårterminen blev visserligen till föjd av kända omständigheter alltför hektisk, men jag tänker ofta på hur underbart det var att helt få ägna sig åt matematik. Skratta nu inte åt detta, som kan verka floskler, men jag hinner inte välja mina ord.) Ett av docentstipendierna inom matematiska gruppen (det i mekanik) är ledigt och kan ledigförklaras när som helst (senast den 10 maj för att kunna behandlas denna terminen) och utdelas på *ett år* till docent i matematik (på tre år till docent i mekanik, men en sådan finns inte sedan Hulthén fått forskarstipendium och lär väl inte finnas ännu på ett år.) För övrigt finns tre fria stipendier lediga inom sektionen och endast en disputation i vår (i geografi, där dessutom ett stipendium är ledigt) så jag kan inte gå i vägen för någon genom att få ett ledigt stipendium. Det skulle ju betyda mycket för mig. Min tjänstgöring på Spyken skulle skäras till 4 eller 6 timmar (mot 12 nu) och jag skulle ju få minskning i min tjänstgöringsskyldighet vid institutionen. Dvs jag är givetvis beredd att hålla min kurs i fortsättningen, men övningarna kan ju övertagas av andra. Med tanke på ett telefonsamtal jag hade med Dig strax efter min disputation förra våren är det möjligt att Du finner denna min begäran oförskämd, men jag har aldrig fått klarhet i huruvida Din då framkastade åsikt blivit den definitiva. Det föreföll mig då, som om vi skulle resonera närmare om saken längre fram, men därav blev intet. Har jag misstolkat situationen, ber jag Dig om tillgift, och då är hela saken utagerad.

Jag har fått ett Bokelundskt resestipendium till Schweiz och skall besöka Zürich och Pauli en månad i sommar. Det skall verkligen bli roligt och jag hoppas även givande.

Nils Erik F-g

Translation:

Dear Brother,

From information obtained from America, it seems that you are doing well and this makes me happy. Here things go on just as usual but recently a serious cloud has turned up, which is the reason why I write this letter. I should really be somewhat ashamed that I let me know to you first because of urgent personal reasons, but I do hope that you excuse me. Namely some time ago, the expert opinion of the Chancellor of the universities was made public. He demolishes the preliminary report of the commitee regarding the preceptor positions.[72] The Chancellor thinks that there should be a preceptorship only in subjects where there is no professorship or which represent independent areas of research

[72] "Preceptor" means briefly "reader", or in the US "associate professor".

in subjects, for instance Economical History. In subjects where, in the first hand, there is given elementary teaching, he wants to keep the assistant teachers, with their fee increased to 10.400 Crowns (against 9.360 now). In mathematics altogeher two assistant teachers are suggested. The Chancellor's expert opinion was written by an assistant State Secretary, Edelman[73], so according to what Kjöllerström first pointed out to me that one must presume that the government's bill will be identical in wording. It will not even be sent back to the Department for consideration, so it seemed that nothing could be done to the matter.

Besides, I have been tired (after an obstinate infection in my jaw, which finally had to be opererated; this happened during the Easter vacation, so all is well now) and disappointed so that I did not feel any inclination to investigate the possibilities for any final reminders. But Carsten Welinder[74] urged me and so yesterday I met Kjöllerström[75], who told me that there was a great opposition against the Chancellor from all sides, which has led people to go and see those concerned in Stockholm. I spoke to Zeilon today. He did not know anything about this and got exited of what I told him. He was of the opinion that we should absolutely do what could be done in order to draw attention to the special position that mathematics after all holds in our Section. This special position has previously found its expression in the fact that mathematics (as well as geography) has a particular position as teacher, but this has now been obscured because particular positions as a teacher have been created in other subjects also. In the Chancellor's expert opinion everybody has been treated in one lump. I called Uppsala to find out their opinion and learnt that Beurling had been very upset. They have also not thought of any possibility to bring about a change. The option is of course to call on the government in some way but this has to be done as fast as possible. The bill will come on 10 May. It is really too bad for me that you and Gustafson [76] are not here now. I shall writer also to T.G., who

[73]In the original erroneously referred to as Edelmann. Ragnar Edenman (formerly Eriksson, 1914-1998), politician and civil servaint, a social democrat, Minister of Education and Ecclestial Affairs 1957-67 and Country Governor in Uppsala 1967-80. [114].

[74]Carsten Welinder, (1908-82), political economist, professor at LU 1948-74. W:s reaserch was mainly direted to public sector of ekonomi. Father of Stig W. (b. 1945, an an archeologist. [[]]

[75]Sven Kjöllerström (1901-81), theologian, professor in practical theology with ecclesiastuca law at LU 1941-67, prorecktor there 1956-64.

[76]Gustafson, Torsten, 1904-87, physicist, professor of mechanics and mathematical physics, later theoretical physics at LU 1939-70. G:s scientific activities concerned, in the onset, mainly the current problem for bodies in motion, / hydrodynamics; later he published papers in quantum electrodynamics and nuclear physics. G. played a central roll in Swedish research policy in the period after World War II, especially as scientific advisor to Tage Erlander. [114]. In Lund, he was often frequentlly, familiarly referred to just as T.G. As a teacher, G was know to start his course with a very detailed lecture; the following ones were then devoted to repetions of this first one. Since I (foolishly!) never

is supposed to be in Washington these days. Should he be in Chicago, could you, please, show him this letter. Perhaps he can possibly turn Erlander's[77] attention to thIs matter.

As thing seem to go with my position, it is certainly clear that I must at once revise my plans for the future. But at the moment there is an idea that I have got that seems to lead to some breathing-space. I hope you do not mind that I put forward thus a suggestion, but it will be entirely dependent on your attitude. (Only Pleijel, indirectly also Ragnarsson, are informed.) ,

I had thought that I would stay in Lund still a few years and then under for me so unusual conditions, not to have to waste my time with temporary positions, but in acceptable economical circumstances, which would make it possible for me to show my ability. (The last spring term was however, due to known facts, far too hectic for me, but I often think how wunderful it was to be able to devote oneself entirely to mathematics. Please, don't laugh to this, now, which may seem empty phrases, but I do not have time to choose my words.) One of the docent stipends in the mathematical group (the one in mechanics) is vacant and may be announced any day (not later than on 10 May, in order to be handled this term) and given out for one year to a docent in mathematics (for three years to a docent in mechanics, but there is not any, after Hulthén got a research stipend, and there ought no to be any during one year.) Besides, there are three vacant stipends within the Section, and there has been only one disputation this spring (in geography, where, by the way, there is a vacant stipend) so that I cannot obstract anybody by getting a vacant stipend. This would mean much to me, my duties at Spyken[78] could be cut to 4

attended a lecture by him, I cannot tell if this is true or not.

[77]Tage Erlander (1901-1985), Swedish polititian and statesman, a social democrat. He studied in Lund natural sciences, among them also mathematics; /s; and social sciences. (I have been told that the /ist in Lund did not trust tTage very much, so they let him make his experiments alone in the garden of the building in the beginning of Sölvegatan, then housing both mathematics and /s. He was very active in student life and belonged to a group of radicals D.Y.G. ("de yngre gubbarna", the younger fellows). Furthermore he was among the founders of LMS in 1925. In Lund Erlander met also his future wife Aina, likewise a mathematics student, serving later as a secondary school teacher. Their son is the mathematician Sven Erlander (b. 1934, fil. dr. SU 1968, professor in optimation theory LIH 1971, retired in 1999. [**?**]). Tage Erlander graduated in 1928 and was then employed by the Svensk Uppslagsbok (Swedish Encyklopedia) in Malmö. In 1930 Erlander was elected City Councillor in Lund. From this time on he devoted himself exclusively to politics. Two years later he became a member of the Parlament (the "Riksdag). He became a State Secretary in 1938 and a Cabinet Minister in 1944. When Prime Minister Per Albin Hansson died unexpectedly in October 1946, Tage Erlander was, to everybody's surprise, made his successor. On this post he remained in 32 years, at the same time also being the party leader. [114].

[78]Legendariy secondary school in Lund, founded in 1848, for a long time called Lunds privata elementarskola (Lund Private Elementary School), by the population nicknamed Spyken, because they were supposed to use *psychological methods* there, since 1986 also

or 6 hours (*versus* 12 now) and I could even diminsh my obligations at the Department. That is, I am of course willing to offer my course even in the sequel, but the exercises could certainly be taken over by to others. In view of the telephone call, I had with you immediately after my disputation last spring, it may be possible that you find this my request impudent, but it was not clear to me whether the opinion you gave then has remained your final one. It seemed to me then as if we would discuss this closer later on, but nothing has become of it. Should I have misinterpreted the situation, I ask you for forgiveness, and then everythuíng is settled.

I have got one of the Bokelundian travelling scholarships for Switzerland. I intend to visit Zürich, and Pauli for one month this summer. This shall really be entertaining and, I do hope, also rewarding.

Yours faithfully. Nils Erik F-g

2.38.5 Letter to Fremberg from Werner Fenchel Feb 21, 1949

21.2.49.

Kære Nils Erik!

Jag har læst Kap. V. Nogle få trykfel, som jeg har opdaget, er rettet. Principielt har jag kun een bemæreknig til *66*, s 131-132. Ved læsningen gik det pludseligt op for mig, at dette jo er et specielt tilfalde af den geometriske teori for en partiell differentialligning af 1. orden af formen

$$\Phi(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_m}) = 0.$$

I dette tilfælde er Φ en kvadratisk form, altså Monges kegle en kegle af 2. orden og identisk med den karakteristiske kegle. De karakteristiske flader er differentialligningens lösninger og de isotrope linier Cauchys karakteristiske kurver. Har man givet en $\underline{(m-2)}$-dimensional mangfoldighet $\mathcal{S}$, får man integralfladerne der går igenom $\mathcal{S}$, som enveloppen af die karakteristiske kegler, som har toppunkt på $\mathcal{S}$. Man får på denne måde to flader. Når $\mathcal{S}$ ligger på en karakteristisk kegle, er denne den ene envelop og den andem er den reflekterede "kegle".

---

the official name. [114]. Many Swedish mathematicians have been disciples there (Lars Hörmander, Sven Spanne), or been teachers (Harry Malmheden, Folke Lannér, Nils Erik Fremberg).

Jag mener ikke, at den skal andres noget. Men man skulle måske tilføje en bemærkning. at det drejer sig om Cauchys teori for den partielle differentialligning

$$\sum_1^m {}_k^{-1}(\frac{\partial g}{\partial \xi_k})^2 = 0.$$

Werner

Jeg har læst Kap. VIII, s 159 ... og synes at framstillingen er god og meget klar. Ingen garanté for fuldstændighed! Der kun een principiel sag, jaeg har at bemærke. Side 161 forneden står: "Au point où nous sommes, le vecteurs contravariants et covariants sont des objets géom. distincts." Jeg er fuldstændigt inforstået hermed! Men så må man efter min mening *ikke* tale om "composantes contravariantes d'un vecteur contravariants". En kontravariant vektor kan principiellt *kun* have kontravariante komposanter. Hermed hænger det samman, at styket: La situations changée" ..." (side 161 formneden – 162 foroven) efter min mening ikke er korrekt formuleret. Situationen er dog den, at i et Riemannskt rum kan man etablere en enentydig (og invariante) korrespondance mellan kontravariante og kovariante vektorer ved

$$v_j = g_{jk}, \quad u^k = g^{kj}v_j.$$

Man betragter nu et par bestående af en kontravariante og en kovariante vektor som en geometrisk størelse, og denne kan have kontravariante og kovariante komponenter.

Venlig hilsen Werner

Translation from Danish:

Dear Nils Erik, I have read Chap. V. A few printing errors, that I found, have been corrected. In principle I have only one remark to *66*, p 131-132. While reading it I suddenly realized that it is just a special case of the geometric theory of a partial differential equation of the 1-st order of the form

$$\Phi(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_m}) = 0.$$

In case Φ is quadratic form, then the Monge cone is a conic of the 2-nd order and identical to the characteristic cone. The characteristic surfaces are the solutions of the differential

equation and the isotropic lines Cauchy's characteristic curves. If there is give an $(m-2)$-dimensional manifold $\mathcal{S}$, one obtains the integral surfaces passing through $\mathcal{S}$ as envelopes of the characteristic cone which have their vertex on $\mathcal{S}$. One obtains in this way two surfaces. When $\mathcal{S}$ lies on one, then one is an envelope and t the other is the reflecting "cone".

I do not mean that anything should be changed. But one should maybe add a remark that it is about Cauchy's theory for the partial differential equation

$$\sum_1^m {}_k^{-1}(\frac{\partial g}{\partial \xi_k})^2 = 0.$$

Werner

I have read Chap. VIII, p 159 ... and it seems that the presentation is good and very clear. No garantee for completness! There is just one principal thing thay I wish to point out. On page 161 at the bottom one reads: "Au point où nous sommes, le vecteurs contravariants et covariants sont des objets géom. distincts." (At the point that we are, the contravariant vectors and t covariant ones are distinct gemetrical objects.) I agree completely with this! But according to my opinion one must *not* speak of "contravariant components of a contravariant vector, A contravariant vector can in principle only have contravariant components. With this is connected that the passage: "La situation changée ..." (The changed situation ...) (p 161 at the bottom – p 162 at the top) according to my opinion is not correctly formulated. The situationen is however that in a Riemannian space one can establish a one-to-one (and /) correspondence between contravariant and covariant vectors by

$$v_j = g_{jk}, \quad u^k = g^{kj} v_j.$$

One considers now a pair consisting of a contravariant and a covariant vector as a geometric quantity, and it may have contravariant and covariant components.

Yours faithfully Werner

2.39 Sture Fronus

[79]Sture Fronæus, f. 1916, chemist, professor at LU 1958-64 in Chemistry and 1964-82 in Inorganic Chemistry. F. described, in mathematically rigorous papers, in the 1940- and 1950-s how the formation of complex metal ions may be studied with the help of ion exchangers and potentiometric measurements. This work was of great importance for the development of inorganic chemistry of solutions. In later years his research has mainly concerned mechanisms for reactions for transfer of electrones at electrode surfaces and in / phase. [114].

2.39.1 Letter to Saltsjöbaden Jun 20, 1942

Herr Professor Marcel Riesz

Saltsjöbaden

Jag får tacka för meddelandet, som jag fick idag. Att jag inte kommit ner till Lund i mitten på juni, beror på att jag inte varit bra. Jag hade i stället tänkt att komma ner ett par dagar efter midsommar. Den 30 juni skulle jag egentligen varit hemma för att undergå efterbehandling som värnpliktig, men jag har erhållit ett par dagars uppskov därmed, och då Professorn är villig att tentera den 29, så kommer jag till Lund då.

Med utmärkt högaktning
Sture Fronus

Translation:

Let me thank you for your message that I got today. The reasaon why I could not come down to Lund in mid June depends on that I have not been feeling well. Instead I had thought to come for a couple of days after midsommer. On 30 June I should really been at home for an after-treament as a service man, but I have obtained a few days' delay with, and if you, Professor, are willing to examine me on the 29-th, I will come to Lund then.

Yours sincerely, Sture Fronus.

2.40 Otto Frostman

2.40.1 Letter Munich May 24, 1933

Herr Professor!

[80]Otto Frostman (1907-1977), mathematician, studied under Marcel Riesz at LU – one of Riesz's best students! –, professor at SU 1952-73. F. wrote important papers in / theory and on / functions. Towards the end of his career he was less active scientifically. Instead he had many administrative comissions, such as secretary of the International Mathematical Union 1966-74, and as preses of KVA 1965-67.

Jag sänder Eder de hjärtligaste hälsningar från München och ber om ursäkt att jag inte låtit höra av mig förr. Men jag trodde att jag fått litet mer att skriva om – jag menar matematik.

Jag har talat med professor Carathéodory några gånger, dels i hans bostad och dels efter seminariet i förra veckan. Han var mycket vänlig och visade stort intresse för de saker, jag har sysslat med. Jag berättade om det arbete, som Hössjer och jag hålla på att trycka, jag hoppas få korrekturet så småningom. Min lic.-avhandling är ju tyvärr skriven på svenska, så den har jag inte brytt mig om att visa. Professor Carathéodory föreställde mig efter seminariet för de övriga professorerna Perron, Hartogs och Tietze. Carathéodory föreläser över ordinära differential/er (4 t.) [samt] Grundlagen der Geometrie (4 t.). Perron föreläser över elliptiska funktioner och talgeometri, Hartogs Darstellende Geometrie, Tietze över talteori. Föreläsningarna är tämligen elementära och intresserar mig inte mycket. I seminariet behandlas ett geometrsikt problem: 4 cirkelskaror på en torus.

Jag har funderat mycket på om man inte kunde göra något allmänt om automorfa funktioner, som äro begränsade i enhetscirkeln. Jag har ju redan stött på sådana i Hössjers arbete. Alltså med lämplig numrering

$$\begin{array}{ll} |f(z)| < 1 & \text{och regulär för }]z| < 1 \\ f(Tz) = f(z) & T \text{ diskret transformgrupp.} \end{array}$$

Är z en godtycklig punkt i enhetsskivan så är alltså

$$f(z) = f(T_k z) \quad k = 1, 2 \ldots$$

Härav följer enligt Blaschke, då $f(z)$ är begränsad,

$$\sum_k (1 - |T_k(z)|) \text{ konvergent } (\prod_k |T_k(z)| \text{ konvergent.}),$$

varav man åter kan härleda, att den Poincaréska serien

$$\sum_k \Big| \frac{dT_k(z)}{dz} \Big|$$

är konvergent. Gruppen är väl en Hauptkreisgrupp men ingen Grenzkreisgrupp. Den kan ha ändligt eller oändligt [många] Erzeugenden. Man kunde fråga sig omvänt, om man till en given grupp av ovannämnda slag kan finna en begränsad automorf funktion och vilka egenskaper denna i allmänhet har. Denna funktionsklass är troligen föga studerad, ty det är svårt att finna något i litteraturen. Jag har inte diskuterat saken med någon ännu.

Många hälsningar från Eder tillgivne lärjunge

Otto Frostman

Translation:

Dear Mr. Professor, I send you my heartiest greetings from Munich and ask you for forgiveness that I have not let me know to you before. But I thought that I have got a little more to write about – I mean mathematics.

Jag have been talking with Professor Carathéodory a coupleof times, partly in his home and partly after the seminar last week. He was very friendly and showed a great interest in the things that I had been engaged in. I told him about the paper that Hössjer and I were about to print. I hope that I will get the proofs by and by. My thesis for the degree of Licentiate is, unfortunately, written in Swedish, so I did not bother to show it to him. Professor Carathéodory introduced me after the seminar to the other professors Perron, Hartogs and Tietze. Carathéodory is lecturingon ordinary differential equations (4 h.) [and] "Grundlagen der Geometrie" (German, Foundations of Geometry)(4 h.). Perron is lecturing on elliptic functions and number geometry, Hartogs is lecturing about "Darstellende Geometrie" (German, descriptive geometry), and Tietze number theory. These lectures are rather elementary and do not interest me much. In the seminar a geometric problem is treated: 4 families of circles on a torus.

I have thought much if one could not do something general about automorphic functions that are / in the unit circle. As you know, I have already encountered such in Hössjer's work. Thus in suitable numbering

$$\begin{array}{ll} |f(z)| < 1 & \text{and regular for }]z| < 1 \\ f(Tz) = f(z) & T \text{ a discrete / group.} \end{array}$$

If z is an arbitrary point in the unit disk, thus

$$f(z) = f(T_k z) \quad k = 1, 2 \ldots$$

It follows, according to Blaschke, that $f(z)$ is /

$$\sum_k (1 - |T_k(z)|) \text{ convergent } (\prod_k |T_k(z)| \text{ convergent.}),$$

from which one can again deduce that the Poincaré series

$$\sum_k \Big| \frac{dT_k(z)}{dz} \Big|$$

is convergent. The group is presumably a "Hauptkreisgruppe" (main circle group) but no "Grenzkreisgruppe" (limit circle group). It can have finitely many or infinitely many

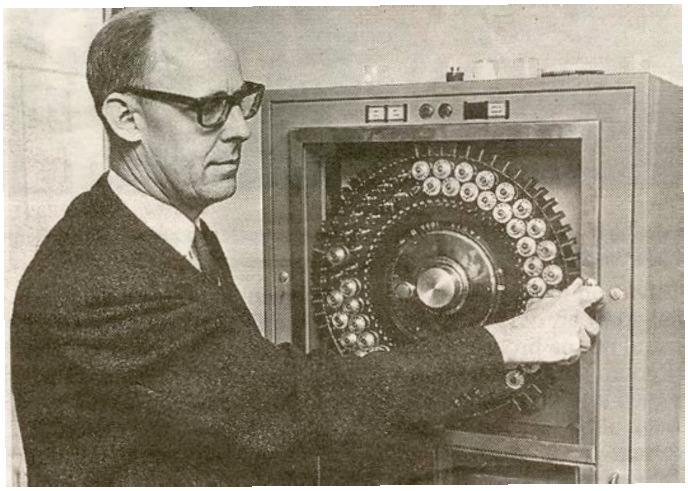


Figure 2.24: Carl-Erik Fröberg with SMIL

"Erzeugende" (generators). One could ask conversely if one can find, to a given group of the above kind, a / automorphic function and which properties it will have in general. This function class has probably not been studied, because it is difficult to find something in the literature. I have not yet discussed this with anybody.

Many greetings from your affectionate disciple

Otto Frostman

2.41 Carl-Erik Fröberg[81]

2.41.1 Letter July 11,1942

Slätthög 11.7. 1942.

Herr Professor!

[81]Fröberg, Carl-Erik (1918-2007)), trained as a theoretical physicist, professor i numerical analys at LU 1965-84. F. belonged to a group of holders of fellowships of IVA that in 1947-48 was sent to USA by the Swedish goverment to study computer technics and which came to play a central role in the early developments of this discipline in the country. The names of the 5 fellowship holders were: Arne Lindberger, Erik Stemme, Carl-Erik Fröberg, Gösta Neovius and Göran Kjellberg (a brother of the mathematician Bo Kjellberg). Thus he took part in the construction of SMIL ("Siffermaskinen i Lund" (the digit machine in Lund)); today a museum specimen) and wrote several, early text-books in Numerical Analysis and Programming. F. took also part in many popular events.

Med anledning av ex[empel] 36 vill jag endast påpeka, att en relativt enkel lösning fås, om man direkt utgår från

$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 <]Dettautvecklas, ochmanfårdåendast8termerkvar, vilkaparvi$

Detta är väl den väg man i första hand tänker på, och den leder faktiskt till målet. Jag tror knappast, att någon extra anvisning behövs i svaret.

Med bästa hälsningar

Carl-Erik Fröberg

Translation:

Dear Professor, In view of ex[ample] 36 I want only to point out a relatively simple solution that one gets directly starting from

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Expanding this, there remain only 8 terms which are put together two by two. After pulling out some factors, one arrives also to the expression that one has reason to expect, to wit

$$(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4) = 0.$$

This probably is the route that one thinks of in the first place, and it leds indeed to the goal. I believe that any special hint is hardly needed in the answer,

Yours faithfully ,Carl-Erik Fröberg

2.42 Torsten Gustafson

2.42.1 Letter Lund Aug 25, 1939

Bäste Broder!

I dessa oroliga tider har jag personligen fått anledning att glädja mig över den för mig synnerligen gynnsamma utgången av de 4 sakkunnigutlåtandena. Nu får man bara hoppa, att tiderna blir sådana, att det blir möjligt att ägna sig åt sin ordinarie verksamhet.

Jag skriver nu några rader till Dig och Zeilon i anledning av en hänvändelse till mig från Lamek Hulthén, som uttalat sin önskan och förhoppning

att kunna överflytta till Lund som docentstipendiat i matematisk fysik vid uppkommande ledighet. Jag har tagit reda på hans formella meriter, *cum ins.* på avhandlingen samt Fernerska priset från Vetenskapsakademien. Vidare har han underrättat Klein om denna sin hänvändelse.

Det förefaller mig, att man ur ämnets synpunkt endast på det sätt kan besvara detta. Det är tydligt, att man måste betrakta som en betydande vinst för ämbetet att erhålla en dugande docent, då någon doktorand vid universitetet ej finns. Stadgarna betonar väl två punkter som såsom väsentliga, dels vederbörandes duglighet, dels ämnets behov. Den matematiska fysikens och mekanikens behov av lärarkrafter äro ju mindre fyllda än något annat ämnes. En ny tillträdande ämnesrepresentant har kanske i särskild hög grad behov av docent.

Ja, jag vill härmed till Dig och Zeilon vidarebefordra denne Lamek Hulthéns hänvändelse, så att Ni kunna överväga saken

Torsten Gustafson

Translation:

Dear Brother, In these uneasy times, I have personally had reason to be pleased about the, for me extremely successful, end of the 4 expert reports. Now we have only to hope that the times will be such that it will be possible to devote oneself to one's ordinary activity.

I write now some line to you and Zeilon on the occasion of an appeal to me from Lamek Hulthén[82], who has expressed his wish and hope to be able to move to Lund with a stipend as a docent in mathematical /s if a vacancy would open. I have informed myself about his formal merits, cum ins on the thesis and the Ferner prize from KVA. Moreover he has let Klein know about this appeal by him.

It appears to me that from the subject's point of view one can reply to it in only one way. It is plain that one must regard it as a considerable gain to the subject to obtain a capable docent, as there are now graduate students at the university. The rules, I believe, emphasize two points as essentlial, first, the person's capability, second the needs of the

[82]Lamek Hulthén (1909-95), theoretical physicist, professor in applied mathematics at KTH 1949-54 and in mathematical physics 1954-76. His research and extensive authorship treated, among other things, antiferromagnetism, the two body problem in nuclear physics and the theory of continuous spectra. A great number of Swedish and international organizations in very varied /s, among other things, nuclear and space research /s, made use of his knowledge and administrative capacity.

subject. The needs of mathematical /s and mechanics regarding teachers are less filled than for any other subject. A new member of the subject has maybe in a particularly high degree use of a docent.

Yes, I wish herewith transfer to you and Zeilon this appeal by Lamek Hulthén, in order that youi could take the matter under consideration,

Yours faithfully Torsten Gustafson

2.42.2 Letter Lund Sept 6, 1939

Bäste Broder!

Hjärtligt tack för Ditt brev och för Din lyckönskan. Det gläder mig, att Du vill vara med vid behandlingen av ärendet (sann. on 15).

Det var roligt, att Du gillar Hulthéns kandidatur, Zeilon sade mig, då jag träffade honom, att han var av samma mening. Det synes mig klart, att en starkt förtjänt kandidat, som anmäler sig, med tacksamhet bör accepteras. Svartholm har ju visat sig vara en mycket intresseard man. Beträffande Fremberg har ett stort antal diskussioner givit mig ett all starkare intryck av hans ovanliga kapacitet. Och det är ju klart, att han kan prestera en mycket bra avhandling. Det bör väl då finnas möjligheter tlll placering. Nu har man att betänka, som Du säger, att docentstipendier i högsta grad är konjunkturbetonade och att det vore meningslöst att offra en kandidat på grunda av helt ovissa möjligheter.

Zeilon har i dag tagit del av Ditt brev och har samma syn på frågan. Han anser, att man knappast har anledning att vänta tills det andra stipendiet, då den matematiska fysiken nu ej har något stipendium och har behov därav. Vidare synes det mig, att man inte kan räkna det som självklart, att Corlin avgår nästa vår, då i princip en person alltid kan göra något meriterande arbete innan dess. Vilket skulle tala för, att den ene astronomen skulle efterträda den andre.

Nu har jag skrivit till Hulthén, att han bör lämna in sina avhandlingar omedelbart. – Jag skriver även en kopia till Din lundaadress, då man ju aldrig kan veta, hur länge jag är kvar i staden.

Translation:

Dear Brother, Hearty thanks for your letter and for your well wishes. I am glad that you want to take part in the handling of the matter (prob. on 15 Sep).

I was pleased that you aprove Hulthén's candidacy; Zeilon told me, when I met him, that he was of the same opinion. It is clear to me that a strongly merited candidate, who reports himself, ought to be accepted with gratitude. Svartholm has turned to out be a very interested man. Regarding Fremberg a great number of discussions given me a steadily stronger impression of his unsual capacity. And it is quite clear that he will produce a very good thesis. Then it will probably be chances to have him placed [on a job]. Now one has to take into consideration, as you say, that docent stipends are in high degree depependent of the state of the market, and it would be senseless to sacrifice a candidate because of completely uncertain possibilities.

Zeilon has today taken part of your letter; he is of the same opinion in the question. He thinks that one has hardly any reason to wait until the second stipend, as mathematical /s does not have any stipend now and is of not any need of it. Moreover, it seems to me that one cannot take it as evident that Corlin is going to retire next spring, as, in principle, a person can allways can do some qualified work before that. What should point to that one astronomer would succed the other.

I have now written to Hulthén that he must handle in his papers immediately. – I write also a copy to your address in Lund, as one never knows how long I remain in town.

Yours faithfully Torsten Gustafson.

2.43 Eva Gårding

2.43.1 Letter Dec 13, 1949

Käre Marcel,

USA är nog ganska bra och man finner sej lätt till rätta i de nya förhllandena som ju heller inte är s olika de gamla invanda. Vrt umgänge är till största delen europeiskt; min enda erfarenhet av amerikansk mentalitet har jag ftt genom den svärm av bilförsäljare som invaderat vr bostad p sista tiden. I dag har vi köpt en bil och lugnet är terställt. Selbergs träffa vi ofta, men Hédy vägrar at tala ungerska med mej. Jag har försökt / och / att slinka över till ungerskan men utan resultat. Det verkar som om hon hade ngot ressentiment mot Ungern, ungerska och ungerskt. Ett par gnger har

[83]Gårding, Eva, b. Lundius, 1920006, linguist, professor in phonetics in Lund 19806. G. studied phenomena of junction in Swedish. She wrote also scientific papers och handbooks on prosodi in Swedish and other languages, likewise on language pedagogy and the teaching of pronounciation. Married to Lars Gårding from 1949 on. [114].

vi varit i New York och hälsat p Lotz. Han har utvecklats till en fanatisk lokalpatriot och blev riktigt arg när vi vgade kritisera subwayn. Det verkar som om han trivdes utmärkt, han har en trevlig bostad och en katt som han är mycket fäst vid. För tillfället pstr han sej organisera och medverka i en inventering av sibiriska sprk. Vi firade ungersk orgie, var p tredje avenyn och köpte mákos-kalacz och kolbásr och t ungerskt p en alltigenom ungersk restaurang.

/ grundval av föregende erfarenheter har jag uppställt en teori om hur man ska bära sig t för att få brev av Dej. Den ska emellertid inte avslöjas här.

Mnga hälsningar till Dej och god jul

önskar Eva
9A Gowman Rd Princeton N.J. 13.12.49

Translation:

Dear Marcel,

USA is quite agreeable and one easily gets adjusted to the new conditions which after all are not so diffrent from our own ingrained ones. Our relations are to a large extent European; my only experience of American mentalitey is through a swarm of automobile sellers that have invaded our house lately. Today we have bought a car and quiet has been reestablished. We often encounter the Selbergs, but Hédy[84] refuses to talk Hungarian with me. Now and then I have tried to pass on to Hungarian but to no avail. It seems as if she had a kind of resentment against Hungary, Hungarian language and everything Hungarian.

Once or twice have we been to New York and visited Lotz[85]. He has turned into a fanatic local patriot and got very angry when we dared to criticize the subway. I appears that he was happy, he has a nice flat and a cat which he is very attached to.

Right now he claims that he is organizing and taking part in an inventory of Sibirian languages. We celebrated a Hungarian orgy, were on Third Avenue and bougth *mákos-kalacz* and *kolbásr*, and ate at an altogether Hungarian restaurant.

On the basis of past expiriences I have raised a theory how to proceed in order to get letters from you. However, this will not be disclosed here.

[84]Hedvig Selberg, b. Liebermann, later married to Atle Selberg. See the letters to Ernst Jacobsthal

[85]Lotz, János (John), János (John) Lotz (1913-73), Hungarian-American linguist, working at Stockholm University 1936-47, professor in Ural-altaic languages and linguistics at Columbia University 1947-67, then director of the Center for Applied Linguistics in Washington, D.C. His work treats general linguistics, prosody and the Hungarian language. [114].

Many greetings to you and a Merry Christmas

wishes Eva
9A Gowman Rd Princeton N.J. 13.12.49

2.44 Lars Gårding

2.44.1 Letter to Marcel Riesz (Lund), Jun 27 1942

Professor Riesz

Lund

Jag tersänder härmed *The Physical Review* enligt löfte.

Under den regniga midsommaren har jag kommit fram till följande synpunkter p den Cliffordska och den Svartholmska algebran.

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \tag{2.2}$$

resp.

$$\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell + \alpha_\ell\alpha_k\alpha_j = 2\delta_{\ell k}\alpha_j + \delta_{kj}\alpha_\ell \tag{2.3}$$

[de] ha det gemensamt att de är ortogonalt ekvivalenta. Enbart av denna egenskap kan i varje fall Cliffordska algebran härledas.

1. Antag att α_k uppfyller en algebraisk / av 2:a graden. $\alpha_1 \to -\alpha_1$ är en ortogonal / allts ingen inskränkning att sätta $\alpha_1^2 = 1$. Av detta genom den infinitesimala transformen

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_2\\ &\alpha_1 \to \alpha_2 - \alpha_1\\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0.\end{aligned}$$

   eller sammanfattningsvis $\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}$.

[86] Lars Gårding (b. 1919), one of the leading Swedish mathematicians in the second half of the 20-th century, studied under Riesz at LU, fil.dr. 1944, professor at LU 1952-1985, as a follower of Riesz (jointly with Åke Pleijel, continuing the bold traditions of the Lund, or Riesz school of mathematics). Gårding is mostly remembered for his work on partial /s, especially equations of hyperbolic type. He had many students. Furthermore, he has written several books, among them his monumental history of Swedish mathematics [52]. This Section gives ample information about the various steps, in the period 1942-44, in the develupment of the author's famous 1944 doctoral thesis [45]. In 1948 Gårding had a nervous breakdown. Probably, it was Eva who rescued him.

2. För generellt bruk behövs en beteckning:

$$x^j \text{ är obestämda; } [x^j x^k x^\ell \dots] \text{ anger kombinationen,}$$

t.ex. s att $[x^1x^2] = [x^2x^1]$; $[x^1x^2x^1] = [x^1x^1x^2]$ etc. $\phi_{jk\ell\dots}$ är en godtycklig funktion av indices $jk\ell\dots$. — $C\phi_{jk\ell\dots}$ definieras av (summationsföreskrift)

$$x^j x^k x^\ell \phi_{jk\ell\dots}[x^j x^k x^\ell]\phi_{jk\ell\dots}$$

Med denna beteckning kan (2.3) skrivas

$$C\alpha_j\alpha_k = C\delta_{jk}.$$

Behandlar man p liknande sätt som ovan /en

$$\alpha_1^3 = \alpha_1. \tag{2.4}$$

kommer man till

$$C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell = C\delta_{jk}\alpha_\ell \tag{2.5}$$

och man verifirerar att (2.5) är ortogonalt /.

Det system som definieras av (2.5) omfattar det som definieras av (2.3). (2.3) kan uppkommer t.ex. genom att man till (2.5) lägger till /en

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Varför man kan göra s och sambandet med Kleins ansats har jag icke klart för mig. Associativitet och ändlighet av systemet (2.5) är inte klar.

Den formella analogin mellan (2) (Clifford) och (2.5) är inte klar.

Den formella analogin mellan (2) (Clifford) och (2.5) är slående. Huvudresultat är hitills vidare: Uppfyller α_1 en /

$$A_k\alpha_k^k + A_{k-2}\alpha_2^{k-1} + \dots = 0,$$

s lyder de definierande relationerna för motsvarande ortogonalt /a system [om det finns]

$$A_h + C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell\alpha_m + A_{h-2}C\delta_{jk}\alpha_\ell\alpha_m + \dots = 0.$$

För $h = 2$ är Clifford den enda möjligheten. För $h = 3$ är (2.4) en allmän / och (2.5) följaktligen nödvändig:

$$C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell = C\delta_{jk}\alpha_\ell.$$

Beträffande associativiteten av (2.5) vet man att det innehåller 2 associativa delsystem, men därav kan man troligen inte sluta att systemet självt är associativt.

Jag reser i morgon till Östersund och skall antagligen i slutet av juli ka till Falkenberg,

Med de bästa hälsningar

Lars Grding
Östermalmsg. 22, Motala

Translation:

Professor Riesz

Lund

I return hereby *The Physical Review* according to my promise.

During the rainy midsummer, I have arrived at the following point of view of the Clifford and the Svartholm algebra[87]

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \tag{2.2}$$

/ly

$$\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell + \alpha_\ell\alpha_k\alpha_j = 2\delta_{\ell k}\alpha_j + \delta_{kj}\alpha_\ell; \tag{2.3}$$

[they] have in common that they are orthogonally equivalent. At least the Cliffordian algebra may be derived from this poperty alone.

1. Assume that α_k fufills an algebraic equation of the 2:n degree.

   $\alpha_1 \to -\alpha_1$ is an orthogonal /, thus it is no restriction to set $\alpha_1^2 = 1$. From this through the infinitesimal /

   $$\begin{aligned} &\alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_2 \\ &\alpha_1 \to \alpha_2 - \alpha_1 \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

   or in summary $\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}$.

[87] See Section 1.74.

2. For general use one needs a notation:

$$x^j \text{ undetermined}; [x^j x^k x^\ell \dots] \text{ gives the combination},$$

for instance, so that $[x^1x^2] = [x^2x^1]$; $[x^1x^2x^1] = [x^1x^1x^2]$ etc. $\phi_{jk\ell\dots}$ is an arbitrary function of indices $jk\ell\dots$. — $C\phi_{jk\ell\dots}$ is defind by (summation convention)

$$x^j x^k x^\ell \phi_{jk\ell\dots}[x^j x^k x^\ell]\phi_{jk\ell\dots}$$

In this notation, we can write (2.3) as

$$C\alpha_j\alpha_k = C\delta_{jk}.$$

Treating in a similar manner as above, the equation

$$a_1^3 = \alpha_1, \tag{2.4}$$

one arrives at

$$C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell = C\delta_{jk}\alpha_\ell \tag{2.5}$$

and one verifies that (2.5) is orthogonally /.

The system definied by (2.5) comprises the one defined by (2.3). (2.3) may arise, for instance by adding, to (2.5) the equation

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Why one can do so and the connection with Klein's approach is not clear to me. The associativity and the finiteness of system (2.5) is not clear.

The formal analogy between (2) (Clifford) and (2.5) is not clear. The main result so far is: If α_1 satisfies the equation

$$A_k\alpha_k^k + A_{k-2}\alpha_2^{k-1} + \dots = 0,$$

then the definying relations for the / orthogonally / system [if it exists] reads

$$A_h + C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell\alpha_m + A_{h-2}C\delta_{jk}\alpha_\ell\alpha_m + \dots = 0.$$

For $h = 2$ is Clifford the only possibility. For $h = 3$, (2.4) is a general equation and, consequently, (2.5) is neccecary:

$$C\alpha_j\alpha_k\alpha_\ell = C\delta_{jk}\alpha_\ell.$$

Concerning the associativity of (2.5) one knows that it contains 2 associative sub systems, but from this one can probably not conclude that the system itself is associative.

Tomorrow I shall go to Östersund, and I shall probably go to Falkenberg at the end of July.

With my best greetings,

Yours faithfully, Lars Grding.

2.44.2 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) from Falkenberg Aug 18, 1942

Professor M. Riesz.

Tack för brev! Hårt arbete under juli och höggradig lättja under augusti har hindrat mig från att åstadkomma några synpunkter på problemkomplexet Svartholm.

Sedan jag studerat Weyl [171] har emellertid några framkommit.

Om man betraktar grundrelationen

$$[[xy]z] = (y,z)x - (z,x)y \tag{2.2}$$

där man nu och tills vidare låter x, y, z vara ortogonala vektorer och beräknar möjliga egenvärden för t.ex. x har man funnit:

Clifford	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			
"Svartholm"	-1	0	$+1$		
"/ 3"	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$

"/ 3" har jag räknat ut genom att anta en relation av formen

$$x^4 + \kappa(x,x)x^2 + lamda(x,x) = 0$$

och funnit $\kappa = -\frac{5}{2}$, $lamda = \frac{9}{16}$.

Emellertid kan man klara förutsättningen också genom två satser.

Sats 1 *Om ψ är egenvektor till x med egenvärdet H så är $([yx])\psi$ egenvektor med egenvärdet $H-1$.*

Bevis: $x\psi = H\psi$ enl. förutsättningen, varav

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [yx] & = & H[yx]\psi; \\ yx\psi & = & Hy\psi. \end{array} \right\}$$

Lägg ihop och utnyttja (2.2)

$$[[yx]x + yx]\psi = (x[yx] + [yx] + xy + y)\psi = H([yx] + y)\psi$$

eller

$$x[[yx] + y]\psi = (H-1)\psi.$$

P.s.s. har man

$$x[yx] - y]\psi = (H+1)\psi.$$

Sätt

$$\left.\begin{array}{rcl} X_1 & = & [yx]+y \\ X_{-1} & = & [yx]-y \end{array}\right\}$$

I sats 2 har jag lånat metoderna från Cartan via Weyl. Den används hos Weyl i ett analogt fall.

Sats 2 *Varje egenvärde H är av formen $\frac{\kappa}{2}$ där κ är ett helt tal.*

Bevis. Antag att $x\psi = H\psi$ men $H+1$ ej egenvärde. Bilda vektorerna

$$\begin{array}{rcl} \psi_0 & = & \psi; \\ \psi_1 & = & x_1\psi; \\ \psi_j & = & x_1\psi_{j-1}, \end{array}$$

Antag att ψ_κ är den första som inte försvinner. Alltså $\psi_{\kappa+1}$. Man har

$$X_{-1}\psi_j = \alpha_j\psi_{j-1} \tag{2.3}$$

vilket bevisas med induktion. (2.3) är riktig för $j = 0, \alpha_0 = 0$ ty $X_{-1} = 0 = 0 \cdot \psi_{-1}$ ($H+1$ ej egenvärde) och man har

$$x_{-1}\psi_{j+1} = [x_{-1}, x_1]\psi_j + x_1x_{-1}\psi_j = [-2(H-j)+\alpha_j]\psi_j.$$

Man får dessutom

$$\alpha_{j+1} = -2(H-j)+\alpha_j.$$

Alltså då $\alpha_0 = 0$

$$\alpha_{j+1} = (j+1)(j-2H).$$

Men då $x_{-1}\psi_{\kappa+1} = 0$, $\alpha_{\kappa+1} = 0$, $\psi_\kappa \neq 0$ får man $\alpha_{\kappa+1} = 0$ eller $H = \frac{\kappa}{2}$.

Det speciella valet av H ($H+1$ ej egenvärde) betyder ingenting för satsen och den är alltså bevisad.

På fullständigt analogt sätt kan man behandla egenvärdena till $[xy]$ och finner dem vara av typen $\frac{\kappa}{2}j$. Detta framgår av följande lätt bevisbara tabell över egenvärden och egenvektorer till $[xy]$.

Egenvektor	Egenvärde
ψ	H
$(x+iy)\psi$	$H+i$
$(x-iy)\psi$	$H-i$

Väsentligen mera än så kan jag inte säga men utredningen av den oändliga algebran (2.2) har i alla fall tagit ett stort steg framåt och den fullständiga lösningen kan man nog nå. Jag kommer till Lund omkring den 28.

Er tillgivne Lars Gårding

Translation:

Professor M. Riesz.

Thank you for your letter! Hard work during July and a high degree of lazyness during August have prevented me from producing any ideas on the problem complex Svartholm.

After having studied Weyl, [171] however, some new did come up.

If one considers the basic relation

$$[[xy]z] = (y,z)x - (z,x)y \tag{2.2}$$

where, now and for the present, one lets x, y, z be orthogonal vectors and computes the possible eigenvalues for, say x, one has found:

Clifford	$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$
"Svartholm"	$-1 \quad 0 \quad +1$
"/ 3"	$-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{3}{2}$

I have determined "/ 3" by computing a relation of the form

$$x^4 + \kappa(x,x)x^2 + lamda(x,x) = 0$$

and found $\kappa = -\frac{5}{2}$, $lamda = \frac{9}{16}$.

However, one can also avoid the assumption by two theorems.

Theorem 1 *If ψ is an eigenvector to x with eigenvalue H then $([yx])\psi$ eigenvector with eigenvalue $H-1$.*

Proof: $x\psi = H\psi$ by assumption, hence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [yx] & = & H[yx]\psi; \\ yx\psi & = & Hy\psi. \end{array} \right\}$$

Add together and use (2.2)

$$[[yx]x + yx]\psi = (x[yx] + [yx] + xy + y)\psi = H([yx] + y)\psi$$

or

$$x[[yx] + y]\psi = (H-1)\psi.$$

In the same way one has

$$x[yx] - y]\psi = (H+1)\psi.$$

Set

$$\left.\begin{array}{rcl} X_1 & = & [yx] + y \\ X_{-1} & = & [yx] - y \end{array}\right\}$$

In / **??** I have borrowed the methods of Cartan via Weyl. They are used by Weyl in an analogous case.

Theorem 2 *Each eigenvalue H is of the form $\frac{\kappa}{2}$, where κ is an integer.*

Proof. Assume that $x\psi = H\psi$ but $H+1$ is not an eigenvalue. Form the vectors

$$\begin{array}{rcl} \psi_0 & = & \psi; \\ \psi_1 & = & x_1\psi; \\ \psi_j & = & x_1\psi_{j-1}, \end{array}$$

Assume that ψ_κ is the first one that does not vanish. Hence $\psi_{\kappa+1}$. One has

$$X_{-1}\psi_j = \alpha_j\psi_{j-1} \tag{2.3}$$

which is proved by induction. (2.3) is correct for $j = 0, \alpha_0 = 0$ as $X_{-1} = 0 = 0 \cdot \psi_{-1}$ ($H+1$ is not an eigenvalue) and one has

$$x_{-1}\psi_{j+1} = [x_{-1}, x_1]\psi_j + x_1x_{-1}\psi_j = [-2(H-j) + \alpha_j]\psi_j.$$

In addition one gets

$$\alpha_{j+1} = -2(H-j) + \alpha_j.$$

Hence then $\alpha_0 = 0$

$$\alpha_{j+1} = (j+1)(j-2H).$$

But as then $x_{-1}\psi_{\kappa+1} = 0$, $\alpha_{\kappa+1} = 0$, $\psi_\kappa \neq 0$ one obtains $\alpha_{\kappa+1} = 0$ eller $H = \frac{\kappa}{2}$.

The special choice of H ($H+1$ not an eigenvalue) does not mean anything for the theorem and so it is proved.

In an completely analogous way one can treat the eigenvalue of $[xy]$ and one finds that they are of the type $\frac{\kappa}{2}j$. This follows from the following table – easy to estabish – of the eigenvalues and eigenvectors of $[xy]$.

eigenvector	eigenvalue
ψ	H
$(x+iy)\psi$	$H+i$
$(x-iy)\psi$	$H-i$

So far I can not say more but the discussion of the infinite algebra (2.2) has nevertheless taken a big step forward and the complete solution can probably be reached. I will come to Lund around the 28-th.

Yours faithfully, Lars Gårding.

2.44.3 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden), Aug 20, 1942

Professor M. Riesz!

Jag måste få återkomma med några synpunkter på problemet Klein-Svartholm.

Från början: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ är vektorkomponenter representerade genom /er. Det begäres att en ortogonal / skall kunna skrivas som en likformighets/. Antag att $q_{k\ell} = -q_{\ell k}$ är /er representerande en initesimal rotatioin. Man får som bekant

$$[q_{k\ell}\alpha_j] = \alpha_k\delta_{\ell j} - \delta_{jk}\alpha_\ell \tag{2.1}$$

Sedan sättes något lättvindigt $q_{k\ell} = [\alpha_k a_\ell]$;

Om man antar att bassystemet består av (i st. för vektorer) skevsymmetriska tensorer $\alpha_{k\ell} = -\alpha_{\ell k}$ och skriver upp att en ortogonal / av dem skall vara en likformighets/ får man

$$[q_{ij}\alpha_{k\ell}] = \delta_{ik}\alpha_{\ell j} - \delta_{i\ell}\alpha_{kj}\delta_{j\ell}\alpha_{kj} + \delta_{jk}\alpha_{i\ell} \tag{2.2}$$

eller ett slags "bilineära" strukturrelationer för den ortogonala gruppen.

Den riktiga satsen låter nu förmodligen: *Om i (2.2)* $\{q_{ij}\}$ *är en irreducibel representation genom /er så är den enda lösningen till (2.2)*

$$\alpha_{k\ell} = cq_{k\ell}$$

där c är en konstant.

Jag har bevisat detta för $n = 3$ och troligen även för $n = 4$.

Om man accepterar $q_{k\ell} = [\alpha_k\alpha_\ell]$ får man ur (2.1), om man sätter $q \circ \ell = i\alpha_\ell$, de riktiga strukturrelationerna för $q \circ \ell$, $q_{k\ell}$ eller som Klein har påpekat:

Det råder isomorfi mellan systemet (2.1) (med $q_{k\ell} = [\alpha_k\alpha_\ell]$) och den ortogonala infinitesimala gruppen i $(n+1)$ dimensioner $\mathcal{O}(n+1)$.

Då de senares representationer alla är kända (gradtal, karaktäristik Weyl) så följer att man har alla representationer av (2.1) också.

Automorfismerna av (2.1) får man enligt (2.2) ur automorfismerna av $\mathcal{O}(n+1)$ genom att transformera nollan ($q_{01}, \dots, q_{0\ell}$ är då komponenterna av en vektor).

Enligt (2.2) är $\mathcal{O}(n+1)$ nu "egenautomorfismerna". Det gäller alltså att undersöka hur denna reduceras då nollan ej transformeras.

Vi har redan exempel (Svartholm). Om Γ_ℓ^{n+1} är en representation i n dimensioner genom en m-vektor så har man

$$\Gamma_\ell^{n+1} = \Gamma_\ell^n + \Gamma_{\ell-1}^{n-1}.$$

Motsvarande gradrelation:

$$\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}.$$

Den generella formeln måste man få ur Weyls formler.

Utredningen av algebran (2.1) ligger alltså redan implicit i litteraturen, endast specialformlerna fattas.

De bästa hälsningar

Lars Gårding.

Translation:

Professor M. Riesz,

I must come back with some viewpoints on the Klein-Svartholm problem.

From the beginning: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are vector components represented by matrices. It is required that every orthogonal / can be written as a similarity /. Assume that $q_{k\ell} = -q_{\ell k}$ are matrices represented by an infinitesimal rotation. As is well-known one obtains

$$[q_{k\ell}\alpha_j] = \alpha_k\delta_{\ell j} - \delta_{jk}\alpha_\ell \tag{2.1}$$

Then one sets somewhat hastily $q_{k\ell} = [\alpha_k a_\ell]$;

If one assumes that the basis system consists (instead of vectors) of skew symmetric tensors $\alpha_{k\ell} = -\alpha_{\ell k}$ and writes down that each orthogonal / of them has to be a similarity -´/ one gets

$$[q_{ij}\alpha_{k\ell}] = \delta_{ik}\alpha_{\ell j} - \delta_{i\ell}\alpha_{kj}\delta_{j\ell}\alpha_{kj} + \delta_{jk}\alpha_{i\ell} \tag{2.2}$$

or a kind of "bilinear" structure relations for the orthogonal groupe.

The correct theorem presumably now reads: If in (2.2) $\{q_{ij}\}$ is an irreducible representation by matrices then the only solution to (2.2) is

$$\alpha_{k\ell} = cq_{k\ell}$$

where c is a constant.

I have proved this for $n = 3$ and probably also for $n = 4$.

If one accepts $q_{k\ell} = [\alpha_k \alpha_\ell]$ one obtains from (2.1), setting $q \circ \ell = i\alpha_\ell$, the correct structure relations for $q \circ \ell$, $q_{k\ell}$ or as Klein has pointed:

There is an isomorphism beetween the system (2.1) with $q_{k\ell} = [\alpha_k \alpha_\ell])$ and the orthogonal infinitesimal group in $(n + 1)$ dimensions $\mathcal{O}(n + 1)$.

As the representations of the latter all are known (degree, Weyl characteristic), it follows that one has all representations of (2.1) also.

One obtains the automorphisms of (2.1) according to (2.2) from the automorphisms of $\mathcal{O}(n + 1)$ by transforming zero, ($q_{01}, \ldots, q_{0\ell}$ is then components of a vector).

According to (2.2), now $\mathcal{O}(n + 1)$ give the "eigenautomorphisms". Thus we have to investigate how the latter is reduced when zero is not transformed.

We have already one example (Svartholm). If $Gamma_\ell^{n+1}$ is a representation in n dimensions by an m-vector, one has

$$\Gamma_\ell^{n+1} = \Gamma_\ell^n + \Gamma_{\ell-1}^{n-1}.$$

The / degree relation is:

$$\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell - 1}.$$

The general formula must be obtained from Weyl's formulae.

The investigation of the algebra (2.1) is thus already implicit in the literature, only the special formulae are missing.

Sincerely yours

Lars Gårding

2.44.4 Letter (from Cambridge) Nov 27, 1942

B.B. Jag hoppas att detta brev föregtts av en uppsats av Copson som förmodligen intresserar Dig.[88] Jag korresponderar med Copson och har avslöjat hemligheten med $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ för honom. Att han inte kände till den framgr av hans Lemma 3. Hoppas Du inte misstycker. — Frnsett en del mindre missöden s har min första mnad i Cambridge varit angenäm. Jag bor och äter i Wesley House, ett metodistcollege som nu bebos av en massa folk av alla möjliga sorter, därför att alla metodist studenter är inkallade. Det är ett underbart hus med värmeledning (!) och varmdusch. Det enda är att

[88] Förmodligen avses Copson [30].

om man själv eller ngon av ens vänner blir berusad här s blir man fockad. Detta erfor jag i gr hos dr Flew som är principal p huset och den näst högste metodisten i England. (Hälsa Nygren frn honon om Du har lust!) med hopp om avancering. Jag har träffat Hardy som var ytterst vänlig och bjöd mig p middag vid the high table i Trinity College (portvin, sherry och madeira eftert). Han har just blivit pensionerad. (Han har satt sig in i mina /er.) Jag blev tillsagd att hälsa s mycket. Jag har ocks talat med Littlewood och Besicovich och hälsar ocks frn dem. Dirac har varit ytterst älskvärd och inte ytterst men dock intresserad av min avhandling. Jag har skrivit om sista kapitlet för Lorentzgruppen (utan vector och tensor sets!!) och det kommer i Cambridge. /erna för övrigt gr utomodentligt bra. Den analytiska fortsättningen gr som en dans (jämförelsevis) och en liknande historia för /erna i en hermitesk form är under uppsegling. Frembergs /system framträder nu i en mycket förändrad form. – Frga Gustavsson om han har Quantum Electrodynamics av Dirac [36]. Om inte s skickar jag. — Studentlivet är det inte mycket bevänt med ur min synpunkt därför att alla studenter är barnungar p 18-19 r (skratta inte t mig) som man inte har s lätt att komma p jämnställd fot med. Jag är i alla fall lyckligt lottad därför att Wesley House innehller en del ngot äldre, som är lättare att ha att göra med. Man kan se god teater här (Strindberg) och konserter är det ganska ofta. Bach fugor för orgel varje lördag. – Apropå /erna så uppvisar de (troligen) en avancerad huygensk princip: Om undermängden är U, så inverkar endast randvärden av rangen $\leq \frac{n+2}{2}$ om n är jämnt och av rangen $\leq \frac{n+1}{2}$ om n är udda. Nödvändigheten att köpa ett frimärke innan stängningsdags stoppar min framfart nu. Hälsa alla i Lund.[89]

Lars Gårding

Wesley House

Jesus Lane

Cambridge

Translation:

[89]Inte menat fullt så hurtigt som det låter. Förlåt mig.

Dear Brother. I do hope that this letter is preceeded by a paper by Copson, which presumably interests you[90] I am /ing with Copson and have disclosed to him the secrete of $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$. That he did not know this, is seen from his Lemma 3. I do hope that you won't mind. — Besides some minor mishaps, my first month in Cambridge has been agreeable. I stay, and have my meals, at Wesley House, a Methodist College who is now inhabited by a lot of people of all possible sorts, because all Methodist students are drafted. It is a wunderful house equiped with central heating (!) and a warm shower. The only disadvantage is that if you or yourself, or any of your friends, gets intoxicated then you get kicked out. This I learnt yesterday in the home of dr Flew, who is the principal of the house, and the next highest Methodist in England (Give regards to Nygren from him if you wish!) with hope of advancement. I have met Hardy who was utterly kind and treated me supper at the high table at Trinity College (port, sherry and madeira afterwords). He has just retired. (He has familiarized himself with my equations.) I was notified to greet you. I have also spoken to Littlewood and Besicovich; they likewise send their regards.

Dirac was utterly cordial and, if not utterly, but still interested, in my thesis I have rewritten the last chapter for the Lorentz group (without vector and tensor sets!!); it will appear in Cambridge. Besides, the equations are excellent. The analytic continuation goes like clockwork, and a similar story with the /s of an Hermitean form is under way. Fremberg's / system appears now in a considsrably changed form. – Ask Gustafson if he has Dirac's book [36]. If not I'll send. — Student life is note much from my point of view as all students are kids 18-19 years of age (don'te laugh at me) whom it is not so easy to come on foot with. I am however favoured as there are at Wesley House a few somewhat older ones, with whom it is easier to deal. One can see good theatre here (Strindberg), and quite often there are conserts. Bach's fuges on organ every Saturday. – Concerning the equations it turns out that they (probably) display an advanced Huyghens principle: If the subset is U, then only boundary values of rank $\leq \frac{n+2}{2}$, if n is even, infuence, and those of rank $\leq \frac{n+1}{2}$, if n is odd.

The necessity to buy a stamp before closing time stops me now. Please, give my regards to everybody in Lund.[91]

sincerely yours Lars Gårding

2.44.5 Letter to Marcel Riesz (Lund) Aug 8, 1943

Motala 8/8 – 43.

Till professor Riesz, Lund

[90] Presumably Copson [30].

[91] *Author's Note.* This was not meant as cheerful as it sounds. Forgive me.

Jag sänder nu det principiella resultatet av sommarens funderingar. Det löser i ett slag alla mina tidigare funderingar om multiplicitet ("hur många lineärt oberoende system $\{{}^{j}_{k}\}$ finns det?") i allmännast möjlig fall. Dessutom är det nästan genant enkelt. Om det är nytt vet jag inte – troligen är det inte behandalt förut.

Jag utgår från en godtycklig grupp $\mathfrak{G}$ med element $s, b, c, \ldots$ och om den förutsätts att den har ett uppräkneligt antal representationer (irreducibla) och att varje representation sönderfaller i en direkt summa av irreducibla.[92]

Antag att $D_0, D_1, D_2, \ldots$ är ett fullständigt system av irreducibla representationsmoduler. Inom en godtycklig ändlig representationsmodul

$$D = \sum n_k D_k$$

vill vi realisera alla möjliga system av operatorer (lineära /er)

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$$

med egenskapen

$$aua^{-1} = u_a < \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Här är u ett godtyckligt element av $\mathcal{U}$.

Av (2.2) framgår med hjälp av vanliga associativitetsvillkor att /en $u \to u_a$ är en representation av $\mathcal{G}$.[93] Alltså måste $\mathcal{U}$ i denna mening vara ett D. Det är ingen inskränkning att anta att $\mathcal{U}$ irreducibelt,

$$\mathcal{U} \cong D_k.$$

Det generella $\mathcal{U}$ sammansättes av irreducibla. Beteckna elementen av D_k med $x_{D_k}, y_{D_k}, \ldots$

$$D_k = \{x_{D_k}, y_{D_k}, \ldots\}.$$

Antag vidare att u är givet av

$$ux_{D_k} = \sum_j y_{D_j}$$

satisfierar (2.2), då satisfierar

$$u^* x_{D_k} = \sum_j a_j y_{D_j} \quad a_j \text{ konstanter}$$

[92]Detta är uppfyllt om $\mathfrak{G}$ är en ändlig grupp.

[93]Diracs $gamma_j$ motsvara $u_1, \ldots, u_q$, D är spinrymden. $S(0)$ motsvarar den / som a inducerar i D.

samma /.

Bevis: Om

$$aua^{-1}x_{D_k} = u_a x_{D_k} = \sum z_{D_j}$$

så är

$$au^*a^{-1}x_{D_k} = u_a x_{D_k} = \sum a_j z_{D_j}$$

och

$$au^*a^{-1}x_{D_k} = \sum a_j z_{D_j}.$$

Alltså kan vi inskränka oss till system $\mathcal{U}$ för vilka gäller

$$\left.\begin{array}{ll} uD_i & \subset D_\ell \\ uD_j & = 0 \quad j \neq i. \end{array}\right\}$$

och som förut $u_a = aua^{-1} \subset \mathcal{U}$,

Antag att

$$ux_{D_i} = x_{D_\ell} \tag{2.3}$$

Multiplicera med a:

$$aux_{D_i} = aua^{-1}ax_{D_i} = u_a a x_{D_i} = ax_{D_i}.$$

Alltså transformeras produkterna ux_{D_i} dels som $D_k \times D_i$, dels som D_ℓ och (2.2) är / för $\mathfrak{G}$.

Om

$$D_k \times D_i \cong D\ell^1 + \cdots + D_\ell^{n_\ell} + D_{\ell'}^1 \ldots$$

där $D^1\ell \cong D_\ell^2 \cong \ldots \cong D_\ell^{n_{ell}} \cong D_\ell$ etc. och vi har i denna / ersätter D_k med $\mathcal{U}$ och utföra högra ledet så övergår varje D_p^j i $\overline{D}_p^j \subset D_\ell$. Eftersom denna / är / för $\mathfrak{G}$ finns endast möjligheten

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{D}_\ell^j & = c^j D_\ell \\ \overline{D}_{\ell'}^j & = 0 \quad \ell' \neq \ell \end{array}\right\} \quad c^j \text{ konstant.} \tag{2.4}$$

Om vi omvänt definiera operatorerna u genom (2.4) med godtyckliga c^j så uppfylla dessa operatorer (2.4).

Bevis: Det är tydligt att elementen $x_{D_k}ax_{D_i}$ bilda en bas för $D_k \times D_i$.

Med $[x_{D_k} \cdot aax_{D_i}]_{D_h^r}$ betecknar vi den del av elementet $x_{D_k}ax_{D_i}$ som ligger i modulen D_h^r.

Vi antar /erna (2.4) givna i explicit form:

$$[ux_{D_i}] = c_h^r \delta_{h\ell} y_{x_{D_\ell}}.$$

Man får då

$$[aua^{-1} \cdot ax_{D_i}]_{D_h^r} = [aux_{D_i}]_{D_h^r} = a[ux_{D_i}]_{D_h^r} = a \cdot c_h^r \delta_{h\ell} y_{x_{D_\ell}}. \tag{2.5}$$

Men å andra sidan är (2.3) / för $\mathfrak{G}$ alltså

$$[u_a a x_{D_i}]_{D_h^r} = c_h^r \delta_{h\ell} a y_{x_{D_\ell}}. \tag{2.6}$$

(2.5) och (2.6) betyder emellertid

$$aua^{-1} = u_a.$$

Om alla $c_\ell^n = c^n = 0$ då är $u = 0$ och omvänt alltså är antalet lineärt oberoende system $\mathcal{U}$ lika n_ℓ. Jag sammanfattar i satsen:

Sats 2 *Antalet lineärt obroende system* $\mathcal{U}$ *av operatorer* $u_1, \ldots, u_p$,

$$\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_p\}$$

med egenskaperna

1. */en*
$$u \to u : a = aua^{-1} \subset \mathcal{U}.$$
är isomorf med den transform som a *inducerar i* D_k.

2. $\mathcal{U}D_i \subset D_\ell$.

är lika med koefficienten n_ℓ *för* D_ℓ *i utvecklingen*

$$D_k \times D_i \cong\subset D_\ell.$$

Exempel. Antag att $D_k = D_0 = \{x_0\}$ med egenskapen

$$ax_0 = x_0,$$

dvs varje element av gruppen representeras av *1.* Välj D_ℓ godtycklig. Eftersom

$$D_0 \times D_k = D_k$$

måste $k = l$ och det andra systemet $\mathcal{U}$ ges av

$$uX_0 = x_{D_\ell}.$$

Då är

$$aua^{-1}x_0 = ax_{0\ell} \text{ och } u_a x_0 = ax_{0\ell}.$$

Jag gör inga illusioner vad beträffar läsbarheten av ovanstående, trots att beteckningar och sådant är ganska bra. Kommer till Lund på onsdag och är tacksam för diskussion i slutet av veckan.

Er tillgivne Lars Gårding

Translation:

To professor Riesz, Lund

I send you now the principal part of this summer's results. It solves in one stroke all my earlier thoughts on multiplicity ("how many linearly independent systems $\{{}^{j}_{k}\}$ are there?") in the most general case. In addition, its is almost embarassingly simple. If it is new, I do not know – probably it has not been treated before.

I start with an arbitrary group $\mathfrak{G}$ with elements $s, b, c, \ldots$ and it is assumed that it has finetly many representations (irreducible) and that each representation splits into a direct sum of irreducible ones.[94]

Assume that $D_0, D_1, D_2, \ldots$ is a complete system if irreducible representation-modules. In an arbitrary finite representation module

$$D = \sum n_k D_k$$

we would like to realize all posslible systems of operators (linear /s)

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$$

with the property that

$$aua^{-1} = u_a < \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Here, u is an arbitrary element of $\mathcal{U}$.

It follows from (2.2) with the help of the usual conditions of associativity that the / $u \longrightarrow u_a$is a representation of $\mathcal{G}$.[95] Thus $\mathcal{U}$ must in this sense be a D. It is no restriction to assume that $\mathcal{U}$ is irreducible,

$$\mathcal{U} \cong D_k,$$

The general $\mathcal{U}$ is composed of irreducible ones. Denote the elements of D_k by $x_{D_k}, y_{D_k}, \ldots$

$$D_k = \{x_{D_k}, y_{D_k}, \ldots\}.$$

Assume further that u is given by

$$ux_{D_k} = \sum_j y_{D_j},$$

[94]This is fulfilled if $\mathfrak{G}$ is a finite group.

[95]To Dirac's $gamma_j$ / $u_1, \ldots, u_q$, D is the spin space. To $S(0)$ /s the / that a induces in D.

satisfies (2.2), then

$$u^* x_{D_k} = \sum_j a_j y_{D_j} \quad a_j \text{ constants}$$

satisfies the same equation.

Proof: If

$$aua^{-1} x_{D_k} = u_a x_{D_k} = \sum z_{D_j}$$

then

$$au^* a^{-1} x_{D_k} = u_a x_{D_k} = \sum a_j z_{D_j}$$

and

$$au^* a^{-1} x_{D_k} = \sum a_j z_{D_j}.$$

Thus we can restrict ourselves to the system $\mathcal{U}$ for which holds

$$\left.\begin{array}{ll} uD_i & \subset D_\ell \\ uD_j & = 0 \quad j \neq i. \end{array}\right\}$$

and as before $u_a = aua^{-1} \subset \mathcal{U}$,

Assume that

$$ux_{D_i} = x_{D_\ell} \tag{2.3}$$

Multipliy by a:

$$aux_{D_i} = aua^{-1} ax_{D_i} = u_a ax_{D_i} = ax_{D_i}.$$

Thus the products ux_{D_i} transform partly as $D_k \times D_i$, partly as D_ℓ, and (2.2) is / under $\mathfrak{G}$.

If

$$D_k \times D_i \cong D\ell^1 + \cdots + D_\ell^{n_\ell} + D_{\ell'}^1 \ldots$$

where $D^1\ell \cong D_\ell^2 \cong \ldots \cong D_\ell^{n_{ell}} \cong D_\ell$ etc. and if we here, in this equation, replace D_k by $\mathcal{U}$, and carry out the right member then each D_p^j transfers into $\overline{D}_p^j \subset D_\ell$. As the equation is / under $\mathfrak{G}$ there is only the possiblity.

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{D}_\ell^j & = c^j D_\ell \\ \overline{D}_{\ell'}^j & = 0 \quad \ell' \neq \ell \end{array}\right\} \quad c^j \text{ constant.} \tag{2.4}$$

If we define conversely the operators u by (2.4) with arbitrary c^j then these operators satify (2.4).

Proof: It is clear that the elements $x_{D_k} a x_{D_i}$ form a basis of $D_k \times D_i$.

We denote by $[x_{D_k} \cdot aax_{D_i}]_{D_h^r}$ the part of the element $x_{D_k} a x_{D_i}$ that lies in the module D_h^r.

We assume that the equations (2.4) are given in explicit form:

$$[ux_{D_i}] = c_h^r \delta_{h\ell} y_{x_{D_\ell}}.$$

One obtains then

$$[aua^{-1} \cdot ax_{D_i}]_{D_h^r} = [aux_{D_i}]_{D_h^r} = a[ux_{D_i}]_{D_h^r} = a \cdot c_h^r \delta_{h\ell} y_{x_{D_\ell}}. \tag{2.5}$$

But, /, (2.3) is / under $\mathfrak{G}$, so that

$$[u_a a x_{D_i}]_{D_h^r} = c_h^r \delta_{h\ell} a y_{x_{D_\ell}}. \tag{2.6}$$

(2.5) while (2.6) means that

$$aua^{-1} = u_a.$$

If all $c_\ell^n = c^n = 0$ then $u = 0$ and conversely, thus the number is a linearly independent system $\mathcal{U} = n_\ell$. I resume this in the theorem:

Sats 2 *The number of independent systems* $\mathcal{U}$ *of operators* $u_1, \ldots, u_p$,

$$\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_p\}$$

with the properties

1. *The transformen*

$$u \to u : a = aua^{-1} \subset \mathcal{U}.$$

is isomorphic to the / that a induced in D_k.

2. $\mathcal{U}D_i \subset D_\ell$

is equal to the coefficient n_ℓ *of* D_ℓ *in the expansion*

$$D_k \times D_i \cong\subset D_\ell.$$

Example. Assume that $D_k = D_0 = \{x_0\}$ with the property

$$ax_0 = x_0,$$

that each element of the group is represented by 1. Choose D_ℓ arbitraryly. As

$$D_0 \times D_k = D_k$$

we must have $k = l$ and the second system $\mathcal{U}$ is given by

$$uX_0 = x_{D_\ell}.$$

Then

$$aua^{-1}x_0 = ax_{0\ell} \text{ and } u_a x_0 = ax_{0\ell}.$$

I have no illusions concerning the readability of the above, even if the notation, and such, is rather good.

I will come to Lund on Wesnesday and would be grateful for a discussion by the end of the week.

Yours faithfully, Lars Gårding.

The problem in matrix form

[Omitted]

2.44.6 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) Aug. 5, 1944

Broder!

Jag sänder med ett utkast till referat i *Elementa* av avhandlingen. Det är i sitt nuvarande skick väl långt men jag ser inga större möjligheter till avkortning om det väsentliga skall komma med. Om det är någonting som Du vill ha ändrat eller tillagt så är jag tacksam för uppgift om detta. Jag vet inte när septemberhäftet kommer ut men jag förmodar att jag kan vänta till början av september med att sända definitivt manus.

Mina integraler ha nu avancerat ett gott stycke, men jag har bekymmer med den explicita analytiska fortsättningen.

Bästa hälsningar tillgivne

Lars Gårding

Translation:

My Dear Brother!

I send you an outline of a review of my thesis in *Elementa*. In its present shape it is certainly too long, but I see no greater possibilities for a shortening, if the essentials would be included. If there should be something that you want to be changed or added, I would be glad if you tell me this. I do not know when the September issue will appear but I presume that I may delay sending the final manuscript until the beginning of September.

My integrals have now advanced a little bit, but I have problems with the explicit analytic continuation.

Sincerely yours

Lars Gårding

2.44.7 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge Jan 18, 1945

Cambridge 18 jan. 1945

B.B. Sedan jag hela dagen suttit och deriverat är det en ren avkoppling att skriva brev. På sista tiden har jag studerat Hermiteska former och idag fått fram (då den Hermiteska formens ordning är 2) något som måste vara Din lösning av våg/en i 4 dimensioner. Men tolkningen av fallet $n = 3$ har hittills gäckat mig. En utförligt rapport har tydligen föregått detta brev. Jag försökte sända den genom British Council men de vägrade och sände den i stället som vanlig post. Jag hoppas verkligen att den passerar censuren. Detta brev skrives delvis som ersättningen för rapporten om den skulle stoppas. Jag bad Dig i den och ber Dig fortfarande om råd huruvida jag skall söka docentstipendium i Uppsala. Jag har en känsla av att det inte är mycket lönt (Och jag är f.ö. inte absolut säker på att det blir ledigt). Mitt arbete har kommit till en död punkt och inskränker sig till stilla meditationer över Greens formel. Om det skulle bli för mycket stillasittande får jag väl försöka redigera ut det som redan är färdigt. *Cambridge Philosophical Society* tar emot allting med glädje enligt vad sekreteraren anförtrodde mig. – Någon gång i februari kommer vi fyra Cambridgesvenskar att hålla en liten dialog i B.B.C.-s propagandautsändningar[96] till Sverige (för vilket vi får $2\frac{1}{2}$ guines + resa till London). Jag skall meddela när det blir om Du möjligen är road av det. Då jag i alla fall är i London skall jag hälsa på Hadamard som är där. – Beträffande rent mänskliga sidan av min tillvaro då vänjer jag mig mer och mer till min klostertillvaro och min trots allt metodistiska omgivning. Men som en slags kompensation umgås jag utanför klostermurarna mest med svenskar och tyska flyktingar. Då och då längtar jag till Lund.

Din tillgivne Lars Gårding

Translation:

[96] *Förf not.* Inte så farligt som det låter. Dialogen är författad av oss själva och legationen är tillfrågad.

My Dear Brother. After having been sitting the whole day derivating, writing this letter is it a real release. Lately, I have studied Hermitean forms and today I have arrived (when the Hermitean form is of order 2) at something that must be your solution of the wave equation in 4 dimensions. But the interpretation of the case $n = 3$ has hitherto disappointed me. A comprehensive report has apparently preceded this my letter. I tried sending it through the British Council, but they refused and sent it instead by regular post. I really hope that it passes the censorship. So this letter is in part a substitute for the report, if it were to be stopped. I asked you there and ask you again about advice if I should apply the docent stipend in Uppsala. I have the feeling that it is not great use trying. (And, moreover, I am not absolutely sure that it will be vacant). My work has reached a deadlock, and I limit myself to quiet meditations over Green's formula.

2.44.8 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge Easter Day, 1945; postage stamp Apr. 1

Cambridge, påskdagen

Broder! Min tillvaro förbittras för tillfället av manuskriptskrivande, och en viss hjälplöshet inför en mängd av problem om derivabilitet som jag har mött. Jag försöker sätta ihop något om det som jag redan rapporterat. Det var ett fel i ett ställe i rapporten beträffande entydigheten av en viss formel, och många saker kunde ha uttryckts bättre men i stort sett var den riktig och jag har inte kommit väsentligt längre sedan jag skrev den. Har talat med Hans Hamburger om saken och han rådde mig att sända mitt manus till S. Bochner för att få det publicerat i *Annals*. Men det är inte färdigt än, så att ingenting behöver beslutas nu. Jag saknar Din hjälpande hand, och särskilt nu skulle en diskussion vara välbehövlig. Har Fremberg skrivit något än? Jag tror inte att vi kolliderar som saken nu står. – För en vecka sedan vara jag i Swansea och hälsade på en vän som är assistent åt Dudley E. Littlewood vid the University College där, en avdelning av University of Wales. Littlewood hade läst min avhandling och även refererat den i *Nature*. Vi samtalade en hel del, och kom så småningom till samförstånd, men jag tror inte att han fattat mycket mer än början, men jag är inte säker då det är möjligt att han frågade dummare än nödvändigt för att pumpa mig. Hans intresse var nästan helt absorberad av regler för gruppkaraktärernas multiplikation, till vilket han ville reducera allting. Frånsett en lätt hemlängtan har jag fortsatt att trivas här, och sedan kylan släppt är livet riktigt behagligt. Då och då träffar jag Hardy, som skrivit till British Council och säger att jag uppför mig hyggligt varje gång de skriver och frågar. Några andra intressanta detaljer

från livet i Cambridge kan jag för tillfället inte erinra mig, så att jag slutar här.

Hjärtliga hälsningar Lars Gårding

Translation:

Easter Day

Dear Brother, My existence is embittered for the time being by the writing of a manuscript, and a certain helplesness in the presence of a great number of problems on derivability that I have encountered. I try to put together something about what I have already reported on. There was an error on a place in the report concerning the uniqueness of a certain formula, and many things could have been expressed better, but in great outline it was correct and I have not come essentially further than when I wrote about it. I have talked to Hans Hamburger about it and he adviced me to send my manuscript to S. Bochner to have it published in the Annals. But it is not ready yet, so nothing needs to be decided now. I miss your helping hand, and especially right now a discussion would have been useful. Has Fremberg written anything yet? I do not think that we will collide as things are now. – A week ago I was in Swansea visiting a friend of mine who is assistant to Dudley E. Littlewood at the University College there, a division of the University of Wales. Littlewood has read my thesis and even refereed it in the *Nature*. We spoke quite a lot, and finally arrived at a consensus, but I believe that he had not understood much more than the beginnig, but I am not sure, because it may be that he asked sillier questions than needed just in order to pump me out. His interests were almost entirely absorbed by rules for the multiplication of group characters to which he wanted to reduce everything. Besides some light homesickness I still like it here, and after the cold is gone life is quite agreeable. Now and then, I run across Hardy, who has written to the British Council and says that I am wellbehaved, each time they write and ask. I do not recall any other interesting details about life in Cambridge for the time being, so I stop here,

Yours fathfully, Lars Gårding

2.44.9 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Cambridge April 26, 1945

Cambridge 26 april 1945

B.B. Jag har idag fått ett brev hemmifrån att Lundmark skrivit till pappa att jag blivit erbjuden ett Rockefeller stipendium. Jag inser det hela vara väldigt osäkert just nu, eller rent av var avskrivet, men jag hoppas Du förstår att jag är nyfiken och gärna vill veta mera om saken och är tacksam för ett meddelande om Du har hört något. – För att nu börja med arbetet, så håller jag på att skriva ett manuskript nu i långsam takt samtidigt som jag kämpar här för att nedbringa derivabilitetsvillkoren, så att de ser något så när hyggliga ut. Det är et svårt och otacksamt arbete, och jag skall bli glad när det har lyckats. I måndags höll jag föredrag om saken för en samling matematiker, ditsläpade med milt våld av mig själv och ett par andra en tunisier som tänker starta ett seminarium. Trots att föredraget var bra i stort sett och en livlig diskussion förekom, har jag en känsla av att hela initiativet var litet opassande. England är inget land av entusiaster. Min avhandling har recenserats i *Nature* av den 31 mars, inte helt avvisande men litet von oben. Totalintrycket, som recensionen ger är nog gansks rättvist, fast jag misstänker att Littlewood, då han skrev den inte fattat mycket av det som var nytt i boken. Men det är ju också ganska omsorgsfullt dolt av mig, inser jag nu. Har jag talat om att Hamburger (Hans) rått mig att publicera i Annals? Jag lovar att det inte kommer att ske utan Ditt tillstånd. Jag har f.ö. en känsla av att manuskriptet blir nätt och jämt färdigt i sommar.

Din tillgivne

Lars Gårding

Translation:

Dear Brother. Today I got a letter from home telling that Lundmark[97] has written to pappa that I have been offered a Rockefeller stipend. I see all this rather uncertain right

[97]Lundmark, Knut (1889–1958), astronomer, professor in Lund 19295. L. did pioneering work regarding the nature and distance of galaxes. He was one of the leading advocates of the new physical picture of the world which unfolded itself during the 1920-s, when our system of stars, the Milky Way, appeared as a galaxy among uncountably many others. Untill then, the uncertainty about the larger cosmic distances had prevented a decision of the whether there was a single system of stars or many separated. Already in 1919, L. detemined the distance of the Andromeda galaxy to 650 000 light years, which is slightly more than a third of the modern value; he measured the brightness of the novae flaming in the Andromeda galaxy comparing with the brightness of nearby novae. The method was in principle the same as the one Edwin Hubble later (1924) applied to cepheides another class of variable stars and gave a comparable result. The large-scale structure of the Universe remained L:s formost / of reseach, but his interests were broad. He viewed Natural Sciences as one of many tools for reaching a unified view of the world. Through

now, or even cancelled. But I do hope that you understand that I am curious and would like to know more about it and would be glad to get a message if you happen to have heard anything. – As for workn I am now writing a manuscript in slow speed, simultaneously as I am struggling here to reduce the derivability conditions so that they look somewhat more manageable. This is a hard and unrewording job, and I will be happy when I am through with it. On Monday I gave a talk about this for a group of mathematicians, dragged there by mild force by myself and some others, a Tunisian who wants to start a seminar. Despite the fact that the lecture was good to a large extent and a lively discussion took place, I have the feeling that the whole initiative was somewhat improper. England is not a country of enthusiasts. My thesis has been reviewed in the *Nature* of 31 March, not quite turned down but a little bit von oben. The total impression given by the review is rather just, but I suspect that Littlewood when writing it had not understood much of what was new there. But is also concealed rather carefully by me, as I realize it now. Did I mention to you that Hamburger (Hans) has adviced me to publish it in the Annals? I promise that this will not happen without your permission. Besides I have the feeling that the manuscript will barely be ready this Summer.

Yours faithfully, Lars Gårding

2.44.10 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden), from Jan 3, 1946

Broder, jag har löst följande enkla men dock tidsartade problem i fyra dimensioner.

1. Sök $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ s att $\Delta u = 0$ och

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, 0) &= h_1(x_1, x_2, x_3); \\ u(x_1, x_2, x_3, x_1) &= h_2(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

   där $h_1(0, x_2, x_3) = h_2(0, x_2, x_3)$.

---

his rich production of books, articles and lectures L. came to stand out as one of the great educators of his generation. With the expression "All stars are suns" he tried to mediate the experience of deep of space simultaneously with a feeling of homeliness in the Cosmos. "Från kaos till kosmos" (From Chaos to Cosmos, 1934) tells the History of Astronomy and "Nya himlar, från stjärnkunskapens gryning till Vintergatornas Vintergata" (New Heavans, from the Dawn of Our Knowledge of Stars to the Milky Way of the Milky Ways, 1943) encompasses history as well as contemporary resultats of research. In "The Empire of Life, to the Question of Inhability of the Worlds" (Livets välde, till frågan om världarnas beboelighet, 1935) L. treats an often recurring theme: the connection between living and dead matter and the origin of life and its possible diffusion in the the Universe.

2. Sök $u(x)$ s att $\Delta u(x) = 0$ och $u(x)$ antar givna värden p bägge tidsartade planen

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = k_1 x_1 \\ x_4 = k_2 x_1 \end{array}\right\}, (x_1 \geq 0, |k_1|, |k_2| < 1).$$

Lösningen till 1. kan skrivas som $u(x) = v(x) + w(x)$ där

$$\begin{array}{l} v(x_1, x_2, x_3, 0) = h_1(x_1, x_2, x_3), \\ v(x_1, x_2, x_3, x_1) = h_1(0, x_2, x_3) \end{array}$$

och

$$\begin{array}{l} w(x_1, x_2, x_3, 0) = 0), \\ w(x_1, x_2, x_3, x_1) = h_2(0, x_2, x_3) - h_1(0, x_2, x_3). \end{array}$$

Motsvarande problem i / dimensioner har lösningen

$$u(x_1, x_2) = h(x_1 - x_2) + h_2(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)) - h_2(\frac{1}{2}(x_1 - x_2)).$$

Problem *1* kan lösas genom en generalisering av Goursats förfarande i / dimensioner.

Strax före jul läste jag en artikel av Bhabha [15]. Han utgr frn Klein-Svartholmska föreställningar och börjar arbeta ungefär som jag, men han räknar för mycket. Jag har sänt honom ett brev och min avhandling. Gott nytt år!

Lars Grding.

Translation:

Dear Brother, I have solved the following simple but still time-like problem in four dimensions.

1. Seek $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ such that $\Delta u = 0$ and

$$\begin{array}{l} u(x_1, x_2, x_3, 0) = h_1(x_1, x_2, x_3); \\ u(x_1, x_2, x_3, x_1) = h_2(x_1, x_2, x_3), \end{array}$$

where $h_1(0, x_2, x_3) = h_2(0, x_2, x_3)$.

2. Seek $u(x)$ such that $\Delta u(x) = 0$ and $u(x)$ takes given values on the two time-like planes.

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = k_1 x_1 \\ x_4 = k_2 x_1 \end{array}\right\}, (x_1 \geq 0, |k_1|, |k_2| < 1).$$

The solution of 1. may be written as $u(x) = v(x) + w(x)$ where

$$v(x_1, x_2, x_3, 0) = h_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$v(x_1, x_2, x_3, x_1) = h_1(0, x_2, x_3)$$

and

$$w(x_1, x_2, x_3, 0) = 0),$$
$$w(x_1, x_2, x_3, x_1) = h_2(0, x_2, x_3) - h_1(0, x_2, x_3).$$

The problem in two dimensions has the solution

$$u(x_1, x_2) = h(x_1 - x_2) + h_2(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)) - h_2(\frac{1}{2}(x_1 - x_2)).$$

problem 1. may be solved by a generalizing Goursat's procedure in two dimensions.

Right before Christmas I read a paper by Bhabha [15]. He starts from the ideas of Klein-Svartholm and begins to work about as me, but he does too much calculation. I sent a letter to him and my theses.

Merry Chrstmas!
Lars Grding

2.44.11 Letter to Marcel Riesz (Saltsjöbaden) Aug 3, 1946

Motala 3.8. 46
Östermalmsg 22

B.B.

Tack för brevet. Det efterlysta beviset bifogas separat. Jag har nu kommit tillbaka från en regnig kanotfärd. Brevet från Montreal var en stor överraskning, men svaret kunde bara bli avböjande.

Beträffande de unitära representationerna så var det inte min mening att överdriva betydelsen. Det viktigaste i saken, nämligen att

$$\frac{dx_2 \dots dx_n}{x_1}$$

är / på hyperboloiden har Du lärt mig, men nu kommer andra problem, irreducibilitet och sammansättning i v. eumanns arbeten.

Det skall bli roligt att höra om /-integralen. Jag är i Lund senast måndagen den 20 augusti och anmäler mig så fort jag kan. Det gläder mig att Du äntligen tycks vara belåten med den analytiska fortsättningen.

Så får jag hjärtligt gratulera Dig till inbjudan till Princeton. Det ser ut att bli en händelserik hösttermin.

Cométs differential/er var en stor överraskning. Jag hoppas också att de är analytiskt vettiga (vilka inte tycks vara fallet om all x_{ik} är oberoende reella variabler, jmfr /en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{11}\partial x_{22}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{12}\partial x_{21}} = 0$$

som är ultrahyperbolisk).

Som framgår av det bifogade beviset är jag tvungen att läsa Herglotz noggrant. Böckerna är på väg hit från Lund.

Din tillgivne
Lars Gårding

Tillägg

Beteckningar

$$x = \begin{cases} (x_{ik}) & \text{symmetrisk reell matris} \\ (x_{ik}) & \text{hermitesk reell matris} \\ (x_1, \dots, x_n) & \text{reella tal} \end{cases}$$

$(i, k = 1, \dots n)$.

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \det(u\delta_{ik} - x_{ik}) \\ \prod_1^n (u - x_k) \end{array} \right\} = \sum_0^n (-1)^k u^{n-k} \binom{n}{k} \mathfrak{p}_k(x).$$

Lt $x \in C_i^n$ då och endast då $\mathfrak{p}_k(x) > 0$, $k \leq i$. Det är klart att

$$C_0^n \subset C_1^n \subset \dots C_n^n.$$

Bevis: För C_0^n = alla x är satsen riktig. Om alla C_{ki}^n $(k < i)$ antages konvexa så är det tillräckligt att visa att $\mathfrak{p}_i(x + y) > 0$ om $x, y \in C_i^n$. Derivera $F(u, x)$ $(n - i)$ ggr efter u,

$$F^{(n-i)}(u, x) = n(n-1)\dots(i+1) \sum_0^i u^{i-k} \binom{i}{k} \mathfrak{p}_k(x)$$

/en $F^{(n-i)}(u, x+ty) = 0$ har för varje reellt t i reella rötter $[\xi_1(t), \ldots, \xi_i(t),]kontinuerligafu$
$tioneravt.Enl.förutsättningen(\text{x}\in C_i^n)$ är alla positiva för $t = 0$ ($\mathfrak{p}_k(x) > 0$ då $k \geq i$). Likaså ($y \in C_i^n$) är de alla negativa då t är tillräckligt stort negativt. Alltså har /en i t $\mathfrak{p}_i(x + ty) = \xi_1(t) \cdots \xi_i(t) = 0$ i reella negativa rötter. Fler finns inte. Alltså är $\mathfrak{p}_i(x + ty) > 0$ då $t \geq 0$.

Anmärkning 1 *Genom ett liknande resonemang visar man att /en* $\mathfrak{p}_i(x + ty) = 0$ *har i reella rötter då* $x \in C_i^n$ *och* y *är godtyckligt. Ytan* $\mathfrak{p}_i(x) = 0$ *består alltså av i stycken ("enkelriktade") komantlar med spetsen i origo. /en*

$$\mathfrak{p}_i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})u = 0$$

är alltså (approx.) totalhyperbolisk i Herglotz terminologi (möjligen har han villkoret att mantlarna skall vara skilda, vilket de inte är i allmänhet).

Translation:

Dear Brother,

Thanks for your letter. The missing proof is added separately. I have just returned from a rainy canoe hike. The letter from Montreal was a great surprise, but the reply could only be negative.

Regarding the unitary representations, it was not my intention to exeaggerate their importance. The most important thing is of course that

$$\frac{dx_2 \ldots dx_n}{x_1}$$

is / on the hyperboloid, which I have learnt from you, but now there come other problems, irreducibility and composition in v. eumann's work.

It will be nice to hear about the / integral. I'll be in Lund on Monday 20 August the latest and I'll report to you as fast as I can.

It makes me happy that you finally seem to be pleased with the analytic continuation.

I congratulate you heartily to the invitation to Princeton. It seems to be an eventful automn semester.

Comet's differential equations was a great surprise. I do hope also that they are analytically meaningful (which does not to be the case if all x_{ik} are independent real variables, compare the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{11} \partial x_{22}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{12} \partial x_{21}} = 0$$

that is ultrahyperbolic).

As follows from the added proof, I will be forced to read Herglotz carefully. The books are on their way here from Lund.

Sincerely yours, Lars Gårding.

Addendum

Notation:

$$x = \begin{cases} (x_{ik}) & \text{symmetric real matrix} \\ (x_{ik}) & \text{Hermitean real matrix} \\ (x_1, \dots, x_n) & \text{real numbers} \end{cases}$$

$(i, k = 1, \dots n))$.

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \det(u\delta_{ik} - x_{ik}) \\ \prod_1^n (u - x_k) \end{array} \right\} = \sum_0^n (-1)^k u^{n-k} \binom{n}{k} \mathfrak{p}_k(x).$$

Let $x \in C_i^n \iff /\mathrm{p}_k(x) > 0$, $k \leq i$. It is clear that

$$C_0^n \subset C_1^n \subset \dots C_n^n.$$

Proof: For C_0^n = all x, the theorem is correct. If all C_{ki}^n $(k < i)$ are assumed convex then it is sufficent to show that $\mathfrak{p}_i(x + y) > 0$ if $x, y \in C_i^n$. Derive $F(u, x)$ $(n - i)$ times / u,

$$F^{(n-i)}(u, x) = n(n-1)\dots(i+1) \sum_0^i u^{i-k} \binom{i}{k} \mathfrak{p}_k(x)$$

The equation $F^{(n-i)}(u, x + ty) = 0$ has, for each real t, i real roots $\xi_1(t), \dots, \xi_i(t)$, continous functions of t. By the assumption ($x \in C_i^n$) are all positive for $t = 0$ ($\mathfrak{p}_k(x) > 0$ då $k \geq i$). Likewise ($y \in C_i^n$) are all negative when t is sufficiently large negative. Thus the equation in t, $\mathfrak{p}_i(x + ty) = \xi_1(t) \cdots \xi_i(t) = 0$, has i real negative roots. There are no more. Thus $\mathfrak{p}_i(x + ty) > 0$ if $t \geq 0$.

Remark 2 *By a similar reasoning one shows that the equation* $\mathfrak{p}_i(x+ty) = 0$ *has* i *real roots when* $x \in C_i^n$ *and* y *are arbitrary. The surface* $\mathfrak{p}_i(x) = 0$ *consists thus of* i *pieces ("simply directed") co-naps with vertex at the origin. The equation*

$$\mathfrak{p}_i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})u = 0$$

is thus (approximately) totally hyperbolic in the terminology of Herglotz (possibly he has the condition that the naps should be distinct, which they are not in general).

2.44.12 Letter to Marcel Riesz (Lund) Princeton, Nov 10, 1946

Fastän detta brev troligen kommer fram före den 16 är det menat som ett födelsedagsbrev. Jag är ledsen att inte kunna delta mera aktivt i hyllningarna.

Det var långtråkigt på båten, jag såg skyskraporna och åkte direkt hit. Bochner var mycket älskvärd och skaffade mej snabbt ett rum i stan och ett halvt rum på Fine Hall där Mathematics Department är inhyst. Att få ett arbetsrum är en stor ära och en stor fördel. Jag håller till här då jag inte äter eller sover eller är i biblioteket på övre våningen. Min arbetskamrat är en storväxt fetlagd man som heter Raphael (i förnamn) och är professor i Berkeley i Kalifornien i vardagslag. I år är han visiting professor i Princeton och föreläser analytiska funktioner som enligt vad en del påstår går över topologernas horisont. Här bedrivs mest topologi och därnäst algebra. Analysen sitter trångt, Bochner har ledigt i år och organiserad verksamhet i ämnet saknas.

Artin föreläser algebra och Lefschetz algebraisk geometri. Wedderburn och Eisenhart är pensionerade och jag har aldrig sett dem. Cramér arbetar i ett rum här i närheten. En ungrare, Paul Erdös var här för ett par veckor sedan men har nu försvunnit till Yale.

Fine Hall ligger mitt i stan på the Campus tillsammans med en massa hus i 1900-tals gotik där studenterna bor. The Institute of Advanced Study ligger ett stycke utanför stan och där ute är de ordinarie v. Neumann, Weyl, Morse etc. folk från hela Amerika som har stipendier eller är lediga från sitt ordinarie arbete. På dagarna är de flesta av dem i Fine Hall. Varje dag kl. 4 är det te och då råkas alla i huset.

För en vecka sedan hade American Mathematical Society möte här. Jag talade med Weyl, Veblen och Hille, som alla hälsade och träffade också Courant. Han var mycket entusiastisk för Åke Pleijel och det är han som ligger bakom Weyls brev. Jag frågade Weyl hur pass bestämt det är med Åkes inbjudan, men han ville inte säga något. Det föreföll som om alla tillfrågade inte kunde få stipendium och ingenting var bestämt för nästa år. Courant kommer emellertid att göra allt.

Så snart jag kom frågade Lefschetz om jag hade något att säga, talade jag om vad jag höll på med och han tvingade mej att hålla ett foredrag om "Fractional integration in many variables". Auditoriet avtog monotont. Jag refererade dej och pratade något om I^α för totalhyperboliska /er. Folk var

nyfikna och intresserade, och fysikerna i huset har väl reda på dej, Fremberg och Gustafson. Frembergs avhandling har just kommit hit och ligger på avdelningen för aktuell litteratur. Jag var ovillig att föreläsa innan du gör det, men Lefschetz tvingade mej och avsåg det hela som en förberedelse till ditt uppträdande. Jag ville inte bråka med honom och har säkert inte förstört marknaden. Det tycks komma en sändning europeiska matematiker i månaden på besök. För en tid sedan var några här, bland dem Gaston Julia, E. Hopf kom för en vecka sedan och du väntas om en månad.

Mitt eget arbete går långsamt framåt. Jag börjar inse vilken urskog funktioner av flera komplexa variabler är och visheten i dina ord "med rund specialisering" blir alltmer uppenbar för var dag som går. Men jag har ännu inte gett upp hoppet att få några allmänna satser om totalhyperboliska differential/er och Huygens princip. Lorentzgruppens unitära representationer i Hilbertrymden som jag tänkte ge mej på finns redan katalogiserade i ett manuskript av V. Bargmann, f.d. assitent till Einstein.

Detta skrivs i bakrus, mitt första sedan jag lämnade svensk botten. Bochner hade en bjudning i går, ett drinking party, och whiskyn har inte släppt sitt grepp än.

Din tillgivne Lars Gårding

Translation:

Although this letter probably arrives before the 16-th, it is meant as birthday letter. I am sorry that I am not able to paricipate more actively in the homages.

It was boring on the ship, I saw the skyscrapers and went directly here. Bandner was very amiable and quickly arranged a room for me in town and half of an office at Fine Hall, where the Mathematics Department is located. To have an office is a great honor and a considerable advantage. I hang out here when I am not eating or sleeping, or sit in the library on the top floor. My office mate is a stout man called Raphael (first name), he is a professor in Berkeley California usually. This year he is visiting professor in Princeton and teaches analytic functions, which according to what some claim is beyond the topologists' horizon. Here mostly topology is cultivated and then algebra. Analysis is in a tight corner, Bochner has a year off and there is no organized activities in this subject.

Artin is lecturing on algebra and Lefschetz on algebraic Geometry. Wedderburn and Eisenhart are retired and I have not seen them. Cramér works in an office not far from here. A Hungarian, Paul Erdös was here a couple of weeks ago but has now gone to Yale.

Fine Hall is in the middle of the town on the Campus together with a lot of houses in 18-th century gothics, where the students live. The Institute of Advanced Study is at some distance outside town and out there are the ordinarys v. Neumann, Weyl, Morse etc. people from all over America who have fellowships or are on leave from their regular jobs. In day time most of them are at Fine Hall. Each day at 4 there is thea and all in the house get together.

A weeks ago the American Mathematical Society had a meeting here. I spoke to Weyl, Veblen and Hille, who all send greetings to you and I also met Courant. He was very enthusiastic about Åke Pleijel and it is he who is behind Weyl's letter. I asked Weyl how things were with Åke's invitation, men he did not want to say anything. It appeared as if not all who had been asked could get a fellowship, and that nothing was determined for next year. However, Courant will do all he can.

As soon as I had come, Lefschetz asked me if I had anything to say, I told him what I was doing and he forced me to give a talk on "Fractional integration in many variables". The audience dropped off monotonously. I referred to you and said something aout I^α for totaly hyperbolic equations. People were curious and showed interest, and for the physicists of the house you are well-known, as well as Fremberg and Gustafson. Fremberg's thesis has just arrived here and lies in the compartment of current literature. I was unwilling to lecture before you do it, but Lefschetz forced me and view this a preparation to your performance. I did not want to argue with him and I have certainly not spoiled the market. It appears that there arrives a shipment of European mathematicians each month for a visit. Some time ago a few were here, among them Gaston Julia; E. Hopf arrived a week ago and you are expected in a month.

My own work is proceeding slowly. I begin to realize what a jungle functions of several complex variables is, and the wisdom of your words "with round specialization" becomes more and more manifest for each day. But I have not yet given up all hope to obtain some general theorems for totally hyperbolic differential equations and Huygens principle. The unitary representations in Hilbert space of the ntz group, which I thougt to attack, are already catalogued in a manuscript by V. Bargmann, former assitant of Einstein. [8].

The above was written in a hangover, my first after leaving Swendish territory. Bandner had a reception yesterday, a drinking party, and the whisky has not yet left its grasp.

Yours faithfully Lars Gårding

2.44.13 Undated letter (Lund), presumably from the same period (c. 1946)

B.B.

Jag har talat med Ragnarsson och han räknade ut att jag måste hålla 7 föreläsningar i sept. innan jag reser den 5 okt. Vad skall de handla om?

Själv har jag tänkt en fortsättning av gruppteori och kvantmekanik. Mina klienter finns ju kvar.

För en vecka sedan bevisade jag äntligen att C_k (som består av alla $s_h(x) = \sum x_1 \dots x_h > 0$) $(h \leq k < n)$ är konvex. Detsamma gäller C'_k och C''_k definierade så att $X \in C'_k$ resp.. $X \in C''_k$ om X är en symmetrisk resp. hermitesk matris av ordning n med rötter $x_1, \dots, x_n$ och $X \in C_k$. Beviset är fläckfritt men genant enkelt.

För tillfället är jag i Lund och håller bl.a. på att lära mig /er i Hilbertrymden. Jag har följande idé om unitära representationer av Lorentzgruppen (Dirac har en del andra sorter). Låt $f \in H$ om

$$N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots, x_n / x_1 < \infty,$$

där $x_1 = (a^2 + x_2^2 + \dots) + x_n^2$. Om $x_k \to x'_k = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} x_j$ $(k > 1)$, är en Lorentz/ och $frightarrow f(x'_k)$ motsvarande / av H så inser man att $N(f) = N(f')$.

Nu väntar jag alltså en sanktion av mitt förslag om föreläsningar (katalogkorrektur skall vara inne om en vecka). Tystnad tydes som sådan. Mitt telefonnummer är 15942.

Tillgivne Lars Gårding

Lokföraregatan 13 b.

Translation:

Dear Brother, I have spoken to Ragnarsson and he computed that I have to give 7 lectures in September before my departure on 5 October. What will they be about? I myself think of a continuation of Group Theory and Quantum Mechancs. My clients are still there.

A week ago I finally proved that C_k (which consists of all $s_h(x) = \sum x_1 \dots x_h > 0$) $(h \leq k < n)$ is convex. The same is true for C'_k and C''_k defined such that $X \in C'_k$ / $X \in C''_k$ if X is a symmetric /ly an Hermitean matrix of order n with roots $x_1, \dots, x_n$ and $X \in C_k$. The proof is spotless but embarrasingly simple.

For the time being I am in Lund and, among other things, I am learning /s in Hilbert space. I have the following idea about unitary representations of the Lorentz group (Dirac has various other sorts [of groups]). Let $f \in H$ if

$$N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots, x_n / x_1 < \infty,$$

where $x_1 = (a^2 + x_2^2 + \dots) + x_n^2$. If $x_k \to x'_k = \sum_{k=1}^n c_{kj} x_j$ $(k > 1)$, is a Lorenz / and $f \to f(x'_k)$ the / / of H, one realizes that $N(f) = N(f')$.

I am thus now waiting for a sanction of my proposition about lectures (the proofs for the catalogue must be delivered within week). Silence will be interpreted as such. My telephone number is 15942.

Yours faithfully, Lars Gårding

2.44.14 Letter to Chicago from Princeton Feb 2, 1947

Jag har länge tänkt skriva en rapport. Här är den.

Efter Swarthmore[98] åkte jag till Texas och hälsade på släkten som var gästfri och glad att jag kom.

Princeton efter nyår har varit mycket lugnare än Princeton före nyår. Inga kongresser, bara den lugna vardagen. Jag har börjat ångra att jag inte gick och hörde på Artins föreläsningar i algebra. Han fortsätter den här terminen i form av seminarier, men föreläser annars reella funktioner. Hopf och Tucker föreläser valda delar av geometrin och det är ett nöje att höra honom. Weyl har börjat en kurs i integral/er. Inledningen idag var vad man väntade sej. Han koketterar som en historieberättare som inte är fullt säker på att publiken är med på noterna. Morse ger "Introduction to analysis in the large", men har inte börjat än. von Neumann börjar om några veckor.

Jag har skrivit ett brev till matematiska institutionen i Lund och gett en fullständig lista på böcker från Princeton. Men inte fått något svar. En isländare som kom hit från Lund före jul talade om för mej att Hyltén-Cavallius kurs inte var någon succé rent publikmässigt.

Det dagliga umgänget med biblioteket på tredje våningen har gett mig en bild av Carleman och Holmgren vilka jag hade en mycket dimmig föreställning om tidigare.

Jag upptäckte även tillfällighet att en stockholmare, Sven Hilding, hade förskrivit sej i *Arkiv* etc. och talade om det för honom. Han erkände villigt och talade om att han kommer hit i juni.

Jag har arbetat med diverse ting och trodde till i förgår att jag hade bevisat en del. Beviset har visat sig vara ofullsständigt, men det är gott hopp om att det kan kompletteras. Även om det kan, är jag rädd att Du inte vill sätta ditt namn under det färdiga manuskriptet. Jag hoppas kunna

[98] Säkert Swarthmore College, Pennsylvania.

bevisa följande: $p(\zeta) = p(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ är ett godtyckligt polynom,

$$p(\zeta) = \sum_0^m \zeta_1^k p(\zeta_2, \dots).$$

Differential/en

$$p(\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0$$

har lösningen $u(x)$ så att

1. max abs $u(0, x_2 \dots)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big|_{x_1=0} <$
2. max abs $u(x)$ hur stort som helst då $0 < x_1 < a > 0$.

   om inte
3. p_m är en konstant $\neq 0$

   och
4. $$p(\xi_1 + i\eta_1, i\eta_2, \dots) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{godtyckliga reella}}\ \eta_1, \eta_2 \\ \xi_1\ \underline{\text{tillräckligt stort positivt}}. \end{array} \right.$$

Om dessa villkor uppfyllda kan Cauchys problem för planet $x_1 = 0$ lösas och lösningen är kontinuerlig i de givna data.

Nödvändigt och tillräckligt för att varje lösning skall vara analytisk är att

$$p(\xi_1 + i\eta_1, i\eta_2, \dots) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{godtyckligt } \xi_1 \\ \text{tillräckligt stort } \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots. \end{array} \right.$$

Det sista är den riktiga generaliseringen av det paraboliska fallet, exemplifierat av värmeledningsen $p(\zeta) = \zeta_1 - \zeta_2^2$.

Det är ledsamt att jag nu kommit in på sådana frågor, men min nyfikenhet driver mig dit. Olyckligtvis är jag inte först på plan. Petrovsky har arbetat på en liknande linje 1937. Till varje / som satisfierar 1. och 2. kan man åstadkomma en Riesz integral och bevisa att $I^0 = 1$ etc. Det totalhyperboliska fallet har drunknat i denna generalisering, men förtjänar naturligtvis en speciell uppmärksamhet.

Häromdagen kom jag att tänka på följande generalisering av Cauchy-Riemanns differential/er (Comét skulle bli storförtjust. Jag tror att han har nog bärkraft för en avhandling.).

x, y Hermiteska matriser, $x = (x'_{ik} + ix''_{ik})$, $(i^2 = -1)$, $y = \ldots$.

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi^{ik}), \xi^{ii} = \tfrac{\partial}{\partial x'_{ii}}; \\ \xi^{ij} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x'_{ij}} - i\tfrac{\partial}{\partial x''_{ij}}.\text{etc.}; \\ \eta &= (\xi^{ik}), \eta^{ii} = \tfrac{\partial}{\partial y'_{ii}}; \\ u &= (u_{ik}),\ v = (v_{ik}). \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann: $u + iv$ är analytisk funktion av $z = x + iy$ om

$$\left.\begin{aligned} \xi u &= -v\eta \\ \xi v &= -u\eta \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Det följer att $z, z^2, \ldots$ är analytiska i z eller allmänt varje konvergent potensserie $\sum c_n z^n$ med skalära /er. Våg/en lyder (följer av (2.2).

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 u + u\eta^2 = 0 \\ \xi^2 v + v\eta^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Translation:

I have thought of writing a report for a long time. Here it is.

After Swarthmore[99] I went to Texas to visit relatives. They were hostpitable and glad that I came.

Princeton after New Year has been much more quiet than Princeton before New Year. No conferences, only the tranquil everyday. I have begun to regret that I did not go to Artin's lectures in algebra. This term he continues in the form of seminar, but otherwise he teaches real functions. Hopf and Tucker lecture on selected parts of geometry, and it is a pleasure to listen to him. Weyl has started a course on integral equations. The introduction today was what one had expected. He is coquetting like a story teller who is not quite sure that his audience did quite get in. Morse gives an "Introduction to Analysis in the Large", but has not begun. von Neumann will start in a couple of weeks.

I have writen a letter to the Mathematics Department in Lund and given a complete list of books from Princeton. But I have not got any answer. An icelander, who came here from Lund before Christmas, told me that the course of Hyltén-Cavallius was not a success, from the point of view that it did not draw a big crowd.

Dayly contact with the library on the third floor has given me a picture of Carleman and Holmgren, of which I had a very wage idea before.

By a coincidence I discovered that a Stockholm mathematician, Sven Hilding had written in Archive [which does not seem to be quite correct], and I told this to him[100] He admitted willingly and said that he will come here in June.

[99] Certainly Swarthmore College, Pennsylvania.

[100] Probably it is the paper [70].

I have worked on various things and believed until the day before yeasterday that I had proved something. The proof turned out to be incomplete, but there is good hope tha it can be completed. Even if this so, I am afraid that you will not allow to add your name to the final manuscript. I hope to prove the following: $p(\zeta) = p(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ is an arbitrary polynomial, [101]

$$p(\zeta) = \sum_0^m \zeta_1^k p(\zeta_2, \dots).$$

The differential equation

$$p(\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0$$

has a solution $u(x)$ such that

1. max abs $u(0, x_2 \dots .), \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}, \dots, \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0} <$
2. max abs $u(x)$ as big as possible when $0 < x_1 < a > 0$.

   if not

3. p_m is a constant $\neq 0$

   and

4. $$p(\xi_1 + i\eta_1, i\eta_2, \dots) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{arbitrary real}}\ \eta_1, \eta_2 \\ \xi_1\ \underline{\text{sufficiently big positive}}. \end{array} \right.$$

If this conditions are fulfilled one can solve Cauchy's problem in the plane $x_1 = 0$ and the solution is continuous in the given data.

A necessary and sufficient condition for each solution to be / is that

$$p(\xi_1 + i\eta_1, i\eta_2, \dots) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{arbitrary } \xi_1 \\ \text{sufficiently big } \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots . \end{array} \right.$$

The last thing is the correct generalization of the parabolic case, exemplified by the heat equation $p(\zeta) = \zeta_1 - \zeta_2^2$.

It is regretable that I have now come to such questions, but my curiosity pushes me there. Unfortunately I am not the first in this game. Petrovsky worked on a similar line in 1937. To each equation satisfying 1. and 2. one can bring about a Riesz integral and prove that $I^0 = 1$ etc. The totally hyperbolic case drowned in this generalization, but deserves of course a special attention.

[101] m is apparently the degree.

The other day I came to think of the following generalization of the Cauchy-Riemann differential equations (Comét would be exited. I think that he has enough supporting capacity for a thesis.).

x, y are Hermitean matrices, $x = (x'_{ik} + ix''_{ik})$, $(i^2 = -1)$, $y = \ldots$.

$$\begin{gathered}\xi = (\xi^{ik}), \xi^{ii} = \tfrac{\partial}{\partial x'_{ii}};\\ \xi^{ij} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x'_{ij}} - i\tfrac{\partial}{\partial x''_{ij}}.\text{etc.};\\ \eta = (\xi^{ik}), \eta^{ii} = \tfrac{\partial}{\partial y'_{ii}};\\ u = (u_{ik}),\ v = (v_{ik}).\end{gathered}$$

Cauchy-Riemann: $u + iv$ is an / function of $z = x + iy$ if

$$\left.\begin{aligned}\xi u &= -v\eta\\ \xi v &= -u\eta\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

It follows that $z, z^2, \ldots$ is / in z or, more generally, each convergent power series $\sum c_n z^n$ with scalar /s. The wave equation reads (follows from (2.2)

$$\left.\begin{aligned}\xi^2 u + u\eta^2 = 0\\ \xi^2 v + v\eta^2 = 0\end{aligned}\right\}$$

[GAP]

2.44.15 Letter to Chicago from Princeton Apr 15, 1947

Jag ber om ursäkt att jag glömde att ta hänsyn till din uppmaningar pröva Princeton Inn på två böcker. Nu är det gjort och resultatet blev negativt. De gjorde en motvillig ansträngning och kunde inte hitta något.

Jag förmodar att Torsten [T.G.] nu är i Chicago. Hälsa honom från mig. I dag kom de ett brev från Pleijel. Han är nu mycket upptagen av den s.k. kampen med Malmheden. De träffas nästan varje dag och diskuterar avhandlingen. Den har redan börjat översättas och Malmheden funderar på att trycka den i vår. Men hinner inte försäkrar Åke lugnande. Du får nog höra från honom (M.) så småningom. Jag hoppas att detta inte rubbar din jämvikt, man har en känsla att Malmhedens avhandling skulle må gott av en förhandsgranskning (vilket den nu får).

Min hemresa har uppskjutits till 19 september preliminärt. Men kanske ändras igen om du har några vägande skäl: opposition på Malmheden eller dylikt. (Jag är självklart inte angelägen.)

Den sista tiden har gått åt till de multipla Laplaceintegralerna. Framstegen har inte varit överväldigande, men inte heller uteblivit. Möjligen blir det hela så invecklat att det faller till marken.

Skälet att jag stannar till september är ett sommarseminarium i Ann Arbor och ett annat i Toronto. Och en planerad bilresa till Seattle i augusti. Någon bil har jag inte fått än, men vidtar energiska åtgärder. Comét har fått ett brev om Cauchy-Riemann, men ännu inte svarat.

Det var allt som är att säga för tillfället. Dina vänner i Princeton, fru v. Neumann och spritförsäljaren mitt emot Dapraz hälsar.

Lars

Mera ur Pleijels brev: Bergström och Lamek enda kvarstående i Göteborg. Tre sakkunniga: Hössjer + två Chalmersprofessorer anti Bergström. Pleijel fick tre ämnen i Stockholm.

1. Några satser i /släran.
2. Asymptotiska framställningar av analytisk funktioner (troligen av Odqvist).
3. Några integral/er.

Valde 1 (kubens fördubbling och vinkelns tredelning).

Translation:

Please excuse me that I forgot your requests to test Princeton Inn for two books. Now it is done gjort and the resultat was negative. They did reluctently an effort and could not find anything.

I presume that Torsten [T.G.] is now in Chicago. Please, give my regards to him. Today there was a letter from Pleijel. He is now quite busy with the so called fight with Malmheden. The two meet almost every day and discuss the thesis. One has already began to translate it and Malmheden wants to print it in the spring. But he will not have the time, assures Åke comforting. You will surely here from him (M.) in due time. I do hope that this will not disturb your equilibrium, one has the feeling that Malmheden's thesis could profite from an overhaul (which it gets now).

My departure has been postponed, preliminary, until 19 September. But maybe will be changed again if you have any valid reasons: opposition on Malmheden or such. (Of course, I am not eager.)

Lately I have spent most time to the multiple Laplace integrals. Progress has not been overwhelming, nor has it been absent. Perhaps the whole will be so involved that it falls to the earth.

The reason why I stay until September is a summer seminar at Ann Arbor and another one at Toronto. And an automobil-trip to Seattle planned in August. I have not yet got a car, but I take energetic measures. Comét has got a letter about Cauchy-Riemann, but he has not yet answered.

This is all I had to say for the time being. Your friends in Princeton, Mrs. v. Neumann and the liquor-dealer opposite Dapraz are sending their best regards.

Lars

More from Pleijel's letter: Bergström and Lamek are the only remaining applicants in Göteborg. Three experts: Hössjer + two Chalmers professors anti Bergström. Pleijel was given three topics at Stockholm.

1. Some theorems in the theory of equations.

2. Asymptotical representations of / functions (probably by Odqvist).

3. Some integral equations.

Åke choose topic 1. (The doubling of the cube and the trisection of the angle).

2.44.16 Letter to Chicago from Panama City, Florida, postal stamp May 17, 1947

Som Halmos (troligen) redan har talat om, så kommer jag till Chicago den sista veckan i maj.

För tillfället är jag på en biltur med Pais[102] till Florida och tillbaka. Det är god omväxling till matematiken. Sist höll jag på med i medeltal nästanperiodiska lösningar till våg/en, dvs följande sats: En lösning $u(x)$ till våg/en på en cylinder R, parallell med tidsaxeln har egenskapen att

$$\int_R |u(x_1, x_2, \dots)|^2 dx_2 \dots$$

är nästanperiodisk. Jag hoppas kunna göra det bättre och även generalisera till andra /er.

Innan jag for fick Lefschetz ett litet manuskript om Cauchys problem att publiceras i Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Han fick mej att lova att skriva ut den fulla texten i Ann. Math., vilket jag ångar nu. Det och en koncentrerad text gör precis samma nytta som en fullstädig upplaga.

[102] Tvivelsutan fysikern A. Pais. Se 1.5.x.

Sedan sist har jag skaffat Pleijel husrum i Princeton. Tänker skriva till Lund att jag inte kommer hem förrän i oktober och be dem ordna ev. formella detaljer, kan väl inte vara alltför besvärligt.

Jag tänker föreläsa Hilbertrymden i höst om ingen hyser betänkligheter. Titel exempelvis: Linjära /er (+ (ev.) i Hilbertrymden.

Det skall bli roligt att ses igen och att se Chicago.

Lars.

(Halmos ordnar bostad).

Translation:

As Halmos (probably) already has told you, I will come to Chicago in the last week of May.

Right now I am on an automobil-trip with Pais[103] to Florida and back. It is a good change to mathematics. Recently, I† was busy with in the mean almost periodic solutions of the wave equation, that is, the following theorem: A solution $u(x)$ of the wave equation on a cylinder R, parallel to the time axis has the property that

$$\int_R |u(x_1, x_2, \dots)|^2 dx_2 \dots$$

is almost periodic. I hope to be able to do this better and even generally to other equations.

Before my departure I gave to Lefschetz a small manuscript on Cauchy's problem to be publiched in the Proc. Natl. Acad. Sci. USA. He made me promise to write out the full text for the Ann. Math., which I regret now. This and a concentrated text has precisely the same use as a complete edition.

Since I came here, I have found an accomodation for Pleijel in Princeton. I intend to write to Lund telling thay I won't be back home earlier than in October asking them to settle possible formal details, should not be too complicated.

I intend to lecture on the Hilbert space in the fall if nobody has any objections. Title for example: Linear /s (+ (possibly) the Hilbert space).

It shall be nice to see you again and to see Chicago.

Lars.

(Halmos arranges accomodation).

[103] Without doubt the /ist A. Pais. See 1.5.x.

2.44.17 Letter to Lund Princeton, Aug 16 1947

Jag lovade att skriva och tala om hur det gick med det tidsartade problemet och uppfyller nu mitt löfte. Det har stått nästan stilla sedan den 1 augusti beroende på att jag arbetat med en uppsats om totalhyperboliska /er som nu är färdig. Den är inte lång, ca. 20 *Annals* sidor, men löser Cauchys problem fullständigt och bevisar på det sätt som jag antydde för dig att I^0 är ett osv. Jag är mycket nöjd med den därför att den innehåller inga som helst komplicerade räkningar, mest enkla uppskattningar. Och är den första systematiska i sitt slag. Jag anknyter då och då till Herglotz och Petrovsky och t. o. m. Zeilon kommer med på ett hörn. Ett polynom

$$q(\eta) = p(\eta) + r(\eta), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

är totalhyperboliskt med avseende på ξ om $p(\eta)$ är homogen av graden m, $r(\eta)$ av graden $< m$; /en

$$p(\eta + s\xi) = 0$$

har nu reella rötter, som alla är enkla endast då $\eta = 0$ och det finns ett $s_0 > 0$ så att

$$q(s\xi + i\eta) \neq 0$$

för alla reella η och $s > 0$.

Det sista villkoret är nödvändigt för att Cauchys problem för /en $q(\frac{\partial}{\partial x}u(x)) = 0$ och planet $(\xi, x) = 0$ skall vara korrekt ställt.

Just nu håller jag på med att författa en not om representationer av en Lie grupp som begränsadee transformer av en Banach rymd i sig själv [46]. Den är löjligt enkel men innehåller en sats som tycks ha undgått folk i Amerlka sedan Wigner skrev sitt arbete om unitära representationrt av Lorentzgruppen. När den är färdig börjar det tidsartade problemet att sätta fart igen. Jag betonar att jag fortfarande är säker på att kunna lösa det (litet säkrare än sist på grund av ett lyckat specialfall), men kan inte på rak arm säga vad som urartar vid rotationssymmetri ehuru jag kan skall försöka se det så snart som möjligt.

Malmheden jag hållit sig tyst som en mus sen sist. Jag hoppas på en smal avhandling.

Hjärtliga hälsningar

Lars Gårding

Translation:

I recall that I promised to write and tell what happened to the time-like problem; I fulfill now my promise. It has thus been almost at standstill since 1 Augusti, because I have been working on a paper about totally hyperbolic equations, which now is ready. It is not long, some 20 Annals pages, but solves Cauchy's problem completely and proves in the way I indicated to you that I^0 is unity etc.

I am very satisfied with it because it does not contain any complicated computations, at most simple estimates. And it is the first systematic of its kind. I connect it now and then with Herglotz and Petrovsky, and even Zeilon joins in. A polynomial

$$q(\eta) = p(\eta) + r(\eta), \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

is totally hyperbolis / ξ if $p(\eta)$ is homogeneous of degree m, $r(\eta)$ of degree $< m$; the equation

$$p(\eta + s\xi) = 0$$

has now real roots, which all are simple only if $\eta = 0$ and there is an $s_0 > 0$ such that

$$q(s\xi + i\eta) \neq 0$$

for all real η and $s > s_0$.

The last condition is necessary for Cauchy's problem for the equation $q(\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0$ and the plane $(\xi, x) = 0$ to be correctly posed.

I am right now busy writing a note on representations of a Lie group as / transforms of a Banach space into itself [46]. It is enbarrassingly simple but contains a theorem that seems to have escaped people in Amerlca, after Wigner wrote his paper about unitary representations of the Lorentz group.

When it is ready the time-like problem will speed up again. Let me emphasize that I am still sure to be able to solve it (a little bit more sure than last time because of a sucessfull special case), but I cannot tell straight off what is degenerating in the case of rotational symmetry, although I'll try to see it as soon as possible.

Malmheden has been quiet as a mouse since last time. I do hope it will be a narrow thesis.

sincerely yours Lars Gårding

2.44.18 Short-letter Otterbygård, June 18, 1948

Tack för brev. Wiman har gått samma väg som jag och v.d. Waerden, men inte bevisat något såvitt jag kan se. Han måste förutsätta något om relationen man utgår ifrån (ngt $\not\equiv 0$) och bevisa att den algebraska relation man får icke är $\equiv 0$. (Skall försöka samla mej till ett brev till W.) Är i mycket dålig form men sover något bättre än förut. Tror just nu inte att jag blir frisk till i höst och förbannar dagligen mitt öde.

Lars

Translation:

Thanks for your letter. Wiman has taken the same route as me jag and v.d. Waerden, but he has not proved anything as far I can see. He must assume something about the relation that one starts out from (something $\not\equiv 0$) and prove that the algebraic relation one gets is not $\equiv 0$. (Shall try to pull myself together and write to W.) I am in a very bad shape but I sleep somewhat better than before. I believe now that I will not be well sleep somewhat better than this fall and every day I am cursing my fate,

Yours faithfully, Lars

2.44.19 Letter to Marcel Riesz (Lund) from Lund, Jun 24, 1948

24.6. 48.

Jag har tänkt över Wimans lösning. Denna måste vara rätt och jag har varit blind på bägge ögonen. I alla fall räddar den åtskilligt. Jag är andligt i bättre form än på länge men humöret står på absoluta nollpunkten och jag har svårt att tänka mig en djävligare tillvaro än min.

Tillgivne

Lars Gårding

Translation:

I have thought of Wiman's solution. It muste be correct, and I have been blind in both eyes. In any case it saves a great deal. Mentally, I am in better shape since a long time ago but my temper is on the absolute zero, and I can hardly imagine a more diabolic existence than mine,

Yours faithfully, Lars Gårding

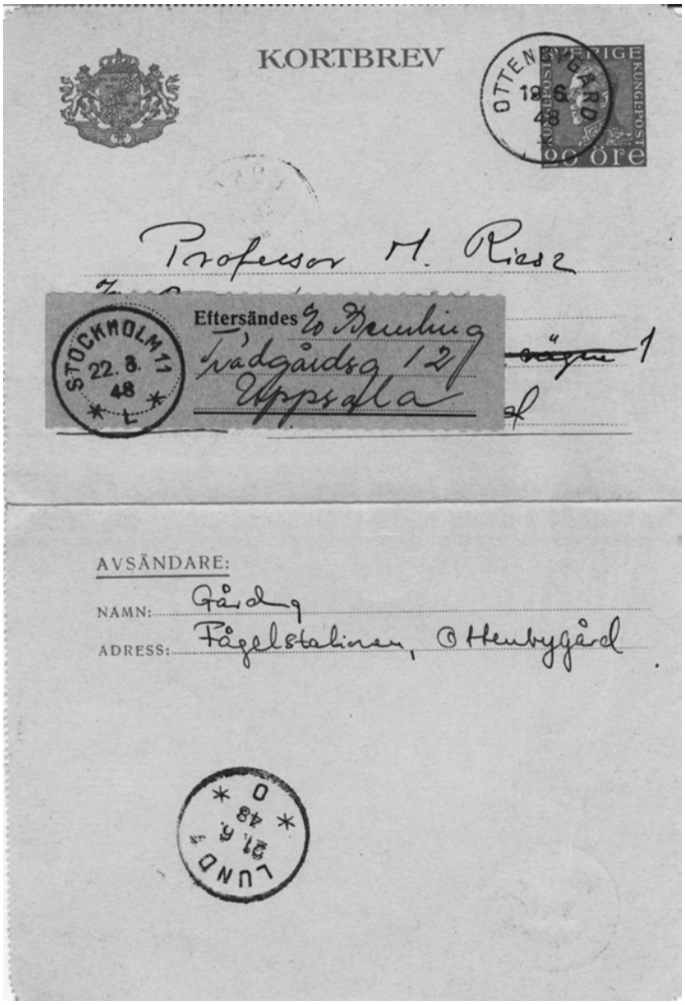
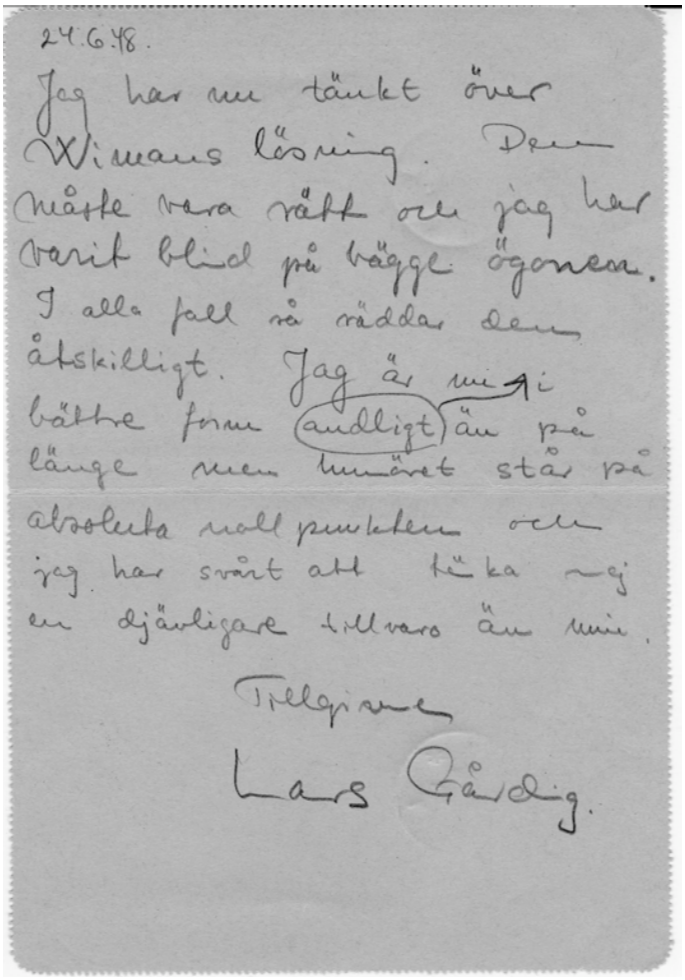


Figure 2.25: Facsimile of letter June 18, 1948


24.6.48.

Jag har nu tänkt över Wimans lösning. Den måste vara rätt och jag har varit blind på båggge ögonen. I alla fall så räddar den åtskilligt. Jag är nu i bättre form (audligt) än på länge men humöret står på absoluta nollpunkten och jag har svårt att tänka mig en djävligare tillvaro än min.

Tillgivne

Lars Gårding.

Figure 2.26: Facsimile of letter June 24, 1948 recto

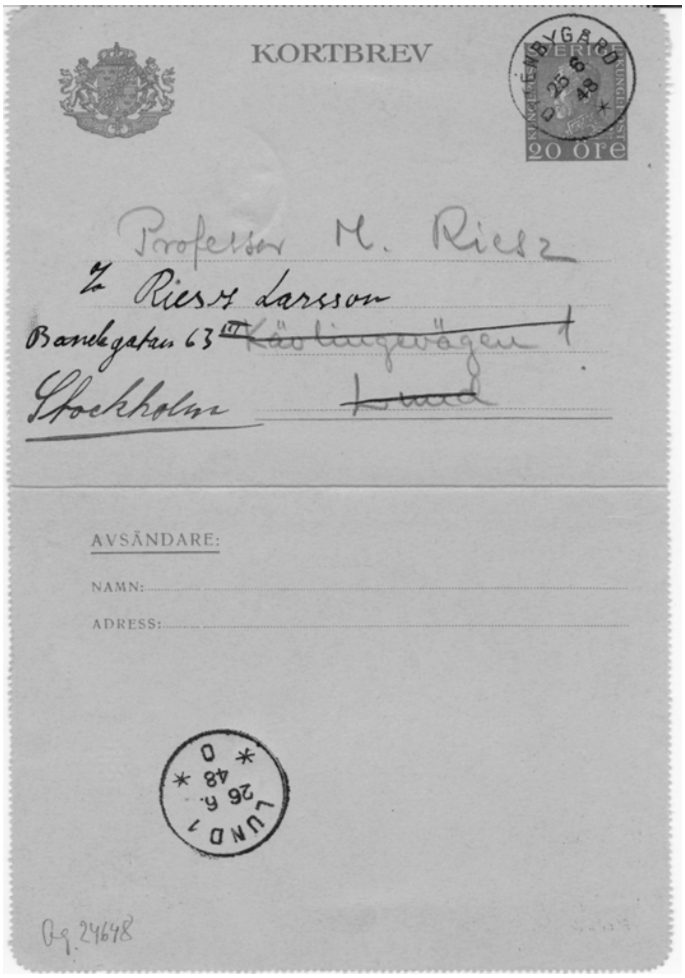


Figure 2.27: Facsimile of letter June 24, 1948 verso

2.44.20 Letter Jan 13, 1949

Jag sänder ett sammandrag av den lösning av Goursats problem som jag nu försöker skriva ihop. Med alla bevis blir den nog ganska lång, men den är en stor förbättring av min tidigare. Den erinrar på nästan alla punkter om /teori i tre dimensioner. Jag uttnyttjar kraftigt att det rör sej om en kon men kan nog klara med också med en något deformerad kon, bara den är tillräckligt konliknande vid spetsen.

Jag ber tusen gånger om ursäkt för att jag lade min näsa i blöt i affären med Copson. Hade jag tänkt litet mer hade det naturligtvis inte hänt. I alla fall är jag glad att det inte är något fel i ditt arbete. Terminen vid institutet slutade i söndags och jag är rädd att jag inte har mycket att berätta om den. Uppsättningen stipendiater är förstås alldeles ny och av litet annan karaktär än då jag var här sist. Då var topologisk algebra det enda människovärdiga – nu duger nästan allting. Det finns en hel del som sysslar med partiella differential/er bl.a. M. Shiffer som är en elev till Stefan Bergmans lärjungar nu professor vid universitetet. Fine Hall har jag sett mycket litet av och institutet ser jag mindre och mindre av sedan jag börjat arbeta hemma. Kontakten med kollegerna har emellertid inte förfallit. Fysikerna har varit mycket intresserade av mitt arbete om hyperboliska differential/er. Det tycks komma lägligt nu när en hel del av dem experimenterar med nya eller modifierade våg/er. Jag tror jag har bidragit till att misstänkliggöra bl.a. en ansats av Max Born, men min insats var kanske onödig eftersom Borns ansats troligen kommer att dö av sig självt.

Svenskarna här är Rådström, Hanner och Klein. Pauli har kommit hit och skall stanna ett tag. von Neumann, Montgomery och Lefschetz (som fortfarande sköter Fine Hall och föreläser en massa) hälsar till dig.

Alla är nyfikna hur det skall gå med Carlemans professur. Om någon nödvändigtvis skall kallas så tycker jag Atle Selberg vore det bästa valet. – Nu övertar Eva.

Din tillgivne

Lars Gårding

Translation:

I send you hereby a summary of the solution to Goursat's problem that I am now trying to write up. With all proofs it will be fairly long, but it is a great improvement over my previous ones. It reminds in almost all points of / theory in three dimensions.

I use effectively that it is about a cone but I can probably also manage with a somewhat deformd cone, if only it is sufficiently cone-like at the summit.

I ask a thousand times forgiveness that I mingled myself into the affair with Copson. Had I thought a little bit more, this would of course not have happened. In any case, I am glad that there is nothing wrong with your paper. The term at the Institute ended last Sunday and I am afraid that I do not have much to tell about it. The set of holders of scholarships is of course completely new and of a somewhat different character than when I was here last time. Then topological algebra was the only respectable – now practically anything is accepted. There are quite af few dealing with partial differential equations among them M. Shiffer, who is a disciple of Stefan Bergman's students, now professor at the University. I have not seen much of Fine Hall and I see less and less of the Institute after I began to work at home. The contact with my colleagues has, however, not degenerated. The /ists have been very interested in my work on hyperbolic differential equations. It seem to have come opportunely now when quite a few of them are experimenting with new or modified wave equations. I believe that I have contributed to throw suspicion on, among others, an inception of Max Born, but this was perhaps unnecessary, as this Ansats probably will die by itself.

The Swedes here are Rådström, Hanner and Klein. Pauli has come here and will stay for a while. von Neumann, Montgomery and Lefschetz (who still manages Fine Hall and is lecturing a lot) send their greetings to you.

All are curious what wlll happen to Carleman's professorship. If there is anybody thar one must call absolutely, then I think that Atle Selberg would be the best choice. – Now Eva takes over,

Yours faithfully, Lars Gårding

2.44.21 Letter Oct 17, 1949

Tack för hjälpen. Essen-Möllers telegram är ett mästerstycke.

Jag vet inte hur mycket hänsyn den amerikansk byråkratin tog till det, men det är troligt att det hjälpte en del. Felet var ursprungligen mitt som inte teg vid läkarundersökningen i Göteborg, i andra hand var det Göteborgsläkarens som inte följde mitt råd att nöja sig med Essen-Möllers intyg och tiga om saken i nästa instans. – Här i Princeton har vi nu varit i fem dagar (Ellis Island tog fyra). Stället är sig fullständigt likt med undantag av att proportionen fysiker har ökat. Jag känner nästan inga av det variabla klientelet. Hanner har nu äntligen fått en del topologer att umgås med. Men jag har nu känsla av att det vore bättre för honom om han höll till mer i Fine Hall där trycket att forska är mindre än här. Jag har hittat Sherman från

Chicago här. Han gör samma litet välmenande intryck som vanligt. – Jag återkommer då jag har litet mer att berätta. Eva hälsar.

Lars

Translation: Many thanks for your help. Essen-Möller's cable is a master piece. I do not know how much attention the American byrocrazy took from it, but it is conceivable that it helped somewhat. The mistake was from the beginning mine, because I did not be quiet during the medical check-up in Göteborg, in the second hand it was the Göteborg doctor who did note follow my advice to be content with the certificate of Essen-Möller and be silent about it in the next instance. – We have now been here in Princeton for five days (Ellis Island took four). The place is completely as usual, with the exception that the proportion of /ists has increased. I hardly know almost any of the variable crowed. Hanner [104] has now finally got some topologists to talk to. But I have now the feeling that it might be better for him if he spent more time in Fine Hall where the pressure to do research is less than here. Jag have found Sherman from Chicago here. He leaves the same somewhat well-meaning impression as usual. – I'll write again when I have a little more to tell. Eva sends her regards.

Lars

2.44.22 Letter from E. J. Copson to Lars Gårding Oct 18, 1949[105]

14 Balmyle Road
West Ferry
Dundee

Oct, 18, 1949

Dear Dr Gårding,

I have been reading Professor Riesz's magnificient paper in the *Acta*, Vol. 81, with the greatest interest, and am very glad that his authoritative treatment of the generalized Riemann-Liouville integral is now available,

[104] Olof (Olle) Hanner (b. 1922), mathematician, a topologist, professor at GU 1963-89.

[105] Edward Thomas Copson (1901 - 1980), British mathematician, graduated from Oxford and was appointed a lecturer at Edinburgh. He later held posts at the Royal Naval College in Greenwich and Queen's College Dundee, before being appointed Regius Professor at St Andrews. He was an expert on Complex Analysis and contributed many papers on this subject. He became Secretary of the EMS in 1924, its President in 1930 and 1954 and an honorary member in 1979. [110]

Unfortunately, I cannot follow the argument at one point, and I hope that you, who have been so long in contact with Professor Riesz, will be able to clear it up for me.

In §95, Professor Riesz proves the fundamental formula

$$\int_{D_y^x} V^\alpha(x;z)V^\beta(z;y)dz = V^{\alpha+\beta}(x;y)$$

by proving first that

$$\int_{D_y^x} V^\alpha(x;z)V^\beta(y;z)dz = V^{\alpha+\beta}(x;y)$$

and then using the property of symmetry. But the proof of the symmetry rests upon equation (103) on page 196, namely

$$V_k(x;y) = V_k(y;x).$$

But thus is not true for $k = 0$, for on page 181, it is shown that

$$V_0(x;y) = \left(\frac{g(y)}{g(x)}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

so that

$$V_0(x;y) = V_0(y;x).$$

Can you explain this?

I have tried to trace where the error may have arisen by re-reading Hadamard's book (both in the English and French versions), but find it impossible.

In Dundee, we do not subscribe to Acta, and I have to borrow it from the Universitet Library of St. Andrews. If your Department has any copies of Professor Riesz's paper for /, I should be honored to receive one.

With kindest regards
Yours faithfully E.J. Copson

2.44.23 Letter Paris, 9 Jun 1949

Jag borde ha skrivit för längesedan – men en del besvärligheter som jag har haft med tidartade problemet har gett mej dåligt samvete och det har

inte blivit av. Ställningen för tillfället är den att man kan lösa det för en godtycklig (ej nödvändigtvis cirkulär) kon förutsatt att begynnelsevärdena är tillräckligt bra och försvinner identiskt (eller är identiskt = noll) i en närheten av spetsen. Gott hopp finnes för en godtycklig tidsartad yta som är homeomorf med konen och är tillräckligt konartad vid spetsen. Försvinnandet vid spetsen kan ersättas med $O(t^m)$ där m är tillräckligt stort – hur stort vet jag emellertid inte ens i de enklaste fallen. Någon närmare uppfattning av hur lösningen ser ut har jag inte men kan utan vidare specialisera till rotationssymmetri. I konfallet kan man skriva upp en t. v. formell Greensk funktion med Mellin /.

Så är det andra saker: Hilles integral eller snarare existensbevis till differential/en $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ på en kompakt mångfald kan föras med enkla medel och utan halvgruppsteori. Ett bergsäkert lic.- eller eventellt avhandlingämne.

Träffade Paris verkade dött i början, jag såg Hadamard efter ett akademisammanträde och hörde sedan inte av honom ett tag. Verksamheten på Institut Henri Poincaré var inte särskilt intensiv (biblioteket har inte pengar att köpa Mathematical Reviews för!). Henri Cartan som jag sökte upp ordnade ett föredrag åt mej i en serie som Societé Mathématique de France har varannan måndag. Det blir den 13 juni om hyperboliska /er.

I slutet av maj blir det livligare med några föredrag av André Weil om algebraisk geometri och ett treadagars Bourbakiseminarium med genomgång av arbeten av Brauer, Frobenius (periodiska funktioner av flera variabler), Gel'fand och Petrovsky. Schwartz hade hand om P. och tänker gå igenom hans fyra stora arbeten sedan 1935. Dagarna före detta seminarium var jag i Nancy och blev väl mottagen av Schwartz och Godement. S. har kvar sin charm och /erna har inte fördärvat honom. De några jag har träffat här är förtjusta i Bourbaki och en del också i /erna. Samarbetet och troligen också sämjan mellan den gamla skolan på Sorbonne (Montel, Frechet, Julia, Valiron) och Bourbakigruppen är noll.

Floret Bureau var på Bourbakiseminariet. Han är en idiot med samma fixa idé som Zeilon: elementarlösningar. En belgare sa mej att han övertagit de la Valée Poussins nyckelställning i Belgien. Han är släkt med någon stor industripamp.

I morse ringde Hadamard. Han skall ge ut en bok (möjligtvis en ny upplaga av den gamla) och tänker citera mig. Jag får se citatet i morgon.

Tack för det besvär ni har haft med uppsatsen i fysiografen [47]. Det var en överraskning för mej att jag förskrivit mej. Som granskare är Hyltén-Cavallius många gånger bättre än Jacobinski.

Schwartz hälsar hjärtligt, likaså Nevanlinna som var här och höll ett föredrag.

Din tillgivne Lars Gårding

Translation:

I ought have written a long time ago – but some complications which I have had with the time-like problem has given me a bad conscience and so nothing came out of it. The situation is for the moment that one can solve it for an arbitrary (not necessarily circular) cone assuming that the initial values are sufficiently nice and vanish identically (or are identically = zero) in a / of the vertex. There is good hope for an arbitrary time-like surface that is homeomorphic to the cone and is sufficiently cone-like at the vertex. The vanishing at the vertex can be replaced by $\mathrm{O}(t^m)$ where m is sufficiently big – how big, however, I do not know even in the simplest cases. I do not have any closer understanding of how the solution looks but I can straight off specialize to rotational symmetry. In the cone case one can write down a, so far, formal Green function with the Mellin /.

Also something else: Hille' s integral or rather the existence proof for the differential equation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ on a compact manifold can be carried out with simple tools and without semi group theory. An absolutely certain topic for a thesis in the licentiate or doctorate.

I hit Paris, looked to be dead in the beginning, I saw Hadamard after a meeting of the Academy and did not here from him for a while. The activity at the Institut Henri Poincaré was not particularly intensive (the library has not money to buy Mathematical Reviews!). Henri Cartan whom looked upp arranged a talk for me in a series that the Societé Mathématique de France has each second Monday. It will be on 13 June on hyperbolic equations.

At the end of May it will be more lively with some talks by André Weil on /ic Geometry, and a three-day Bourbaki seminar with an exposition of work by Brauer, Frobenius (periodic functions of several variables), Gel'fand and Petrovsky. Schwartz took hand of P. and intends to cover his four great papers since 1935. During the days before that seminar I was in Nancy and was well received by Schwartz and Godement. S. has preserved his charm, and the /s have not distroyed him. The few that I have met are delighted at Bourbaki and some also at the /s. Cooperation and probably also concord between the old school at Sorbonne (Montel, Frechet, Julia, Valiron) and the Bourbaki group is zero.

Floret Bureau was at the Bourbaki seminar. He is an idiot with the same fixed idea as Zeilon: elementary solutions. A Belgian told me that he has taken de la Valée Poussin's key position in Belgium. He is a relative of a great industrialist.

This morning Hadamard phoned me. Han is about to publish a book (possibly a new edition of the old one) and intends to quote me. I am going to see the citation to morrow.

Many thanks for the trouble you had with my paper in the Proceedings of the LFS [47]. It was a surprise to me that I had prescribed myself. As a reviewer Hyltén-Cavallius is many times better than Jacobinski[106]

Schwartz salutes you heartily, and so does Nevanlinna who has been here and gave a talk,

Yours truly, Lars Gårding.

2.44.24 Letter Lund, Dec 13 1949

/ sista tiden har jag sysslat en del med /teori varom mera nedan. Den egentliga orsaken till att jag tillfälligt övergav Goursats problem var att det redan (och just det fall jag betraktat) är löst av Sobolev (Mat. Sbornik 1942) i en artikel p ryska jag tittade p för tre r sedan men inte begrep /. Min metod är emellertid bättre lämpad för generaliseringar men det kommer försts att ta en del tid att utarbeta denna. Redan det jag har gjort blir ganska massivt / det blir nedskrivet. Hela historien kom ju olämpligt nu när Carlemans professur ledigförklarats – och jag tar det hela med jämnmod. Jag tänker under alla omständigheter lämna in mina papper.

/teorin har följande upprinnelse. Bochner ville veta när den av Herglotz konstruerade klassiska lösningen till den elliptiska differential/en

$$p(\frac{\partial}{x_1},\dots,\frac{\partial}{x_n})f(x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n)$$

där $p(\xi)=p(\xi_1,\dots,\xi_n)$ är ett reellt definit homogent / av nödvändigtvis jämn grad $m>0$, är analytiska funktioner. Jag visade det samtidigt som jag inte kunde lta bli att konstruera Riesz kärna ocks. Den blir

$$\mathfrak{P}(\alpha,k)=(2\pi)^{-n}\Gamma(n-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}(\alpha-n)\int_p|(x,\xi)|^{\alpha-n}d\omega_p(\xi),$$

där $\alpha>n-1$, $(x,\xi)=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$, $_p$ är den slutna grafen av ytan $p(\xi)=1$ och $d\omega_p(\xi)$ dess ytelement. / $\alpha=n+2k$ blir kärnan ∞ många polynom, men $\frac{1}{2}(\mathfrak{P}(n+2k+,k)+\mathfrak{P}(n+2k-,k))$ gr mot

$$\mathfrak{P}(n+2k,k)=(2\pi)^{-n}(-1)^k\int_p\frac{(x;\xi)^{2k}}{\Gamma(2k+1)}(\log\frac{1}{|(x;\xi)|}+\frac{\Gamma'(2k+1)}{\Gamma(2k+1)}d\omega_p(\xi),$$

[106]Heinz Jacobinski (born 1924 in Germany, came to Sweden as a refugee in 1938, moved to Uhldingen-Mühlhofen, Germany in 2005. mathematician, algebraist, fil.dr. SU1974, thesis [91]; other papers: [89], [90], [92], [93], [94]; professor CTH 1967.

då $\xi 0$. Kärnan har alla de vanliga egenskaperna ocks och är analytisk i α och x s länge $x \neq 0$ är reell och $\alpha \neq n + 2k$ $(k = 0, 1, \dots)$. Herglotz formler fr man som specialfall.

När jag gjort detta läste jag H. Cartans arbete [27] och upptäckte att alla kärnorna där $\mathfrak{P}(\alpha, k)$ där $n > \alpha > 0$ uppfyllde alla villkor han ställde p sina mtt $d_\alpha(x) = \mathfrak{P}(\alpha, k)dx$ utan det enda att $\mathfrak{P}(\alpha, k) \geq 0$ vilket är klart / $n > \alpha \geq n - 1$ men svrt att visa / $n - 1 > \alpha > 0$. Emellertid gäller då $n > \alpha > n - 1$ följande formel för energiintegralen

$$\int \mathfrak{P}(\alpha, x - y) = d\mu(x)d\mu(y) = (2\pi)^{-n} \int p(\xi)^{-\frac{\alpha}{m}} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi, \tag{2.1}$$

där μ är en additiv mängdfunktion (icke-negativ) och

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i(x,\xi)} d\mu(\xi)$$

är dess / transform. Med hjälp av denna formel kan nu Cartans alla satser bevisas. Hur det är med hans extra villkor: maximum principen vet jag inte. Jag funderar p att göra en /teori i t.ex. det n-dimensionella euklidiska rummet genom att helt fräckt definiera en energi-integral som

$$I(\mu) = \int q(\xi) |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi$$

med ett lämpligt $q(\xi > 0)$ och se vad som händer. Om du har ngon sikt i denna frgan s skriv mig. Om det inte blir ngon specimeringstid för professuren tänker jag skriva ut min härledning av $\mathfrak{P}(\alpha, x)$ och be dig presentera den i Fysiografen (för att göra Meddelanden litet tjockare). Pais och Uhlenbeck [119] har skrivit ett manuskript där de utnyttjat mitt arbete om hyperboliska differential/er. F.ö. är ingenting att anteckna. Vi lever ett stilla liv p landet. Den sista sensationen var ett enligt allas mening och vr ocks lyckat bilköp. Ngot resande blir det nog inte av förrän till sommaren. Lotz har varit p besök och hälsar. Vinhandlaren hälsar. Vi köper kaliforniskt rödvin av honom. Eva hälsar. Din tillgivne

Lars Grding

9A Goodman rd Princeton N.J.

Translation:

Lately I have been occupied by a lot with / theory, about which more below. The main reason why l temporariy abandoned Goursat's problem was that it has already (and presicely the case that I treated) been solved by Sobolev (Mat. Sbornik 1942) in a Russian paper which I looked into three years ago but without understanding it then. My method is however, better suited for generalizations, but it will of course take some time to work it out. Already what I have done will be rather massif when it is writtem down. The whole thing came rather inoppurtunely now when Carleman's professorship has become vacant – so I take it with composure. In any case, I am going to hand in my documents.

The / theory has the following origin. Bochner wanted to know when the classical solution constructed by Herglotz of the elliptic differential equation

$$p(\frac{\partial}{x_1},\dots,\frac{\partial}{x_n})f(x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n)$$

where $p(\xi)=p(\xi_1,\dots,\xi_n)$ is a real definite / /, by necessity of even degree $m>0$, is an / function. I showed this simultaneously as I could not help to construct also the Riesz kernel. It is

$$\mathfrak{P}(\alpha,k)=(2\pi)^{-n}\Gamma(n-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}(\alpha-n)\int_p|(x,\xi)|^{\alpha-n}d\omega_p(\xi),$$

where $\alpha>n-1$, $(x,\xi)=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$, $_p$ is the closed graph of the surface $p(\xi)=1$ and $d\omega_p(\xi)$ its area element. Then $\alpha=n+2k$ is the kernel of the infinitely$many poles, while 1\frac{}{2(\mathfrak{P}(n+2k+,k)+\mathfrak{P}(n+2k-,k)}$ goes to

$$\mathfrak{P}(n+2k,k)=(2\pi)^{-n}(-1)^k\int_p\frac{(x;\xi)^{2k}}{\Gamma(2k+1)}(\log\frac{1}{|(x;\xi)|}+\frac{\Gamma'(2k+1)}{\Gamma(2k+1)}d\omega_p(\xi),$$

as $\xi\to 0$. The kernel has also all the usual properties and is / in α and x as long as $x\neq 0$ is real and $\alpha\neq n+2k$ $(k=0,1,\dots)$. One obtains the Herglotz formulae as a special case.

When I had done this, I read H. Cartan's paper [27] and discovered that all kernels there $\mathfrak{P}(\alpha,k)$, with $n>\alpha>0$, fulfllled all the conditions he had put on his measure $d_\alpha(x)=\mathfrak{P}(\alpha,k)dx$ except the single that $\mathfrak{P}(\alpha,k)\geq 0$, which is clear when $n>\alpha\geq n-1$ but hard to show when $n-1>\alpha>0$. However, for $n>\alpha>n-1$ holds the following formula for the energy integral

$$\int\mathfrak{P}(\alpha,x-y)=d\mu(x)d\mu(y)=(2\pi)^{-n}\int p(\xi)^{-\frac{\alpha}{m}}|\hat{\mu}(\xi)|^2d\xi, \qquad (2.2)$$

where μ is an additive setfunction (non-negative) and

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i(x,\xi)} d\mu(\xi)$$

is its / transform. With help of this formula one can now prove Cartan's theorems. I do not know how it is with his extra condition: the maximum principle. I am contemplating to work out a / theory in, say, n-dimensional Euclidean space, quite impudently defining the energy integral as

$$I(\mu) = \int q(\xi) |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi$$

with suitable $q(\xi > 0)$ and see what happens. If you have any opinion in this question, please write to me. If there will be no specimen time for the professorship, I intend to write down my deduction of $\mathfrak{P}(\alpha, x)$ and ask you to present it to the FSL (in order to make the Meddelanden a little bit thicker). Pais and Uhlenbeck have written a manuscript where they use my work on hyperbolic differential equations. Otherwise there is nothing of note. We live a quiet life on the countryside. The last sensationen was, according to everybody's conensus and our's likewise, a lucky purchase of a car. But there will be no traveling before summer. Lotz has visited us. The wine merchant sends his regards. We buy Californian red wine from him. Eva also sends her regards,

Yours truly, Lars Grding
9A Goodman rd Princeton N.J.

2.44.25 Postcard to Marcel Riesz (Lund), with postal stamps Budapest and Lund Dec 1950

Har nu träffat nästan all ungerska matematiker inklusive Fejér som var en stor upplevelse. Har hllit föredrag i Szeged som var ganska hyggligt. Andra uppl. av det gr av stapeln här och blir nog bättre. Nagy, Kalmár och Redei hälsade. Det tidsartade är säkert färdigt / jag kommer hem. Double-couche ansats, specialisering till rotationssymmetri utlovas. Kommer hem till 1 feb. Hjärliga hälsningar och god jul

Lars Grding

Translation:

[106]It depicts a bridge in Budapest, apparently damaged in the war.



Figure 2.28: A LÁNCHID ROMOKBAN

I have now met almost all Hungarian mathematics, inclusive Fejér, which was something to remember. I have had a talk in Szeged, which was quite decent. The second edition of it will be delivered here and will probably be better. Nagy, Kalmár and Rédei send their regards. The time-like will certainly be ready when I come home. A double-couche approach, specialization to rotational symmetry are promised. I will be back on 1 February. Hearty greetings and Merry Christmas,

Yours faithfully, Lars Grding,

2.44.26 Letter to Stanford from Lund, Nov 8 1954

Käre Marcel. Tack för ditt brev. Jag hoppas att mitt som jag skrev ungefär samtidigt nu har kommit fram.

Beträffande bostad så finns det en hel del att säja. Det är ont om bostäder nära Institutet. Den enda är "Lord Calvert Motel" som brukar användas för tillfälliga gäster som skall stanna längre tid. Det ligger alldeles intill landsvägen (US1) i en lutning vid ett trafikljus vilket betyder att man inte kan sova där de första nätterna. Detta motell måste Du till varje pris undvika. Du måste nog tänka dej åka buss till Institutet. I så fall kan Du bo

1. I Tacoma Park (förstad till Washington; College Park är en annan, bägge ligger i Maryland). Du kan då ibland åka med W.

2. I Washington på något "apartment hotel", t.ex. det ganska luxuösa Woochner (MacCarthy har bott där) där man betalar c:a 125 i månaden. Trevligt läge men långt bort från Takoma Park.

3. John Todd och Olga Taussky är bägge matematiker och arbetar på Bureau of Standards. De ska var i New York i vår och vill hyra ut sin våning (130 per månad). De är goda vänner med Weinstein och ev. underhandlingar kan föras via Weinstein.

Mitt råd är att du nämner dessa möjligheter för Weinstein och samtidigt vägrar att bo på Lord Calvert. Han kommer antagligen invända att 2. och 3. är för långt bort, men det kan bemötas med att du inte behöver arbeta på Institutet mellan nio och fem varje dag som de andra. (W. vet nog allt om bussförbindelser.)

Som jag redan skrev kommer Åke att avlösa Dig som gäst i mars.

Beträffande W. och andra:

W. har mycket gott sinne för humor som kompenserar hans egenheter och fobier, bl.a. följande:

1. Han kan f.n. inte tala om annat än Euler-Poisson-Darboux's /

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \frac{m}{t}u_t = 0.$$

2. Han är enormt jaloux på Courant och NYU och försummar aldrig ett tillfälle till en spark.

W:s hustru är världens största satkärring, men det vet hon om. Anser sej vara förfinad och tala Oxford-engelska. Är i själva verket en slags Minakshisundaram (Beurlings

liknelse) och har en vulgär amerikanska ovan på sin tyska brytning. Inte outhärdlig om man tar henne som ett slags naturfenomen.

Martin: Administratör och mycket begränsad matematiker. Snäll i grund och botten men litet komplex betonad.

Diaz och Weinberger och Ludford: duktiga och kunniga. Mina randanmärkningar till Carleson har du nog redan fått. Kallelsen kom efter många om och men. Carlesons motivering: "Det är i alla fall mitt gamla universitet."

Beurling och marinen är en oförklarlig tidningsgroda.

Din tillgivne Lars

Kommentar till första brevet: Hörmander är gift med fru Berman. – Klippet kommer nog att intressera dej. Red top är i USA som stipendiat för att studera amerikansk humor.

Translation:

Dear Marcel. Many thanks for your letter. I do hope that mine, written about the same time, has arrived now.

Concerning accomodation quite a lot can be said. There are not many places close to the Institute. The only one is "Lord Calvert Motel" [107] , used by occasional guests who are not going to stay for a longer period. It is close to the highway (US 1) in a slope by a trafic light , which means that you can't get sleep there during the first nights. This motel you must avoid at all costs. You must consider to take a bus to the Institute. In this case you can stay

1. at Tacoma Park (a suburb of Washington; College Park is another, both in Maryland). Sometimes you can go with W.

2. in Washington at an "apartment hotel", for the rather luxurious Woochner (MacCarthy [108] has stayed there) where one pays c. 125 a month. It is nicely situated but far away from Takoma Park.

3. John Todd and Olga Taussky are both mathematicians and work at the Bureau of Standards. They are going to be in New York this spring and want to sublet their flat (130 a month). They are good friends of Weinstein and possible negotiation may be carried via him.

[107] It was demolished during my stay in College Park during my autombile trip from Palo Alto to New York, in September 1962.

[108] Without doubt Senator Joseph MacCarthy (1908-1957).

My advice is that you tell about these possibilities to Weinstein and at the same time that you refuse to stay at Lord Calvert. He will probably oppose that 2 and 3 are too far away but this can be countered by saying that you are not obliged to work at the Institute from nine to five each day like the others. (W. probably knows everything about bus connexions.)

As I already wrote to you, Åke will replace you as a guest in March.

Regarding W. and the others:

W. has a very good sense of humour, which compensates his idiosyncrazies and fobies, among them the following:

1. Right now he is unable to speak of anything else than the Euler-Poisson-Darboux equation
$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \frac{m}{t}u_t = 0.$$

2. He is enormously *jaloux* about Courant and NYU and never leaves it undone to give a kick.

W:s wife is the greatest bitch on this Earth, but this she knows. She believes that she has polished manners and that she speaks Oxford-English. In reality it is a kind of Minakshisundaram (Beurling's metaphore), and she has a vulgar American on the top of her German accent. Not unbearable if you consider her as a kind of natural phenomenon.

Martin: An administrator but a quite limited mathematician. Kind at heart but a little complexly emphasized.

Diaz and Weinberger and Ludford: able and experienced.

You have probably already received my comments to Carleson. His call [to the professorship at UU] arrived after a lot of shilly-shalluing. Carleson's motivation: "At least it is my old university."

Beurling and the navy is an unexplicable blunder of the press.

Yours sincrely Lars

Comments to the first letter: Hörmander is married to Mrs. Berman. – The press cutting will probably interest you. Red top[109] is in USA with a grant in order to study American humour.

[109]Pen name of a wellknown Swedish journalist Lennart Nyblom (1915-1994).

2.44.27 Letter to Marcel Riesz (College Park) Lund, Mar 25 1957

Käre Marcel, jag ska använda påskfriden till att undehålla dej med ett bokslut över våra affärer. Sedan Hörmander reste har naturligtvis takten i den matematiska utvecklingen gått ner något men håller sig ändå över noll. Ganelius har lyckats bevisa en Taubersats för Laplace/er som omfattar det mesta i branschen men ändå är estetiskt tilltalande. Med den har han meriterat sej att vara fakultetsopponent åt Sonja Lyttkens som disputerar om någon månad eller så. Domar skall också disputera. Frostman, Carleson och jag funderar just nu på vem som vi ska sätta först till laboraturen i Lund, Ganelius eller Sandgren[110], vilket helt beror på vägningen av pedagogiska meriter kontra vetenskapliga meriter. Vi stannar nog för de vetenskapliga efter en del piruetter. Comét söker professur vid Teknis och vid Högskolan men kommer nog inte att kompetensförklaras. Jag tycker att han har litet konstiga idéer om sig själv.

Fö regnar det manna i form av nya platser i Stockholm, professur i Göteborg, massvis med biträdande lärare och assistenter i Stockholm och Uppsala, och en åt oss. Det är det indirekta resultatet av lärarbristen. En universitetsberedning med statssekreterare Edenmalm i spetsen har satt igång upprustningen. Samarbetet med skolan breder ut sej mer och mer. Sjöstedt är invald i Nationalkommitténs pedagogiska avdelning. Läroböckerna i skolan skall revideras. Åke har charmat till sej pengar av Edenmalm till kurser för lärare.

Acta har infört stramare bedömning av manus vilket tills vidare bara lett till manuskriptbrist.

Hyltén-Cavallius och Sandgren jobbar på sin ettbetygsbok som blir färdig till hösten. Den har varit på remiss till en massa personer och är baserad på utomordentligt grundliga studier av genomsnittstudentens matematiska matsmältningsbesvär.

Torsten Gustafson klagade för ett år sedan att vi inte lärde ut något som kan användas i kvantmekaniken. Nu har vi i alla fall gjort det. Jag har hektograferat 140 laddade sidor om kvantmekanikens matematiska bakgrund som ska säljas för 12 kronor. Behållningen, om det blir någon, går till en svart representationsfond. Om en vecka skall jag till Nancy på en konferens om partiella differential/er. Jag ska tala om hyperboliska differential/er med variabla /er, ungefär det som jag talade med dej om i höstas, men i bätre form. Hela teorin är reducerad till två olikheter. Friedrichs-Lewys olihet och en dual olikhet. Från Ryssland har jag fått en del särtryck med antydan om en konferens där i sommar. I Chicago har de blivit så imponerade av Hörmander att de bjudit mej dit januari-juli 1957. Weinstein har varit här utan Manka. F.ö. inga gäster.

Herlestam har äntligen blivit fil.kand. sedan han lagt kemin på hyllan. Vi har fått två utmärkta elever, Roos och Peetre, som tar fil.lic. i vår med fyra betyg i matematik efter

[110]Lennart Sandgren (b. 1926), mathematician, studies at LU under Riesz, fil. dr. 1954 [148], taught at schools in Malmö and Jönköping, later in civil service.

två års studier.

Alla, hälsar, särskilt Åke och Eva,

Din tillgivne

Lars Gårding

Translation:

Dear Marcel, I shall use the Easter serenity to entertain you with a balancing of our business. After Hörmander's departure the speed of the mathematiccal development has, of course, gone down but keeps it still above zero. Ganelius has managed to prove a Tauberian theorem for the Laplace transform which comprises most in the branch, but is still aesthetically appealing. With it he has qualified himself to be the Faculty opponent for Sonja Lyttkens[111], who is going to defend her Ph.D. thesis in a month or so. Domar[112] is also going to defend his. Frostman, Carleson and I are right now pondering whom we shall set first for the laboratorship in Lund, Ganelius or Sandgren , which depends entirely on the weight of the pedagogical qualifications contra the scientific ones. Probably we are going to stay, after some pirouetts, at the scientific side. Comét is applying professorships at KTH, and at SH, but will probably not be declaired qualified. I find that he has somewhat strange ideas about himself.

Besides, it is raining manna in the form of new positions in Stockholm, a professorship in Göteborg, lots of assistant professors and assistants in Stockholm and in Uppsala, and one to us. This is the indirect resultat of the shortage of teachers. A university drafting commitee headed by State Secretary Edenman has started the inprovetment. Cooperation with school is spreading more and more. Sjöstedt[113] has been elected to the Pedagogical Division of the National Committee [of Mathematics] . The texbooks in school are going to be revised. Åke has charmed money from Edenmalm for courses for teachers.

Acta has introduced stricter rules for the evaluation of manuscripts which so far only has led to a shortage of manuscripts.

Hyltén-Cavallius and Sandgren are working on their text-book [in Analysis], which will be ready in the fall. It has been sent for consideration to a lot of persons and is

[111]Born 1919, studied at UU under Beurling an Carleson

[112]Yngve Domar mathematician Also interested in the history of mathematics.

[113]Carl-Erik Sjöstedt (1900-1979), mathematician and educator of mathematics, registered at UU 1919, fil.dr. 1930 [**?**], was appointed "undervisningsråd" (head of a subdivisiom at the Swedish Board of Education [116]) in 1940. Translated the Elementa of Euclide to the artificial language Ido [151]; this is a modified form of Esperanto [88].

based on extraordinary throrough studies of the mathematical indigestion of the average student.[114]

Torsten Gustafson complained a year ago that we did note teach anything that can be used in Quantum Mechanics. Now we have done it after all. I have hectographed 140 charged pages on "The Mathematical Background of Quantum Mechanics", which will be sold 12 Crowns a piece. The profits, if there will be any, will go to a clandestine fund for entertainment. In one week's time, I shall go to Nancy for a meeting on partial differential equations. I shall talk about hyperbolic differential equations with variable /s, roughly that what I told you last fall, but in a better form. The whole theory is reduced to two inequalities, Friedrichs-Lewy's inequality and a dual inequality. From Russia, I got some preprints with hint about a conference there in the summer. In Chicago they have become so impressed by Hörmander that they have invited me there in the period January-July 1957. Weinstein has been here without Manka. Otherwise no guests.

Herlestam [115] has finally got his Master of Arts degree, after having put Chemistry on the shelf. We have got two excellent students, Roos and Peetre, who will take the Master of Arts this spring with four points in mathematics after two years of study,´

All send greetings, / Åke and Eva,

Yours faithfully, Lars Gårding.

2.44.28 Letter from Princeton Mar 5, 1960

Tack för det innehållsrika brevet. Det ska bli roligt att höra mer om de karaktäristiska ytorna. Vi har fått och förvaltar omsorgsfullt de 150. Kaffe skall vi skicka i morgon. I dag är det söndag och den första vilodagen på mycket länge. Jag har varit fullständigt absorberad av det som står i den not som följer med detta brev.[48]. Jag sände den till Hadamard i går tillsammans med svar på en del frågor som han hade i samband med hyperboliska /er. Hela historien började, då jag av nyfikenhet läste ett nyutkommet arbete av en ryss (I.M. Višik) och jag insåg att jag kunde utnyttja mina kunskaper om elementarlösningar till en elliptisk /. Förutom det som står i noten har jag gjort följande (noten anses vara bekant och samma beteckningar används). Låt $f \in \mathcal{H}$ och sätt

$$\mathcal{P}f(x) = \int_S \mathcal{P}(x-y)f(y)dy.$$

[114]The book of Hyltén-Cavallius and Sandgren is undoubtedly the best analysis book written in Sweden. Unfortunately, the level of the students dropped, already long ago, so low that it, regretfully, cannot be used anymore.

[115]Tore Herlestam (19xy-19zw), mathematician, professor LU.

Eftersom $|\mathcal{P}f|_{n_1} < \infty$ så finns ett element $Gf \in \mathcal{H}$ så att $(\mathcal{P}f, f') = (Gf, f')$ för alla $f \in \mathcal{H}$. Man finner att $f \to Gf$ är en självadjungerad, totalkontinuerlig och positiv lineär / och att

$$Gf(x) = \int_S G(x,y)f(y)dy$$

där $G(x,y)$ är Greens funktion för området S. /en har enligt F. Riesz ett punktspektrum som hopar sig mot 0. Antag att egenvärden och egenfunktioner är $\frac{1}{lamda_k}$ och $\phi_k \in \mathcal{H}$ resp. $(k = 1, 2, \dots)$. Genom att lära mig Carlemans metod att beräkna den asymptotiska fördelningen av egenvärden och tillämpa den har jag funnit att om $N(t)$ är antalet egenvärden $\leq t$ så är

$$N(t) \sim \frac{{}_{\mathcal{P}}S}{(2\pi)^n n} t^{\frac{n}{2m}} \tag{2.3}$$

där $S = \int_S dx$ och ${}_{\mathcal{P}}$ är ytan av $\mathcal{P}(\xi) = 1$. Sanningen är emellertid att jag kan bevisa denna formel då $2m > n$ men har gott hopp att klara det allmänna fallet. Jag använder samma Tauberteorem som Pleijel, men klarar mig utan variationskalkyl, vilket gör att jag generaliserar Carleman snarare än Pleijel. Jag gör mig inga illusioner om betydelsen av det som står i noten eller av (2.3) men det var en överraskning att det hela gick så lätt. – Goursats problem har fått vila sedan jag i slutet av januari sände manuskriptet till Trondheim. Jag kan inte göra något snyggt utan att ha något slags generaliserade randvärden, som antas i medeltal på ett eller annat sätt. Charney och jag träffas då och då men talar inte matematik (de kan lösa alla /er själva) och hans fru håller på att lära Eva matematisk logik. Hon är elev av Reichenbach (University of California) och har för sej att sprk kan analyseras genom att undersöka de logiska scheman språket använder. Eva bidrar med språken och hon med logiken. – Institutet är nästan oförändrat sedan i höstas. Pauli är fortfarande här och man ser honom ofta på hans promenader. Einstein har hållit tre föredrag om sina senaste teorier som ingen tycks tro på. På grund av journalistfaran annonseras inte föredragen i förväg. – För ett par veckor sedan åkte Eva och jag till Syracuse och höll ett föredrag (50 $). Vi blev hjärtligt mottagna och hade mycket trevligt. Rosenblum var blekare om kinderna än vanligt och hade förlorat litet av sin sorglösa jovialitet, troligen efter han har haft personliga bekymmer. På hemvägen besökte vi Cornell (som inte betalade något), träffade Elfving och låg över hos Agnew, som hälsade mycket hjärtligt till dej. Han höll mig sysselsatt med sin biografi till halvtvå på natten. Feller hälsade. Vi åt på fakultetsklubben och hade mycket tråkigt eftersom hela församlingen diskuterade ett idiotiskt problem utan att kunna lösa det. – En trevare som jag skickade till Lagerström i Pasadena blev resultatlös. Jag ville arbeta där (som Pleijel gjorde) men han ville inte ha mej.

Lars

Hälsningar Eva

Translation:

Thank you for your substantial letter. It will be nice to hear more about the characteristic surfaces. We have got and administer carrfully the 150. We shall send the coffee tomorrow. Today is Sunday and the first day off for a very long time. I have been completely absorbed by what is in the note accompaning this letter.[48] I sent it to Hadamard yesterday together with a reply to some question that he had in connection with hyperbolic equations. The whole story began when I out of curiosity red a recent paper by a Russian (I.M. Višik)[116] and I realized that I could use my knowledge of elementary solutions of an elliptic equation. Besides what is in the note I have done the following (the note is assumed to be known and the same notation is used). Let $f \in \mathcal{H}$ and set

$$\mathcal{P}f(x) = \int_S \mathcal{P}(x-y)f(y)dy.$$

As $|\mathcal{P}f|_{n_1} < \infty$ there exists an element $Gf \in \mathcal{H}$ such that $(\mathcal{P}f, f') = (Gf, f')$ for all $f \in \mathcal{H}$. One finds that $f \mapsto Gf$ is an self-adjoint, totally continuous and positive linear / and that

$$Gf(x) = \int_S G(x,y)f(y)dy$$

where $G(x,y)$ is Green's function for the / S. The / has according to F. Riesz a point spectrum which accumulates to 0. Assume that the eigenvalues and eigenfunctions are $\dfrac{1}{lamda_k}$ and $\phi_k \in \mathcal{H}$ /ly $(k = 1, 2, \dots)$. By learning Carleman's method for computing the asymptotic / the eigen-values and apply it, I have found that if $N(t)$ is the number of eigen-values $\leq t$ then

$$N(t) \sim \frac{\mathcal{P}S}{(2\pi)^n n} t^{\frac{n}{2m}} \tag{2.4}$$

where $S = \int_S dx$ and $\mathcal{P}$ is the area of $\mathcal{P}(\xi) = 1$. The truth is, however, that I can prove this formula when $2m > n$, but I have good hopes to settle the general case. I use the same Tauberian theorem as Pleijel, but I can get along without variational calculus, which means that I am generalizing Carleman rather than Pleijel. I have no illusions about the importance of what is in the note or of (2.4) but it was a surprise that it went so smoothly. – Goursat's problem has been resting since I sent the manuscript to Trondheim at the end

[116] I. M. Višik, Polish born mathematician, emigrated to the Soviet Union during the war.

of January. I cannot do anything nice without invoking some kind of generalized boundary values, which are assumed in the mean in one way or other. Charney[117] and I meet now and then but we do not talk mathematics (they can solve all equations by themselves) and whose wife is teaching Eva mathematical logic. She is a disciple of Reichenbach[118] and thinks that one can analyze languages by investigating the logical schemes the language use. Eva contributes with the languages and she with logic. – The Institute is almost unchanged since last fall. Pauli is still here and one often sees him on his walks. Einstein has given three lectures on his latest theories that nobody seems to believe in. Because of fear of journalist the talks are not annonouced in advance. – A few weeks ago Eva and me went to Syracuse and I gave a talk (50 $). We were heartily received and hade a nice time. Rosenblum was more pale in his chins than usual and had lost some of his unconcerned joviality, likelu after having had a personal sorrow.[119] On our way back we visited Cornell (where they did not pay anything), met Elfving and stayed over night with Agnew , who sends very hearty regards to you. He kept me awake with his biography till half two in the night. Feller sends greetings. We ate at the Faculty Clubb and were rather board because the whole congragation was discussing an idiotic problem without being able to solve it. – A feeler that I sent to Lagerström in Pasadena was fruitless. I wanted to work there (as Pleijel did) but he did note want to have me.

Yours faithfully Lars
Greetings Eva

2.45 Gårding and Arne Beurling

2.45.1 Cable Princeton Nov 15 195?

S3692

PRINCETON NJER 47W 15/11 1200P EST VIA SVERIGERADIO
LT
PROFESSOR MARCEL RIESZ KAEVLINGEVAEGEN 1 LUND
TILL MARCEL N-AARIG STOP ENKEL GYOER STOCKHOLM-LUND

[117] J.G. Charney was a well-known meteorologist.

[118] Hans Reichenbach (1891-1953), German philosopher, professor at Berlin 1926-33, at Istanbul 1933-38 and at University of California Los Angeles from 1938. R. was in tight contact with the Wien circle but emigrerated to USA in connection with the "Anschluss" of Austria in 1938. According to R., all knowledge rests on probabilistic reasonening. He treated fundamental notion like space and time in /s, including relativity and quantum /s, and was also interested in probabilistic problems. [114].

[119] *L.G.* His son had gone away from him.

MITTAGLEFFLERS KUL 1 ALFA INTERPOLATION ENHETSCIRKELN MOMENT

KONVEX KONJUGERAD ALFA ELLIPTISK HYPERBOLISK VANDRINGSAAR

LITEN FIN MAENISKA STARK I DRYCKJOM

GALOSCHER I SNOEN SALT BLAND LIKAR

STOP ARNE OCH TRE LARS OENSKAR ALLT GOTT

Gårding [in Riesz's hand?]

2.46 Mrs. Amalia son Helmuth Gyllenswärd

Paris

2.46.1 Letter from Amalia Djursholm 1 Jan 1920

Bäste Docent Riesz!

Docenten blir förvånad att få brev från mig. Men det är angående vår herr Helmuth som nu ändtligen är på bättringen, och som jag vet att Docenten är snäll och intresserar sig för, som jag vill skriva dessa rader och – Jag försökte i går få tag på Docenten, för att bjudha på en liten middag här tillsammans med några vänner, men som det icke lyckades hoppas jag få nöjet se Docenten här vid återkomsten. – Angående Helmuth, som ännu är på Sofiahemmet, där han skall vara till efter trettondet, så lottsas han ju fast det går bettre framåt, och alla intressen börja nu åter vakna litet hos honom, och sedan har varit på ett annat vilohem en tid, så blir det frågan om hans studier igen. Det har hela tiden varit meningen att han skulle taga sin Kandidat i Sverige, men nu tror jag att Doktorn och Helmuth har litet planer på, att han skall studera utomlands. England tror jag det lutar åt, och man låter Doktorn helt avgöra saken, men vilja de ingenting avgöra, förr än de rådgjort med Docenten om saken. – Nu skriver jag detta för att litet förbereda Docenten derpå; ty Helmuth med sjukshjöterskans jälp, ännu just tillskriver Docenten derom. – Till Docenten vill jag nu säga vad jag tycker angående denna så viktiga fråga, då jag anser att Docenten hela tiden varit oss till så stor nytta och jälp vis à vis Helmuth i bedömandet av såväl hans karakter, hälsa som studier. Jag tycker att han först skall taga

[120]Mrs. Amalia Gyllenswärd was born Piper in 1867 (her first name was also written Amelie) and died in 1958. Her son was Gustaf Adolf Helmuth G. (1898-1950, spellt his family name with a "v", not "w"). He was registered at SH in 1918 and at LU in 1921, fil.kand. 1921. He studied at Triniy College Cambridge 1921-1924 and was a research student there in 1925. Helmuth was in the service of Standard Oil Company New York 1925, Tunis 1927, Paris 1927. In 1940, he was the sales manager at an advertising company in Stockholm. [3].

sin examen i Sverige, gerne i Uppsala och han icke vill fortsätta i Stockholm, och tycker att det är svårt med resorna hemifrån. Doktorn yrkar på att han skall komma i helt lugna förhållanden. Sedan kan han ju fortsätta utomlands. – Tycker Docenten icke som jag att det är normalast och naturligast att fullfölja det man börjat med, i synnerhet då Helmuth har benägenhet för att vara ombytlig, och även för hans hälsa, då han är nog länge blir rätt svag, är det olämpligt, att sända ut honom till England, där det är kallt och otidsengligt i boningsrummen på universiteten, flere har jag hört som kommit hem nu, som sagt att det var kallt och otäckt där. – Förlåt snälle Docenten. att jag besvärar Docenten med allt detta, men var jag så tacksam för Docentens goda råd och jälp, och mer än glad bleve jag om Docenten tyckte som jag. Det vore bra om Docenten ville muntligen dryfta frågan med min man vid Docentens hemkomst, och som sagd glad bleve jag om vi äro av samma åsigt, då de herrarne att rette sig efter vad Docenten tycker är klokast. Men beder jag Docenten vare så godt och icke närmna med ett ord om att jag talat med Docenten om detta för Helmuth så viktiga steg. – Det vore nog bäst om Docenten icke svarade mig på detta brev, så få vi muntligen tales vid i stället; men Helmuth vore nog tacksam för ett litet svar. – Ett godt nytt år, och all glädje och trevnad på det hjärtligaste av Docentens tillgivne

Annelei Gyllensvärd

Translation:

Dear Docent Riesz, You will probably be surprised, Mr. Docent, to recieve this letter from me. But it is concerning our Helmuth. whose health now finaly seems to become better, and of whom I know that you, Mr. Docent is so kind to and takes an interest in, that I want to write these lines about and – yesterday I tried to get hold of you, Docent, in order to invite you to a little supper here together with some friends, but I failed, so I do hope that I will have the pleasure to see you here upon my return. – Regarding Helmuth, who still is at the "Sophiahemmet"[121], where he is going to be until after Epiphany, this he pretends but it advances, and all interests begin now to wake up again in him, so after having been at another resthome for some time, he will return to his studies again. All the time, the idea has been that he will pass his Candidate exam in Sweden, but now I believe that the Doctor and Helmuth have little plans for him studying abroad. England, I believe, it is inclined to, and one lets the Doctor to decide the matter, but first they want to have your opinion about it, Docent. – Now I write this in order to prepare you, Docent with it; because Helmuth, with the help of the nurse, is right now still writing to you,

[121] "Sophiahemmet" (Sophia Home), hospital and school for nurses in Stockholm, founded in 1889 by Queen Sophia (1836-1913), who was married to King Oscar II and a daugther of Duke Vilhelm I of Nassau and Pauline of Würtemberg [114], [172].

Mr. Docent, about this. – To you, Docent I wish now to say what I think regarding this so important issue, as I am of the opinion that you, Docent always have been of so great use to us and help vis à vis Helmuth in the judgement of his character, health as well as studies. I think that he should first take his exam in Sweden, readily in Uppsala and he does not want to continue in Stockholm, and think that it is difficult with the travel from home. The Doctor requires him to come to completely quite conditions. Later he may, of course, continue abroad. – you think , Docent like me that it would be more normal and natural to pursue with which one has started, especially as Helmuth has the inclination to changes his mind easily, and also because of his health, because he is likely to be quite weak for some time, is it not so suitable to send him to England, where it is cold and old-fashioned in the living-rooms at the universities, I have heard from several persons who have come home now, who have told that it was chnillly and unpleasant there. – Excuse me, my Dear Docent, that I have troubled you with all this, but I have been so grateful to you for your precious good advice and help, and I would be even more glad if you Mr. Docent thought like me. I would be nice if you, Docent could orally discuss the question with my husband upon your return, and as I told you, I would be glad if I would be of the same opinion, as the gentlemen find it wise to comply to what you Mr. Docent thinks is best. But I ask you, Docent not to mention a word that I have spoken to you about this so important step for Helmuth. – It would probably be best if you, Docent did not reply to this letter, then we have to talk orally instead; but probably Helmuth would enjoy a little answer. – Happy New Year, and most cordially all pleasure and well-being

Yours faithfully, Annelei Gyllensvärd.

2.47 Postcard from Helmuth Östersund Jul 14 1913

Nu får Doktorn ångra sig. Här är förtjusande, strålande himmel och fjällen aftecknar sig inbjudande mot horisonten – allt dock ofvan molnen, som tyvärr döljer utsikten medan rägnet silar ned. Min ????? är god.t Hälsningar från oss båda.

P. S. ? Helmuth

Translation:

Åre will make you, Doctor change your mind. Here it is delightful brilliant sky och the fjelds stand out invitingly against the horizon –all, however above the clouds, which, regretfully conceal the view, while rain is pouring down. My ????? is good. Greetings from us both

P. sen Helmuth.

2.48 Letter Grand Hotel Åre Aug 1 1919

Bäste Docenten,

Nu har vi slutat vår behandling och vila ut här efter alla strapatser. Allt har gått över förväntan. Vädret har varit strålande hela tiden och inga yttre missöden ha förekommit, jag skall ej berätta så mycket om färden utan vänta tills vi komma hem då vi ju efter överenskommelse ska samlas och exponera innehållet i våra dagböcker. Docenten hade nog ej kunnat vara med vågar jag säga ty Sellström är en skicklig vandrare.

Med Fahlbecks är ej säkert ännu och om det blir av så kommer de nog ej förr än omkring den 20 aug. och det kanske är för sent för sent för Docenten, dock icke för sent för mig ty jag har tänkt stanna hela aug. häruppe. Jag är nämligen bjuden av Dir. Sellströms släktingar i Mörsil att stanna kvar hos dem tills Fahlbecks komma och om det inte blir av med dem är jag i Mörsil hela aug. Min adress är

Eliasson
Åggen Mörsil

Nu tycker jag däremot att Docenten i stället skulle vända sina planer mot Åre. Jag kan rekommendera det på det *allra* bästa. En härlig luft, vacker utsigt över en lång fjälldal med en stor sjö. Hotellen ligga alla på en fjällsluttning och omgivna av höga toppar och så har man Åreskutan att stövla upp på om man vill. Billigt är här i *hel* inackorderig 14 kr om dagen (inber. *allt*). Både S. och jag tror att Docenten skulle trivas bra här. Nu reser jag och S. tillbaka till Mörsil, som ligger en timmas resa från Åre och om Docenten reflekterar på saken så vore jag tacksam om ett kort hit så jag kunna ställa om rum. Om Docenten reser dit kan jag titta över även, ifall Docenten vill ha sällskap. Annars har jag hört efter andra ställen här uppe men de äro i min smak ej trevliga.

Hoppas Docenten har det skönt på Dalarö och njuter av sommaren. Vi gör långa promenader i skogarna här och på fjällen och litet emellan läser i Poussin och Lindelöf. Man är här alldeles ostörd av de andra gästerna om man vill. Jag sänder ett kort för att visa hur det ser ut.

Nu hoppas jag att Docentens planer på eftersommaren ska lyckas hur det nu blir. Sällströms hälsar så mycket.

Docentens tillgivne Helmuth Gyllensvärd

Translation:

Dear Docent,

Now we have vi finished our treatment and are resting here after all hardships. All has gone beyond expectation. Weather has been sunny all time and no exterior mishaps have occurred. I shall not tell so much about the trip but wait until we come home, as

we have agreed to assemble and expose the content of our diaries. You, Docent would not been present, I dare say, because Sellström is a skilled hiker.

S is probably still with the Fahlbecks[122] and, if it will work, they will come only around August 20 and this is perhaps too late for you, Docent, however, not too late for me, as I intend to stay up here the whole of August. For I am invited by relatives of Director Sellström in Mörsil[123] to stay with them until the Fahlbecks come, and if this won't work I will be in Mörsil the whole of August. My address is

Eliasson
Åggen Mörsil

/, if think that you, Docent should instead turn your plans towards Åre. I can recommend it in the very best way. Excellent air, a beautiful view of a long mountain valley with a big lake. The hotels are all situated on a hillside and surrounded by high peaks, and furthermore one has the "Åreskutan" (a mountain) to stroll up to if one wishes. It is cheap here with board and lodging 14 Crowns a day, everything included.

Both S. and I think that you, Docent are going to be happy here. Now I and S. will go back to Mörsil, which is situated one hour's travel from Åre and if you consider the case I would gratefual to receive a card here so that I could make a reservation. If you go there Docent, I could drop in, if you want company. Otherwise, I have made inquiries about other places here but to my taste they are not so pleasant.

I hope that you, Docent have a pleasant stay at Dalarö och enjoy the summer. We take long walks in the forrests here and on the fjelds and now and then we have a look into Poussin and Lindelöf. One is completelty undisturbed here by the other guests, if one wishes. I am sending a card in order to show what it is like.

Now I hope that your plans, Docent, for the late summer will suceed, how it now will be. The Sällströms send their regards.

Yours faithfully, Helmuth Gyllensvärd

2.48.1 Letter from Helmuth 4 Jan 1920

Sofiahemmet Stockholm

Bästa Docent Riesz.

Eftersom min sjukdom kullkastat våra planer från i somras får jag skriva några rader till Docenten för att ånyo be om några råd om min framtid. Jag är nämligen nu så pass återställd att jag måste tänka på att börja arbeta den närmast tiden. Dr. Fröderström

[122]Pontus Fahlbeck (1850-1923), political scientist and politician, studies at LU since 1870, fil.dr. and docent in history 1880, later professor. [172].
[123]Settlement in Åre community (population 674 in 2005). [172]

som sköter mig har på det bestämdaste ordinerat att jag måste alldeles komma bort från det "gamla" och i en ny miljö och därför bestämt att jag skall resa till England och *om inget hinder möter där* fortsätta mina studier efter någon tids vila därute.

Vi hade först tänkt på Tyskland eller Schweiz men dr. Fröderström vill ej ta resan dit på sitt ansvar, emedan han är rädd för oroligheter. Han har ordinerat fullständigt lugn under de närmaste månaderna. Den mycket svåra operationen har nämligen trasslat till nerverna.

Min far har fullständigt förtroende för dr Fröderström vilket jag i förbigående nämner emedan Docenten vet att han förut varit mycket avogt stämd mot allt vad läkare heter.

Vad säger nu Docenten om allt detta?! – Får jag först göra några frågor. Anser Docenten att jag kan sköta mina matematiska studier i England? eller utomlands? Dr. Fröderström, min far och jag är nämligen överens att jag ovillkorligen skall fullborda min examen och sedan fortsätta i matematik. – Vad språk beträffar vill jag säga att Engelska och Tyska behärskar jag något så när däremot ej alls Franska. Vill Docenten säga mig vilket land är bäst för matematiska studier? Min Mamma ville helst att jag skall resa till Frankrike emedan hon tycker att klimatet i England är icke lämpat för en konvalescent. – Vilket universitet i England anser Docenten vara det lämpligaste? Dr. Fröderström har föreslagit Oxford eller Cambridge men han vill *ovillkorligen* först höra Docentens mening och han hälsar Docenten genom mig och säger att utan att fått Docentens råd i detta fall kunna vi *icke* företaga oss något! Det vore ju roligt att få komma till Cambridge eftersom jag känner till *prof* Hardy. Hur är det med examensförhållanden i utlandet jämfört med dem här? Som Docenten vet har jag ju ej så långt kvar i kandidatexamen. Kan och bör jag avsluta den utomlands eller efter studier därute komma hit och tentera färdigt?? *Jag vill under inga omständigheter förlora kontakten med Docenten!*

Vore mycket tacksam om Docenten ville snarast möjligt giva svar på mina frågor emedan det skall vara bestämt då dr. Fröderström återkomma efter 13 dagshelgen.

Som sagt vad, allt angående min framtid beror på vad Docenten råder till!

En God fortsättning på det Nya året.

Docentens tillgivne Helmuth

Translation:

Dear Docent Riesz, Because my sickness has scattered our plans, made up this summer. I must write now a few lines to you, Docent, in order to anew ask about some advice about my future. Namely, I have now recovered that much that I have must to begin to work in the near future. Dr Fröderström, who is nursing me, has strongly prescribed that I must get completely away from the "old", and go to a new environment, and has therefore

decided that I must go to England and, if no obstacle meets there, continue my studies after having rested some time out there.

We had first thought of Germany or Switzerland, but dr Fröderström does not take on him the responsibility of a journey there, because he is afraid of disturbances. To me, he has prescribed complete calm during the next months. For the very difficult surgery has put my nerves in disorder.

My father has complete trust in dr Fröderström, which I mention in passing, because, as you Docent know, that he has earlier had a negative attitude towards all doctors.

What do you say now, Docent, about all this?! – Am I allowed to first make some questions? Are you of the opinion that I can manage my mathematical studies in England? or abroad? Dr Fröderström, my father and I are indeed in agreement that I necesarily must accomplish my exam and then continue in mathematics. – Regarding language, I must say that I master quite well English and German but not at all French. Can you tell me, Docent, in which country is it best for mathematical studies? My mother wanted me to go to France, because she thinks that the climate in England is not suitable for a convalescent. – Which university in England, do yo think, Mr. Docent might be the most suitable? Dr Fröderström has suggested Oxford or Cambridge but he wants *absolutely* first to hear your opinon, Mr. Docent, and he sends regards to you through me saying that without having got your advice Docent, in this case we may not take any moves! Of course, it would be nice to come to Cambridge, as I know of *Prof.* Hardy. How is it with examination conditions abroad, compared to those here? As you know, Docent I have not so much left in the candidate exam. Can I, and should I finish it abroad, or should I come back here after studied there and complete the examination?? *Under no condition do I want to lose my contact with you, Docent!*

I would be very grateful to you Docent, if you could reply as soon as possible to my questions, because this must be decided when dr Fröderström returns after Epiphany.

To sum it up, my entire future depends on what advice you give me, Docent! A Happy New Year.

Yours faithfully, Helmuth,

2.48.2 Card, forwarded to Karzinzy St 20, Györ, Hungary, Bydalen Jul 23 1922

Bäste Docenten. – Jag är på en fjälltur i Norge med en vän and kom hit i går. Träffade Cramér här i dag och ha vi haft en trevlig dag tillsamans. Han omtalade att Docenten nu blivit svensk undersåte – jag gratulerar! – Jag vilar nu efter en arbetsam tid i Trinity. Hoppas jag får träffa Docenten i höst – antagligen återtar jag mina studier vid Högskolan i september. De hjärtligaste hälsningar från

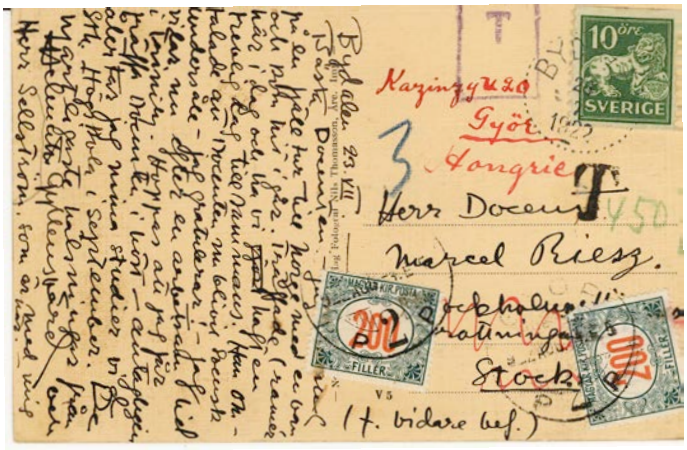


Figure 2.29: Facsimile of Card

Helmuth Gyllenswärd och Herrr Sellström, som är med mig här.

Translation:

Best Docent. – I am on mountain walk in Norway with a friend and came here last night. I met Cramér here today, and we had a plesant day together. He tolde that you, Docent now are a Swedish citizen – I congratulate you! – I rest now after a laborius time at Trinity. Hope to meet you, Docent in the fall – probably I will resume my studiers at SH in September. The heartiest greatings from

Yours faithfully, Helmuth Gyllenswärd and Mister Sellström, who is witj me here.

2.48.3 Card Dec 30 1926

Queen Anns Mansions
St. James Park.
London. 30.XII

Bästa Docenten.

I och med jag får önska ett Gott Nytt År får jag även sända ett "Lycka till" i fråga om Lunda-professuren. Vår familj har nu julat här och reser nu till Paris. Den Engelska julen skiljer sig ej så mycket från den Svenska – julgran var lätt att anskaffa.

Hoppas Docenten har en angenäm ferie och att hälsan är god.

De bästa hälsningar från tillgivne

Helmuth

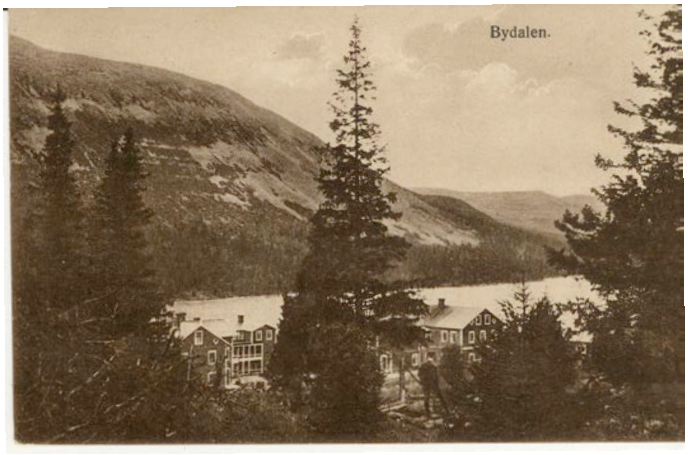


Figure 2.30: View of Bydalen

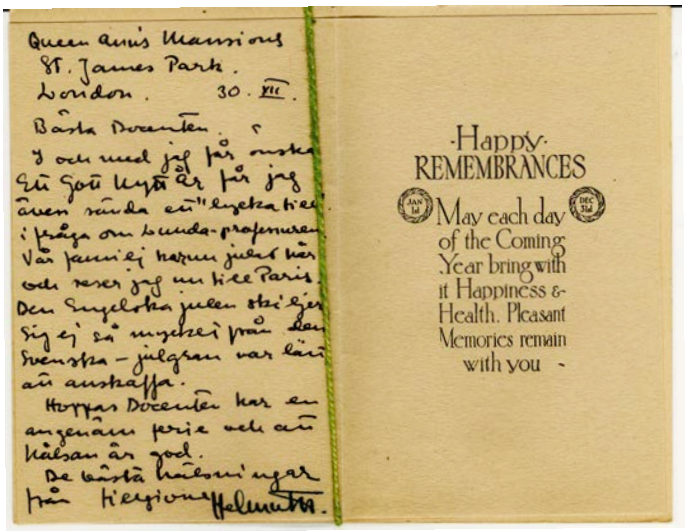


Figure 2.31: Facsimile of card

Translation:

Dear Docent,

Wishing you a Happy New Year, I also congratulate you to the professorship at Lund. Our family has now celebraeted Christmas here and is now leaving for Paris. . English Christmad does not differ very much from the Swedish one – there were no difficulties to find a Christmas tree.

I hope that you, Docent have a pleasant holiday and that your health is good.
My best greetings,

Yours faithfully Helmuth,



[!b]

Figure 2.32: Facsimile of card

2.49 Johannes Hagne

2.49.1 Application to Examination

Avskrift. Prof. M. Riesz, Lund

Vördsamt anhållan att få undgå skriftligt prov för A i fil. ämbetsexamen den 21 ds.

Johannes Hagne
fil. mag.

[124]Johannes Hagne (1888-1956), mathematician, registered at UU 1909, fil.mag. 1912, fil.lic. [62] (judging from its title, the thesis could, in principle, be a topic suggested by Riesz). Worked as a school teacher in a variety of places in Sweden.

Att Herr filosofie magister Johannes Hagn GBg. under tiden från och med höstterminen 1913 till och med vårtermnen 1916 vid härvidvarande universitet idkat licentiatstudier i matematik och därvid åhörde dels af undertecknad och professor Holmgren hållna föreläsningar inom högre algebrans och funktionsteoriens områden dels under läsåret 1915-1916 deltog i de af undertecknad ledda öfvningarna i Matematiska seminariets högre afdelning, intygas härmed

Uppsala den 19 maj 1917.
A. Wiman
Professor i matematik

Translation:

Copy.

It is certified that Master Johannes Hagne, of the nation of Göteborg, in the time interval from fall term 1913 including spring term 1916 carried out studies in mathematics at this University and in this connexion, partly listened to lectures given by me, the undersigned, and p Professor Holmgren in the / of higher algebra and function theory and partly during the academic year 1915-1916 took part in the higher division in the Mathematical Seminar led by me, the undersigned, is hereby certified.

Uppsala 19 May 1917.
A. Wiman
Professor of Mathematics

2.50 Stig Hammar

2.50.1 Letter 13 Sept 1947

Kungl. socialdepartementet Stockholm 13/9. 1947

Bäste Svärfar!

Översänder härmed kopia av den skrivelse, som jag under grdagen tillställt utlänningskommisionen, där man lovat hlla mig underrättad om ärendets gng.

Angende Sebők har jag varit i kontakt med arbetsmarkndaskommisionens utlänningsavdelning och uppgivit Dig som referens. Sedan man skaffat fram ansökningen frn Budapest, blir jag underrättad och fr / tillfälle att lämna närmare upplysningar.

[125]Stig Hammar (1916-1994) had a high administrative position at LU. He married Marcel Riesz's daughter Margit, but they separated. [Later Margit married Åke Pleijel.]

Tillsvidare har jag endast förhört mig om de allmänna möjligheterna för utländska ingenjörer och arkitekter (Pusgis man) att erhlla anställning här. Enligt uppgift har kommisionen svrt att f. n. placera dem, / företagarna hellre tar en svensk ingenjör med lägre teknisk examen än en kvalificerad utlänning. Beträffande arkitekterna inverkar även den reducerade byggnadsverksamheten.

Med tack för senast och mnga hälsningar frn familjen

tillgivne Stig

Translation:

Royal Social Departement Stockholm 13/9. 1947

Dear Father in Law,

I send you hereby a copy of the letter that I sent yesterday to the Alien Commision, where they have promised to keep me informed about the further development of the errand.

Regarding Sebök, I have been in contact with the "arbetsmarkndaskommisionens utlänningsavdelning" (Alien Division of the Labour-Market Commision) and given them you as a reference. After they have got the application from Budapest, I shall be informed and I shall then have the possbility to hand in further information.

So far, I have only informed myself about the general possbilities for alien engineers and architects (Pusgi's husband) to obtain employments here. According to what I have been told, the Commision has presently difficulties to place them because the employers prefer a Swedish engineer with a lower technical exam rather than a qualified foreigner. As concerns architects even reduced bulding activities have an influence.

We had a nice time. Many regards from my family,

sincerely yours Stig.

2.50.2 Letter Jönköping Jan 13 1917

Till Herr Docenten vid SH Dr Ryesz.

Som Doktorn torde påminna sig hade jag det nöjet att före jul sammanträffa med Eder hos min svåger professor v. Koch vid Djursholm.

Nu efter jul har jag å pensionat Persborg i Rättvik träffat en landsman till Eder, nämligen svenske konsuln i Buda-Pest dr v. Bayer-Krucsay. Då jag för honom omnämnde vårt sammanträffande bad han mig förmedla en förbindelse mellan honom och Eder, eftersom han, vilken i egenkap av krigsfånge ej kan besöka sitt fädernesland, men på hedersord fått rätt att vistas i Sverige, gärna skulle vilja träffa sin landsman då han inom kort ämnar

sig till Stockholm. Jag tager mig därför den friheten att härmed översända hans visitkort med adress skriven å baksidan för den händelse Ni vill tillmötesgå hans önskan.

Med utmärkt högaktning
Sigrid Å. Hammarskiöld

Translation:

As you probably remember, Doctor, I had the pleasure to encounter you before Christmas at the house of my brother-in-law Professor v. Koch in Djursholm.

Now after Christmas, I did meet, at the boarding house Persborg at Rättvik, a fellow contryman of yours, namely the Swedish Consil in Buda-Pest Dr v. Bayer-Krucsay. When I had mentioned to him our encounter, he asked to establish a meeting between him and you, because he, in the capacity of a prisoner of war, cannot visit his native contry, but is allowed, on parole, to stay in Sweden, would like to meet his compatriot as he will shortly visit Stockholm. I hereby take the liberty to forward his card with his adress written on the back, in case you would like to oblige his wish.

Yours faithfully
Sigrid Å. Hammarskiöld

2.51 Einar Hille

2.51.1 Postcard with view over "Storlien, Lilla brudslöjan", Jan 1, 1917

Stockhom 1/1 1917

Broder!

Ber att få önska Dig en god fortsättning p det nya året. Har försökt f/ tag i Dig per tel., men förgäves. Reser 6.37 i kväll. Lämnade boken i lördags till vaktm. i glasburen för Din räkning. Mga hälsningar frn tillgivne

Einar H-e

Translation:

Dear Brother, I wish you a Happy New Year. I have tried to reach you by phone, but in vain. I depart 6.37 this evening. I gave the book to the porter in the glas cage on your account on Saturday.

sincerely yours Einar H-e

[126]Einar Hille (1894-1980), mathematician. His both parents were native Swedes, but he came to leave a long time in USA. His life reminds vaguely of the fate of the Riesz twins. The parents separated before he was born. The mother moved to New York, were Einar was born. His father was the civil engineer Carl August Heuman and, according to [110], Hille is a corrupted form of the father's name, later also adopted by the mother. Einar Hille "entered SU in 1911 with the intention of reading for a degree in chemistry. In fact he studied the subject for two years at the university, and was taught by an exceptional chemist in Hans von Euler-Chelpin" [110]. However, he left this subject and turned to mathematics instead. Among his teacher were Ivar Bendixson and Helge von Koch also Gösta Mittag-Leffler, but, ahead of all, perhaps Marcel Riesz. He gradadute as fil.dr. in 1918, with a thesis dealing with spherical harmonics. In 1920 Hille returned to his country of birth and worked in various places. In 1927 he came to Yale first as an associated and later, in 1933, a full professor. In 1937 he married Kirsti Ore, sister of his colleague Oystein Ore (1899-1968), the well-known Norwegian born number theorist. Hille's mathematical work was mainly on integral, differential equations, special functions, / series, later in his career also functional analysis. His name is attached to the Hille-Yosida theorem on generators of semigroups of operators. Hille wrote a monograph on semi-groups, in later editions with Ralph Phillips as co-author [77]. (It has been rumoured that Hille himself complained that he did not understand, what Phillips was doing.) He wrote also several text-books, which bear witness to his unusually profound and wide mathematical culture. – As a person Einar Hille was very kind and diffident. I myself first met him after a talk I gave at Yale in the fall of 1961 [124]. I met him also later, and we even corresponded with each other in mathematical matters.

2.51.2 Postcard Feb. 27, 1925

27/2 1925

Broder!

Formeln, jag brka dig om, är en direkt följd av Pincherle's undersökning [**?**]. P. visar att

$$\int_0^r f(t)t^{z-1}dt = r^2 \sum (-1)^n \frac{f^{(n)}(r)r^n}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

"Min" formel följer av Cahen's formel

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left[\sum a_n e^{-nt}\right] dt = \frac{1}{Gamma(s)} \left[\int_0^r + \int_r^\infty\right] \text{ etc.}$$

Observation[en] kan mhända i alla fall ha ett visst intresse.

Hälsningar

E. H.

Translation:

Dear Brother, The formula that I quarelled about with you is a direct consequece of Pincherle's investigation [**?**]. P. shows that

$$\int_0^r f(t)t^{z-1}dt = r^2 \sum (-1)^n \frac{f^{(n)}(r)r^n}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

"My" formula follows from Cahen's formula[127]

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left[\sum a_n e^{-nt}\right] dt = \frac{1}{Gamma(s)} \left[\int_0^r + \int_r^\infty\right] \text{ etc.}$$

This observation may be of some interest,

Yours, faithfully E. H.

[127] Eugène Cahen



Figure 2.33: Season greetings from Einar Kirsti

2.51.3 Card from Einar and Kirsti New Haven 3 Dec 1950

Käre Marcel!

En God Jul och ett Gott Nytt År! Valpen på bilden heter Flicka och är Bertils ögonsten. – Vi ha haft besök av en orkan, som har vållat stor skada på våra träd. Ännu ingen gatubelysning efter 8 dagar. – Här har varit många utländska gäster under höstterminen, senast Segre och Behnke. Den senare var en synnerligen angenäm bekantskap och höll ett utmärkt föredrag. – Jag arbetar på att redigera C. R. noten i detalj och med att utforma konsekvenserna för ordinära och partiella diff. ekv., men det går långsamt. Hjärtliga hälsningar

Einar Kirsti

Translation

Dear Marcel, A Merry Christmas and a Happy New Year! The pup on the picture is called "Flicka" (Girl) and is the apple of Bertil's eye. – We have been visited by a hurricane which did a lot of damage to our trees. After 8 days there are still no street lights. – Here we have had many foreign guests during the fall, lately Segre and Behnke. The latter was a remarkably pleasant acquaintance and gave an excellent talk. – I am busy editing the C.Rend.- note in detail and by work out the consequences for ordinary and partial differential equations, but progress is slow.[128] – Hearty greetings,

[128]It could be [76].

Yours Sincerely, Einar Kirsti.

2.52 Nils von Hofsten

2.52.1 Letter Jul 7 1944

UPPSALA UNIVERSITETS REKTOR

Dagnäset, Gnesta 26.7. 44.

adr till ca 20 aug se ovan. **Translation**: Address to 20 Aug, see above.

2.53 Lars Hörmander

2.53.1 Letter Linköping Aug 18, 1953

Professor M. Riesz
Kävligenvägen 1, Lund

Hjärtligt tack för professorns intresse för mina saker. Det var ju första gången jag fått diskutera dem med någon som kände bakgrunden och uppskattade invarianssynpunkterna.

[129]Nils von Hofsten (1881-1967), zoologist, studies at UU, fil.dr. and docent there 1919. He was professor of comparative anatomy 1921 and professor of zoology, / comparative anatomy and histology 1940-1947, all at UU, and the school's prorector 1933-1943 and rector 1943-1947. He was a member of the board of the "Statens institute of ras biologi " (State Instute of Racial Biology) 1926-1953, its vice chairman 1933-1945 and chairman from 1945. Inspired by Tycho Tullberg, professor of zoology, he took an interest in turbellaria (virvelmaskar) and rotatoria (hjuldjur). In the Summer of 1908 he took part in Gerard de Geer's expedition to Spitsbergen with the ship Svensksund, which ship, incidentally, was named after a battle, in a place near what is now the city of Kotka in Finland, which the Swedes won over the Russians in 1790, the greatest Swedish naval victory ever. [172].

[130]Lars Hörmander (b. 1931, mathematician, one of the leading analysts in the second half of the 20-th century, studied at LU under Marcel Riesz, fil. dr. 1954 – his thesis [83] is a master peace, still quite readable, which helped to reshape the whole area of p.d.f., professor at SH/SU 1957-1964, then at the Institute of Advanced Study, Princeton, after returning to his native country in 1968 professor at LU.

Anledningen till att jag nu skriver är, att det har blivit omöjligt för mig att studera professorns manuskript över weekenden. Kompaniet skall nämligen från i morgon träna fältmässiga förhållanden i en tältförläggning tio mil härifrån. Jag nås därför inte av någon post under adress Tingshuset Linköping (men under adress 324 Hörmander, 2. komp. T1, Linköping). Dessutom är det praktiskt taget omöjligt att få någon ro där ute. – Emellertid vore jag glad om jag skulle få något nytt tillfälle t. ex. nästa lördag och söndag. Jag hoppas att dessa saker som nu så länge varit lite aktuella för mig börjat mogna till förståelse.

Med de bästa hälsningar Professorns tillgivne
Lars Hörmander

Translation:

Professor M. Riesz
Kävligenvägen 1, Lund

Hearty thanks to you, Professor for taking an interest in my things. Indeed, it was the first time that I had the oportunity to discuss them with a person who knows the background and appreciates the point of view of invariance.

Why I write now, is that it has become impossible for me to study your manuscript during the weekend, Professor. Namely, my company shall from tomorrow on train in realistic conditions in a tent station ten miles[131] from here. There one cannot reach me by post under the address Tingshuset, Linköping (but under address 324 Hörmander, 2. komp. T1, Linköping). Besides it is practically impossible to get any rest out there. – However, I would be happy if I could get a new apointment e. g. next Saturday and Sunday. I hope that these ideas, that now for such a long time have been of current interest to me, have begun to ripen to understanding.

Yours faithfully Lars Hörmander

2.53.2 Letter Chicago Feb 14, 1956

Käre Marcel.

Sedan mer än en månad befinner jag mig i Chicago. Sålunda har jag hunnit acklimatisera mig i slummen (Gårdings karaktärstik) och börjar finna staden trivsam. Till och med har jag funnit något matematiskt utbyte om än litet vid detta universitet, där intresse och kunnande i analys tycks vara sällsynt. En del yngre människor intresserar sig

[131] Swedish miles; one such is 10 km, about six miles.

visserligen gör partiella differential/er men de förefaller vara dåligt utbildade och ha föga känsla för problemen. Jag hae fått motbevisa flera felaktiga påståenden, t.ex. existensbevis för Cauchy's problem vid ultrahyperboliska /er. Det enda som gjorts var naturligtvis en representationsformel. – Gårding motiverade Chicago med att jag här skulle kunna lära mig mycket utanför min specialitet. Det är utan tvivel rätt, men det förefaller mig svårt att få kontakt med dessa ytterst specialiserade människor och komma in i deras intressessfärer. Ett verkligt undantag är den välvillige och angenäme Chern som har börjat lära mig problem i differentialgeometrin som leder till överbestämda elliptiska system (typ Cauchy-Riemann i flera variabler). Det är utan tvivel mycket intressanta problem av helt ny svårighetstyp.

Emellertid har miljöbytet varit mycket stimulerande för min verksamhet. Jag har kompletterat lösningen av /'s problem i oändliga områden för potenserna av Laplaceoperatorn. Lions lämnade mig ett manuskript där ofullständiga resultat hade uppnåtts. Problemet gäller att karaktärisera de obegränsade områden i vilka man med hjälp med /'s princip kan definiera en Greens funktion. För Laplace-/en i planet är villkoren att komplementärmängden inte får ha kapaciteten noll (detta resultat är av Deny och Lions tidigare arbete). Lions och jag förbereder nu publikation av våra resultat. – Jag har också lyckats konstruera en fundamentallösning till en allmän differential/ med konstanta /er som har vissa regularitetsegenskaper som skärper Malgrange satser. De innehåller också olikheterna i kapitel II av min avhandling [83]. Problemet har faktiskt sysselsatt mig sedan förra våren. I språk av min avhandling innebär detta bl.a. att i varje begränsat område kan man ställa fullständigt korrekta randvärdesproblem så att motvarande utvidgning $\hat{P}$ av P_0 (kap. I av min avhandling) har lokal karaktär, dvs. av $u \in \mathbb{D}_{\hat{P}}$ och $\phi u \in C^\infty$ följer att $\phi u \in \mathbb{D}_{P_0}$. Om $P(D)$ är formellt självadjungerad kan man också ta denna utvidning självadjungerad. Är $P(D)$ också complete (dvs beror på alla variablerna) blir enligt avhandlingen alla egenfunktioner oändligt deriverbara och alltså existerar ett fullständigt system av egenfunktioner till $P(D)$, som alla är oändligt deriverbara. Det har egenskapen att egenfunktionsutvecklingen av en godtycklig funktion i C_0^∞ konvergerar likformigt på varje kompakt även efter ett godtyckligt antal derivationer.

Detta sista resultat avslutar i många avseenden många problemställningar i min avhandling. På måndag, den 20 februari, skall jag tala vid ett kollokvium i New York. Jag flyger dit på måndag och stannar till tisdag kväll. Bl.a. skall jag vid detta besök också komma definitivt överens om min vistelse i New York till hösten.

Med förhoppning om ett sammanträffande någonstans i U.S.A. sänder jag varma hälsningar från Viveka och mig.

Lars Hörmander

Translation: [132]

Dear Marcel, Since more than a month ago, I am in Chicago. Thus I have had time to acclimatize in the slum (Gårding's characterization), and I have begun to like the town. I have even found some mathematical exchange, but only little, at this university, where interest in, and knowledge of analyss appears to be scarce. But there are here some younger people interested in partial differential equations; however they seem to be poorely trained and have little feeling in the problems. I have had to give counterexample to several erroneous statements, e. g. the existence proof for Cauchy's problem via ultra-hyperbolic equations. The only thing done was, of course, a representation formula. – Gårding had motivated Chicago to me by telling that this was a place where I could learn a lot outside my specialty. This is certainly true, but it appears to me very difficult to etablish any contact with these highly specialized persons and to enter into their spheres of interest. The only exception is the benevolent and friendly Chern, who has begun to teach me problems in differential geometry which leads to overdetermined elliptic systems (of the type Cauchy-Riemann in several variables). These are without doubt very interesting problems of with a completely new type of difficulties.

However, the change of environment has been very stimulating for my activity. I have completed the solution of /'s problem in infinite /s for the powers of the Laplace operator. Lions gave me a manuscript where incompete results had been obtained. The problem was to /erize those un/ /s for which one can define, with the help of /'s principle, a Green's function. For the Laplace equation in the plane, the conditions are that the complementary set is not allowed to have capacity zero (this result is from Deny's and Lions's earlier paper). Lions and I are now preparing a publication of our result. – I have also managed to construct a fundamental solution of a general differential equation with constant /s possessing certain regularity properties, which sharpens Malgrange's theorems. It contains also the inequalties in Chapte II of my thesis [83]. Indeed, this problem has kept me occupied since last spring. In the language of my thesis, this means also that in each / / one can put completely correct boundary value problem so that the / extension $\hat{P}$ of P_0 (Chap. I of my thesis) has a local /, i. e. from $u \in \mathbb{D}_{\hat{P}}$ and $\phi u \in C^\infty$ fit follows that $\phi u \in \mathbb{D}_{P_0}$. If $\underline{P(D)}$ is formally selfadjoint, one can also take this extension to be selfadjoint. If $\underline{P(D)}$, likewise, is complete (that is, it depends on all variables), then, accoring to my thesis, all eigenfunctions are infinitely differentiable and so there exists a complete system of eigenfunctions to $\underline{P(D)}$, all of which are infinitely differentiable. It has the property that the eigenfunction expansion of an arbitrary function in C_0^∞ converges uniformly on each compact even after an arbitrary number of derivations.

This last result completes in many respects the problems set in my thesis. On Monday,

[132] On the envelope Filep has written "Yosida's letter inside!" This letter is of no interest.

Februari 20, I shall give a talk on a colloquium in New York. I fly there om Monday and stay until Tuesday evening. Among other things, I shall during this visit also settle the final arrangements regarding my sojourn in New York in the fall.

Hopping to meet you somewhere in the US, I am sending to you varm greetnings from Viveka and me.

Yours truly Lars Hörmander

2.54 Carl Hyltén-Cavallius

2.54.1 Letter Lund Feb 2, 1951

Cher Maitre,

Sänder härmed Hagstroms teckningar. De illustrationer, som legat framlagda i seminarierummet, varibland finnes en av Sven Bertil Nilsson och en av mig, äro häftade för sig och försedda med innehållsförteckning.

[133]Carl Hyltén-Cavallius (1924-1978), mathematician, studied under Riesz at LU, fil. dr. 1954. He is best remembered for his work on trigonometrical sums. Furthermore, he proved a lemma, used by Gårding in his great paper on hyperbolic partial differential equations [49]. As a mathematician he is known for his independence and great originality. "Han föredrog nakna och svåra problem och trivdes aldrig med mera allmänna matematiska teorier. Allt skulle vara hans eget. (He preferred naked, hard problems and was never happy with more general mathematical theories. All had to be his own.) [50]." Together with Nils Sandgren, Hyltén-Cavallius wrote several text-books and some lecture notes, all influenced by the teaching of Riesz. Their Analysis text is undoubtedly the best ever written in Swedish. Unfortunately, the level of our students has declined that much that it cannot be used anymore. "För en tidigare generation hade den s.k. stränga analysen varit ett 'mysterium'. Här fick den för första gången på svenska en välbalansers, fyllig och enkel framställning. (For a previous generation the so-called rigorous analysis had been a 'mystery'. Here it got for the first time in Swedish a well-balanced, full and simple presentaion.) [50]." Carl Hyltén-Cavallius suffered dyslexia, which also made the interpretation of these letters not entirely trivial. But he tried to fight his handicap, and was very proud of his ability to use the typewriter. (I wonder how he would have coped with email?) His end was tragic, he got very depressed, but nobody in his environment paying attention to it, he commited suicide. There seems to have been similar cases in his family

Reading the following 4 letters, there are a few facts that the Reader should bear in mind. First, that their author had recently divorced his wife, and that Marcel at the same time was somewhere in America. This explained why Carl stayed in Riesz's apartment. This seemed to be, as we may witness, the favorite place for some other divorcees too. Eventually, the couple remarried and had another child. After Carl's death his widow Karin – usually nicknamed "Lullu" – deeply mourned her remarkable husband for quite many years – until the present day.

Från institutionen kan jag endast meddela att Borg håller föredrag om stabilitetsproblem i matematiska sällskapet den 12:te (kaffe eller the på inst.). Några möbeltyger har också utprovats.

Anteckningarna i anslutning till Gårdings avhandling har jag skickat till Beurling och Carlson.

Jag skickar idag tre exemplar av mitt arbete som vanlig trycksaksförsändelse. Det var roligt att höra att Horváth och Salem var intresserade [av mitt arbete].

Med hjärtliga hälsningar
Carl Hylthén-Cavallius

Translation:

Cher Ma[1]tre,

I send you hereby Hagstrom's drawings. The illustrations that have been available in the seminar roome, among which there is one by Sven Bertil Nilsson and one by me, are bound each separately and equiped with a table of contents.[134]

Concerning the Department, I have only to repport that Borg gives a talk about the stability problem in LMS on 12 February (coffee or tea at the Department). Some furniture fabric has also been tested.

I have sent the notes cocerning Gårding's thesis to Beurling and Carlson.

Today I send three copies of my thesis as an ordinary peace of printed matter . I was glad to learn that Horváth and Salem were interested [in my work]. [135]

Yours faithfully
Carl Hylthén-Cavallius

[134] We did ask Sven Bertil Nilsson about these drawings. He thougth that he might have a vague memory of them, but he was unable to tell what purpose they served.

[135] Years later, I met once Edwin Hewitt in Oberwohlfach, we came to speak about Hylthén-Cavallius work, of which he was of a high opinion – from having been quite "abstract", he had himself turned to more concrete matters. I mentioned also the death of Hylthén-Cavallius to him, which he deplored deeply. He him died a few years afterwards. In W.W. II Hewitt had been an airman, boasting that he had often been near Berlin but never closer than 10 km. To his German friends he praised the qualities of the German fighters. "Wunderbar!" However, reading his autobiography gives a somewhat less glamorous picture of his career as a war hero. [74], [123]

2.54.2 Letter Lund May 31, 1955

Kära Prof. Riesz,

Tack för det innehållsrika brevet idag. För oss här i Lund är det ju tråkigt att höra om de nya planerna, men jag förstår att professorn har så många vänner i Amerika, gamla och nya, att valet är ganska klart.

Jag får också tacka för telegrammet, som gladde mig mycket.

Angående disputationen så fick den "ett lugnt förlopp" som det brukar stå i Lunds Dagblad, möjligen litet skällning för det äldsta arbetet. Betyget blev 2.2, vilket kanske Pleijel redan omtalat (i mars). Sektionen har ansökt om mitt förordnande som docent, vilket jag är mycket glad över. Jag kommer inte att ha särskilt stipendium utan i.st. vara biträdande lärare.

På kvällen hade vi middag på restauranten i Bjerred och sedan dans i villan, som min exsvärmor varit snäll nog att låna mig. Det var mycket lyckat, och eftersom spriten inte kom på restaurantnotan blev det inte alltför dyrt.

Det har för övrigt varit en underbar vår här, med arbete och umgängesliv i lagom portioner. Någon promotion blir det inte i vår, varför Lennart [Sandgren] och jag blivit utnämnda i stället.

Vi har vidare börjat skriva en ny lärobok i analys, som vi beräkna blir färdig i sept 1956. Vi tänker försöka skriva huvudparten denna sommar och sedan använda nästa sommar till korrektur och dylikt.

Jag skickar med en del klipp, bland annat en annons, som Walén satte in på första sidan in på första sidan i SDS angående sin disputation för docentur. Dissertationen blev inte godkänd.

Vidare en del om årets stora tentamensskandal. Prof. Lindquist hade anordnat skrivning i nordiska språk för 56 studenter. Innan översättningsprovet började gav han två grammatikfrågor och meddelade att de som ej klarat detta kunde gå meddetsamma. Hälften av tentanderna gick då, varefter prof. Lindquist satte igång och rättade frågorna för de övriga. När ung. 35 minuter av hela skrivningen gått, meddelade han att alla de som stannat kvar hade misslyckat med de andra av frågorna, varför de kunde gå hem. "Jag överrumplade dem" meddelade han sedan pressen. Han har nu luggats betydligt av kanslern och rektorn.

–oOo–

ADRESSER:

Vi har haft garderobsvädring och sprutning mot mal av kläder och mattor. Längre fram i sommar, då Fru Ljungberg har bättre tid, skall hon tvätta målning på dörrposter och skåp, vilket vi inte gjort på hela tiden.

–oOo–

VÅNINGEN:

Jag kommer att resa till landet den 8/6 med min pojke och stanna minst till den 15/7, huvudsakligen upptagen med analysboken. Min adress är då helt enkelt C. H-C Vederslöv. Institutionsadressen och bostadsadressen fungerar emellertid även. Herlestams sommaradress är Gasverksgatan 25, Hälsningborg. Såväl han som jag kan mottaga rekvision på arbeten. Om vi inte är i staden vidarebefordrar vi dem till fil.mag. Gunnar Bergendal, som kommer att vara i Lund större delen av sommaren och går upp på institutionen ett par gånger i veckan.

FRAMTIDPLANER

Om professorn är i Lund under tiden 15/7 - 1/9 är det kanske bekvämast att jag flyttar ut ett tag; det är då lätt att få rum på staden och jag har inte så mycket grejor (några lådor kan jag ju låta stå kvar i jungfrukammaren). Om professorn är här tiden 1/9 - 15/10 kanske det är svårare att få tag i rum, men det går väl på något sätt.

Jag får emellertid be om besked i så god tid som möjligt. Vidare får jag be om instruktioner om möblering och om mattor skall ställas om så som det var när jag flyttade in.

Det har kommit 24,50 i royalty från Cambridge Univ. Press. Denna gång har Skand. banken satt in dem direkt på professorns checkkonto. Jag har skrivit till Cambridge och bekräftat mottagandet.

Lars är i Italien. Han reste via Paris, där han föreläste, och har nu fortsatt med bil och Eva till Italien. Han kommer troligen hem i början av juli. Professorns brev har eftersänts.

Ja, nu tror jag att jag svarat på allt. Det skulle vara mycket roligt att träffa professorn i sommar, det är dessutom en del affärer att redovisa och trycksakspost att gå igenom. Om professorn skulle vara i Lund den tid jag är i Vederslöv, är det lätt för mig att komma ned ett tag, det är bara 4 timmar med bil.

Med hjärtliga hälsningar

C H-Cavallius

Translation:

Dear Prof. Riesz, Thank for your letter today. For us here in Lund, it is, of course, not so pleasant to hear about your new plans, but I understand that you, Professor, have so many friends in America, old and new so that the choice is quite obvious.

I also thank you for your cable, whice made me very glad.

Regarding the disputation, it had a 'quiet course", as it is usually written in LDBl, possibly a little scolding regarding my oldest paper. The mark was 2.2, which maybe Pleijel already told you (in March). The Section has applied that I be apppointed a docent, which makes me very happy. I am not going to have a special stipend, so instead I have to be an assistant teacher.

In the evening we had supper in the restaurant in Bjerred and afterwards dancing in the house, my mother-in-law was as kind as to lend it to me. It was quite a success, and, as the spirits were not on the restaurant bill, it was not too expensive.

Besides, it has been a wonderful spring here, with work and social life in suitable portions. There will be no promotion this spring, so Lennart [Sandgren] and I have been appointed instead.

Further, we have begun to write a new Analysis text-book, we estimate it will be ready in September 1956. We are going to try to write the main part this summer and then use next summer for proofreading and such.

I enclose some press cutting, amongt them an avertisement that Walén[136] put on the first page of SDS regarding his disputation for a docentship. The dissertation was rejected.

Moreover, something about this year's big examination scandal. Prof. Lindquist[137] had arranged written exams in Nordic languages for 56 students. Before the translaton text started he began by giving two grammar questions and let it known that those who had not got through could go [home]. Half of the candidates left then, whereupon Prof. Lindquist started to correct the questions of the remainig ones. When about 35 minutes of the entire exam had passed, he told that all those, who had stayed, had failed with remaining questions, so they could go home. "I took them by surprise" he later told the press.

His has now been pulled in his hair a good deal by the Chancellor and the Rector.

–oOo–

ADDRESSES:

We have had airing in the wardrobe and spraying against moth of cloths and carpets. Further on, in the summer, when Mrs. Ljungberg has more time, she will wash the painting of doorposts and cupboards, which we have note done during the whole period.

–oOo–

[136]Claes Walén. The disputation is reviewed in SDS on May 6, 1955.

[137]Ivar Lindquist (1895-1985), linguist, professor in Nordic languages LU 1942-61. L's work concerns runic texts, the law-rolls of the Swedish Provinces, and then Westnordic Edda and scald composition. He had a son named, Snorre! [114].

THE APARTMENT:

I am going to the country on 6 June with my boy and stay there at most until 15 July, mainly occupied by the analysis book. My address is then simply C. H-C Vederslöv. The address of the Department and my home addressen will also work. Tore Herlestam's summer address is Gasverksgatan 25, Hälsningborg. He as well as me can receive requisition of work. If we are not in town, we shall foreward them to fil.mag. Gunnar Bergendal, who will be in Lund most of the summer and goes up to the Department a couple of times each week.

PLANS FOR THE FUTURE

If you, Professor should be in Lund in the period 15 July - 1 Sept it might be more convenient that I move out; it is then easy to get a room in town and I do not have so many things (some boxes I could leave in the servant's bedroom). If you should be here in the period 1 Sept - 15 Oct it might be more difficult to get hold of a room, but somehow it could be settled.

But I ask you, Professor to let me know as soon as possible. Furthermore, I need instructions about furnishing and if the carpets must be put as it was when I moved in.

There has arrived 24.50 in royalty from Cambridge Univ. Press. This time your banque did deposit them directly in your account, Professor. I wrote to Cambridge and acknowledged the receipt.

Lars is in Italy. He went by Paris, where he gave a talk, and he has now continued by car, and [accompanied by] Eva, to Italy. He will probably be back home at the beginning of July. Your letters, Professor, have been forwarded.

Yes, I think that I have now answered everything. It would be so nice to meet you, Professor in the summer, there is also some business to give account of and go through all printed matter. If you would be in Lund, Professor, while I am in Vederslöv, it will be easy for me to come down for a while, it is just 4 hours by car.

With hearty greetings

Sincerely Yours C H-Cavallius

2.54.3 Letter Lund 29 May 1956

Käre Marcel.

Tack för Ditt innehållsrika brev. Jag har sänt 6000:- till Margit, efter att ha tagit reda på att hon var hemma. Vidare har jag klarat Lindstedtsräkningen.

Mina sommarplaner är. Omkr 9/6-9/7 vistas jag under adressen CH Vederslöv, Sverige. Den 12/7 hoppas jag kunna ta mig tid att bila i England och kontinenten ett par veckor. Sedan till Lund och korrekturen på boken.

Jag har bett Lundius But if you stay in Amerika till april 57 kan jag ju kanske bo kvar och hyra ut min våning på ett par månader. Under sommaren finns inte stora problem, de är lätt att skaffa rum ute på stan (dock tror jag att jag denna gång avstår från dublett).

Fru Ljungberg reser bort i sommar men har lovat att göra ordentligt med städning sedan jag rest till Vederslöv, så att Du skall finna allt i ordning.

Jag är naturlitvis intresserad att så snart som möjligt få närmare besked om när Du kommer. Men eftersom jag troligen är i Vederslöv då ordnar jag så, att jag placerar alla Dina bankböcker + redovisning i Ditt bankfack, som jag hoppas ha tillgång ännu (Om inte gör jag en deposit i förseglat kuvert hos Skandinaviska banken). Så kan Du bara titta in och hämta sakerna.

Här har varit en smärre olycka vid det fönster i arbetsrummet som vätter åt bryggeriet. Det rann in vatten, så jag fick ta ner gardinerna för att de inte skulle bli våta. Nu har det inte upprepats sedan febr, varför det som värden sa var en tillfällig sak.

I badrummet läckte tvättstället, så jag meddelade Svenssons. De sände efter Wiklunds, som fann att hela skålen måste bytas. Wiklunds uppgav tidens tand som orsaken, varför värden väl betalar.

När vi talar om husliga ting, så har det, som Du kanske såg när Du var hemma sist, blivit några *ringar* till på tevagnen (jag tror Du mest hade den till att lägga papper på, men jag har använt till det ändamål namnet anger). Hur som helst skall jag låta lakera om den, men väntar tills Du kommer hem, så att jag kan få besked om vi skall ta samma färg som tidigare.

Nu har sakkunigutlåtande om laboraturen brutits. Alla sakkuniga har funnit att båda är väl kompetenta, men man skall inte taga någon hänsyn till Sandgrens överlägsna pedagogiska meriter och läroboksförfattande, Ganelius kommer därigenom före på sina Taubersatser.

Rörande Lars planer är han som ende svensk inbjuden till rysk matematikerkongress i Moskva 25/6 och 14 dagar framåt. Eva ville följa med, men jag vet inte hur det blir. Hon har fått ett stip. på 3000 kr för att fara till England (och avsluta sin lic. avh.).

Lars reser till USA 1/1 57.

Med boken jobbar vi intensivt. Omkring hälfte är satt, men vi har ännu två kapitel att skriva. Av allt att döma blir den antagen i Uppsala och Stockholm.

Med hjärtliga hälsningar

Calle

Translation:

Dear Marcel.

Thank you for your comprehensive letter. I have sent 6000:- to Margit, after having verified fhat she was at home. Furthermore, I have the bill to Lindstedts[138].

My plans for the summer are [as follows]. Around 9 June - 9 July I shall dwell under the address CH Vederslöv, Sweden. On 12 July I hope to be able to allow myself time to go motoring in England and on the Continent[139] for a couple of weeks. Then to Lund and proof reading of the book.

I have asked Lundius[140] to arrange an apartment for me until 1 December 1956. But if you stay in America until April 57 I could perhaps stay there and sublet my apartment for a couple months. During summer there is no major problem, it is easy to find a room in town (however, I believe that this time I will refrain from 2-roomed flat).

Mrs. Ljungberg goes away this summer, but she has promised to clean up properly after I have left for Vederslöv, so that you shall find everything in order.

I am of course interested to learn, as soon as possible, more precisely when you are coming. But as I probably will be in Vederslöv, I'll arrange so that I place all your bankbooks + statement of account in your bank safe, which I hope that I still have access to (If not I make a deposit in a sealed envelope at the "Skandinaviska banken" (Scandinavian Bank)). Then you can just drop in and pick up the things.

There has been a minor accident at the window in your study on the side of the brewery. Water flowed so that I had to remove the curtains in order to avoid them getting wet. Now this has not been repeated itself since February, this was, as the landlord told, something temporary.

In the bathroom there has been a leak in in the the wash basin, so I informed the Svenssons. They called for the Wiklunds who found that the whole basin had to be replaced. Wiklunds told that it was old age that was the reason, so I presume that the landlord will pay.

Speaking of domestic things, there has come, as you probably saw when you were home last time, a few more *rings* on the tea trolley (I believe that you mostly used it to put paper on, but I have used for the purpose indicated by its name). Anyhow, I am goig to have it lacquered anew, but I wait until you are back home, so that I can learn if we should take the same colour as before.

Now the report of the experts concernining the laboratorship has been opened. All the experts found that both are well competent, but one shall not put any attention to the superieur pedagogical merits and writing of text-books of Sandgren. Ganelius comes therefore ahead with his Tauberian theorems.

---

[138] A bookshop in Lund

[139] Colloquial expression among Swedes for the rest of Europe (in practise, Western Europe).

[140] Maiden name of Eva Gårding.



Figure 2.34: recto

Regarding Lars's plans, he is the only Swede invited to a Russian mathematical congress in Moscow on 25 June and 14 days on. Eva wanted to go along, but I do not know how it will be. She has got a stipend amounting to 3000 Crowns for going to England (and finishing her lic. thesis).

Lars goes to USA on 1 January [57].

We are working on the book intensively. About a half has been set up, but there are still two chapters to be written. All points to that it will be accepted in Uppsala and in Stockholm.

With hearty greetings, Yours faithfully, Calle.

2.55 Innsbruck

2.55.1 Postcard with signatures; postal data: 26.IX.24

Recto:

G.H. Hardy; Knopp; Schouten ; Pringsheim; Mises; Izárt; Carathéodory; H. Bohr
Viele Grüsse Hilb; Doetsch; Walther; Rademacher; E. Noether

Verso: Perron; Hilbert; Bieberbach; Zindler; (Alfred) Loewy; Hessenberg; Rogosinski; Reissner; Wintner; Fejér; Pfeiffer; Rosenthal; Fekete

Right across the page: Courant

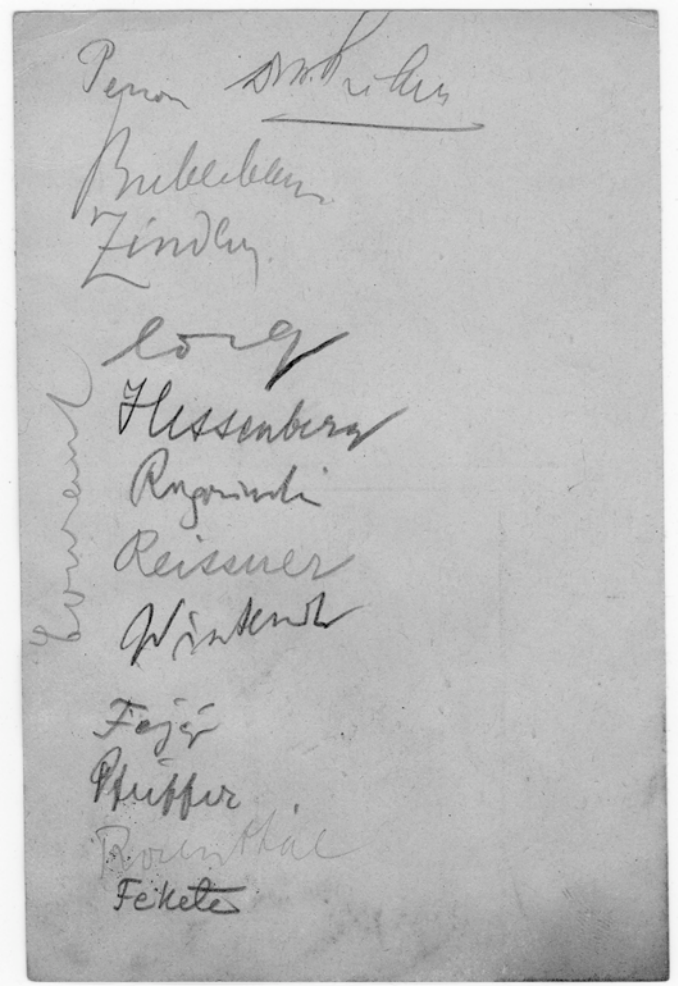


Figure 2.35: verso

2.56 Tor Jerneman

2.56.1 Letter to Herr Doktor Marcel Riesz Box 166 Ånge Stockholm Jan 13, 1920

B.B.

Ett hjärtligt tack för kortet. Det anlände igår middag, för sent för mig att kunna skicka ett brev, som kunde hinna med kvällståget. En timma efter det brevet anlät tågade Hille, Cramér, Hagström[142] och undertecknad till Hedberg. Denna hedersman blev smått förtvivlad över den korta tid, som stod honom till buds för utförandet av albumet. Men han lovade i alla fall att ha arbetet färdigt till den 24 dennes. Såvitt vi kan döma kommer albumet att bliva riktigt ståtligt.

Adressen, som textas hos *Hedberg*, kommer att upptaga ett första blad helt och ett andra delvis. Efter densamma följer alla namnteckningarna i faksimiltryck i bokstavsordning. Mittags namn och fotografi får emellertid komma först, dels på grund av hans ställning som v. K:s lärare, dels på grund av det pompösa fotografiet. Två eller tre namnteckningar fela, bl. a. Din, vilken Du borde sända direkt till Hedberg, för den händelse Du icke redan sänt den till mig.

Såsom Du såg av telegrammet har adressen samlat 54 deltagare. Jag vill inte tala om det besvär historien kostat mig, arbetstid har tagits från P.S. Av mera bemärkta män hava följande icke deltagit: Karl Bohlin, Magrell, Cassel, Wiman, Granquist etc.

I pengar har sålunda ingått omkring 350 kronor (några hava glömt att betala), vilken summa borde oavkortat kunna disponeras för adressen. Då emellerrid Hedberg vill ha 400-450 kronor kunna vi icke komma ifrån saken utan hänvändelse till Bendixson, vilken Hille ånyo vidtalat, dock utan uppgivande av den summa han skulle ha att utlägga, icke ens till storleksordningen. Vi få emellertid hoppas att den saken ordnar sig.

Adressens ordalydelse, författare och granskare framgår av bilagda avskrift. Du får inte bli förbannad: “Skjut ej på pianisterna, dom har gjort såg godt de kan!

Jag vill givetvis icke råda Dig till varken det ena eller det andra, men mig synes emellertid att saken är så pass ordnad att Du inte behöver resa från det härliga vinterväder, som säkerligen är rådande i Ånge. Din närvaro torde inte vara behövlig förrän omkring den 22. Men döm själv!

---

[141] *Tor* Gunnar Jerneman (1994-1965), mathematician and civil servant, registered SH 1913, fil.kand., registered UU 1929, fil. lic. and fil. dr. 1931. Started his carrier as a civil servant in the service of the board of the“Pensionsstyrelsen” (Pension board), worked from 1934 at the board of the“Socialstyrelsen” (Social board). Later also in the service of the Ministry of Foreign Affairs.

[142] Bertil Erik Carl Hagström (1904-1991), registered at SH 1922, no exams i mathematics, however passed an exam in mechanics in 1926, studied at KTH 1922-1926, civ.ing. 1926. – Not to be confused with K.G. Hagstrom.

Hoppas, att detta brev når Din innan någon olycka är skedd! Hille, Cramér, Hagström och så gör även

vännen Jerneman

Translation:

Dear Brother,

Hearty thanks for your card. It arrived yesterday by noon, too late for me to be able to send a letter, which could catch the evening train. An hour after the letter's arrival Hille, Cramér, Hagström [143] and I the undertsigned to Hedberg. This man of honour was quite distressed at the short time that was at his disposal for the manifacturing of the album. Anyhoe, he promised to have the work finished by the 24-th. As far as we can judge, the album will be quite stately.

The address, which will be written in block letters at the Hedberg, is going to occupy at first leaf on the whole and a second one in parts. After there come all the signatures in facsimile print in alphabetic order. But Mittag's name och photograph has to be first, partly because of his rôle as v. K:s teacher, partly because of the grandiose photographe. Two or three signatures are missing, among others yours, which you ouht to senda directly to Hedberg, in the case you have not sent it already to me.

As you saw from the telegram, the address has collected 54 participants. I don to want to speak of the trouble the thing has cost me, working hours have been taken from P.S. Among more noted men, the following have not participatedt: Karl Bohlin, Magrell, Cassel, Wiman, Granquist etc.

In terms of money, thus about 350 Crowns have been received (some people have forgot to pay), which amount ought to be used for the adress. However, as Hedberg wants to have 400-450 Crowns, we cannot avoid the thing without turning to Bendixson, whom Hille has informed anew, however, without mention of the sum he should tspend, not even its order of magtude. However, let us hope that the thing will be settled.

The wording of the address, author and examiner follow from the attached copy. You must not be angry: "Do not shoot the pianists, they have done as well as they can!"

Of course, I do not want to give any kind of advice, but it appears to me that the thing is so well ordered that you ought not leave the delightful winter weather which certainly is prevaiIing in Ånge. Your precence will note be needed until around the 22-nd. But judge it yoursjelf!

I hope this letter reaches you before there is an accident! Hille, Cramér, Hagström and so does also

[143] Bertil Erik Carl Hagström (1904-1991), registered at SH 1922, no exams i mathematics, however passed an exam in mechanics in 1926, studied at KTH 1922-1926, civ.ing. 1926. – Not to be confused with Hagstrom.

your friend Jerneman

2.57 Ernst Jacobsthal

2.57.1 Letter Alingsås, Slott Nolhaga Jan 19, 1943

Prof Dr. Ernst Jacobsthal

Alingsås, Slott Nolhaga, Sverige

Lieber Herr Riesz,

Nun bin ich in Schweden gelandet, geflohen von Norge, wo ich die letzten $3\frac{1}{2}$ Jahre in Trondheim gelebt habe. Es waren angenehme Jahre ruhiger wissenschaftlicher Arbeit zusammen mit R. Tambs Lyche und Viggo Brun. Tambs Lyche sitzt seit den 9.3.42 arrestiert von den Nazis im deutschen KZ in Falstad in der Nähe von Trondheim. Seine Familie wurde aus dem schönen und schön gelegenen Hause gesetzt. Die verhälltnisse in Norge spitzten sich so zu, dass die Gefahr einer Arrestation zwecks Deportation nach Polen überhängend wurde. So rieten meine Freunde mir alle, illegal über die Grenze zu gehen trotz des Risikos (Todesstrafe). Sie bereiteten alles vor. Am 6.1. reiste ich mit der Bahn nach Oslo (18 Stunden) ohne eine Passkontrolle durch machen zu müssen. Ich bin ja inzwischen staatenlos [geworden] und ohne giltigen Pass. In Oslo wurde ich in Empfang genommen und in Deckung gebracht. Am 8.1. in der Nacht ging es weiter, um $\frac{1}{2}$ 3 morgens am 9.1. war ich in Schweden. Soweit das Äussere. – Was nun? In Trondheim konnte ich ruhig arbeiten und auch etwas Vorlesungen halten. Soweit ich nicht selbst

[144]Ernst Erich Jacobsthal (1882-1965), German mathematician, was first a school teacher and taught at the Berlin Kaiser-Wilhelm-Gymnasium. From 1913 he was also a private docent in mathematics at the Berlin Technical University. In 1922 he was appointed extraordinary professor there. In 1934 Jacobsthal, of Evangelical Faith, but of Jewish origin, was dismissed; his wife was, however, not Jewish, and therefore the couple asked for a divorse, because in this way the German authorities would leave her alone. So Jacobsthal emigrated, in the same year to Norway, where he became a professor at the Technical University of Trondheim. A planned continued journey to England was inhibited by the German occupation of Norway in 1940. For a while, the occupation authorities allowed him to continue working and publishing. In January 1943 he decided to flee to Sweden across the "green" boarder. In Sweden he came to work at Uppsala. After the war he returned to Trondheim. The couple remarried eventually. On his 70-th birthday Jacobsthal was made Honorary Senator of the Berlin Free University. – Some of the letters (see e. g. 2.58.2 and 2.58.7.) contain mathematical results by Jacobsthal communicated to Marcel Riesz. Most of his papers were published in *Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim).* I have gone through several volumes of that journal, but I did not find anything of the like. This means that we must have here original mathematical results not published before. [168]

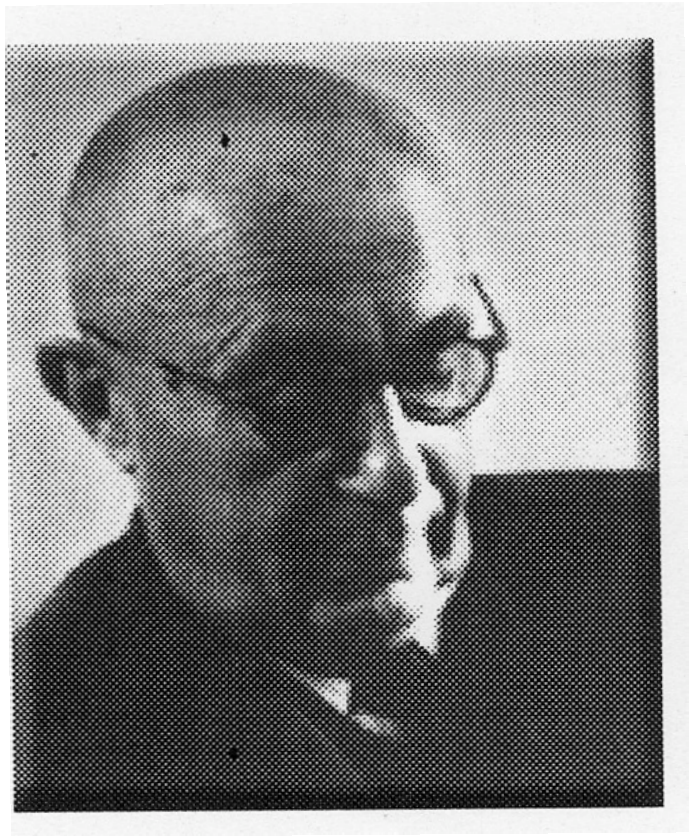


Figure 2.36: Ernst Jacobsthal, 1950

genug Mittel hatte, finanzierte mich V. Brun. Ich habe in der Akademie in T. einige Arbeiten veröffentlicht, an anderer Stelle eine grössere mit Tambs Lyche zusammen. Ein 20 Seiten langes Manuskript (Zahltheorie) liegt bei der Akademie in T., um nach dem Verschwinden der Nazis gedruckt werden. Ein noch grösseres Manuskript über verwandte Dinge nahm ich mit, um es hier fertig zu stellen. An Nagell und Cramér schrieb ich schon. Die Frage ist, ob ich die Möglichkeit bekommen kan meine Arbeit in einer der schwedischen Universitätsstädte oder in Göteborg fortzusetzen. Ich ahne nicht, wer der Kollege in Göteborg an der Technischen Hochschule ist und kenne seine politische Einstellung nicht. Wissen Sie darüber Bescheid? Wenn Sie sich diese Dinge mal durch den Kopf gehen lassen könnten, wäre ich Ihnen sehr dankbar! – Haben Sie Nachrichten von Ihrem Bruder Frederik? Dass K. Hensel[145], Issai Schur nicht mehr am Leben sind, haben Sie wohl gehört. Ich wäre Ihnen zu Dank verbunden, von Ihnen einige Zeilen zu erhalten.

Mit bestem Gruss,

Ihr ergebener Ernst Jacobsthal.

Translation from German:

Dear Mr Riesz,

Now I have landed in Sweden, fled from Norway, where I lived the last $3\frac{1}{2}$ years in Trondheim. It were pleasant years of scientific work together with R. Tambs Lyche and Viggo Brun. Tambs Lyche[146] sits since 9 March 1943 arrested by the Nazis in the German KZ in Falstad near Trondheim. His family was removed from their nice and beautifully situated home. Conditions in Norge have become such that the danger of being arrested

[145]Kurt Hensel (1861-1941), German mathematician, invented the p-adic numbers. [110]

[146]Ralf Tambs Lyche, mathematician, was born in US in 1891 to a Norwegian father and an American mother. When the boy was 2 years old the family moved to Norway. Tambs Lyche got a degree from Kristiania University (Kristiania is now Oslo) with mathematics as main subject in 1916. When NTH was founded in 1910 he already taught there as an assistent. In 1910 he became a docent there and a professor in 1937. From 1950 until his retirement in 1961 Tambs Lyche was a professor at Oslo University. During the state of emergency proclaimed by the Germans in Trondheim in the spring of 1942 Tambs Lyche was taken a hostage. Some hostages were shot but he was interned, as we learn here, at the KZ Falstad where he staid for the rest of the war. As a mathematician, Tambs Lyche was rather manysided but his main interests comprised function theory. In 1957, in a popular article in Normat [163], he constructed an continuous real function $f(x)$ differentiable at all irrational x in an interval but not for any rational x. Similar examples were known before but the original feature with Tambs Lyche's case was that $f(x)$ was of / variation, while the curve $y = f(x)$ was of finite length [163]. Tambs Lyche was a nature lover and had many interest outside mathematics, / botany; his herbarium counted some 50 000 plants. Professor Ralf Tambs Lyche died on 15 January 1991 at the age of 100. [155].

and deported to Poland have become imminent. Therefore all my friends adviced me to go illegaly over the boarder despit the risk (death penalty). They prepared all beforehand. On 6 January I travelled by train to Oslo (18 hours) without having to go through a passport control. In the meantime I have become stateless without a valid passport. In Oslo I was received and put under cover. On 8 January in the night the journey went on, at $\frac{1}{2}$ 3 in the morning on 9 January I was in Sweden. So much about external matters. – What now? In Trondheim I could work in peace and also deliver some lectures. To the extent I did not have myself enough means, I was financed by V. Brun. I published some papers in the Academy in T., at another place a bigger with Tambs Lyche jointly. A 20 pages long manuscript (number theory) is at the Academy in T., in order to be printed after the vanishing of the Nazis. An even bigger manuscript on related things was brought here by me, to be completed. I probably send it to Nagell and Cramér. The question is if I would get the possibility to continue my work in one of the Swedish university towns or in Göteborg. Ich have no idea who is the colleague in Göteborg at the CTH and I do not know his political attitude. Do you know anything about this? If you would think over these things in your head once, I would be very grateful to you! – Do you have any news about your brother Fredrik? You probably know that K. Hensel[147], I. Schur[148] are not anymore alive. I would very obliged to you to receive from you some lines.

My best regards,

Yours faithfully, Ernst Jacobsthal.

2.57.2 Letter Alingsås, slott Nolhaga Feb 3, 1943

Lieber Herr Riesz,

Ihr Brief vom 30.1. hat mich ausserordentlich erfreut und mich mit grossen Dank erfüllt. Ihre so aktive Hilfe ist so nett und hat mich tief gerührt. Wenn das glückt, was Sie eingeleitet haben, wird es zusammen mit der Summe, die ich wahrscheinlich vom Staat ("Socialstyrelsen") erhalten soll, ausreichen, bescheiden zu leben. – Ich fand Ihren lieben Brief vor als ich am 1.2. abends von Göteborg zurückkam, wo ich mit Prof. Hössjer gesprochen habe, der ja ein Schüler von Ihren ist. In Göteborg keine Aussichten. Ob ich nach Lund oder Uppsala komme ist nicht entschieden. Die Entscheidung darüber hat die oben erwähbtw Behörde. Fräulein T. Filseth frühere erste Sekretärin der Nansenhilfe

[147]Kurt Hensel (1861-1941), German mathematician, invented the p-adic numbers. [110].

[148]Issai Schur, (Mogilyov, Mogilyov province, Russian Empire (now Belarus)1875 - in Tel Aviv, Palestine (now Israel)1941) mathematician, most remembered for his early work in group representation, but did also brilliant work in analysis. For instance, in a famous paper [150] (1911) he determined the exact constant of the Hilbert matrix and gave the first example of an / theorem: If T is a linear operator which maps $L^1 \to L^1$ and $L^\infty \to L^\infty$, then T maps also $L^2 rightarrow L^2$; this was pivotal in the later work of Marcel Riesz [141]. [110].

in Oslo – nun hier – ist von der Behörde (die "Socialstyrelsen") beauftragt, die staatenlosen Flüchtlinge von Norwegen betreuen. Sie hat den Antrag gestellt, mir Erlaubnis zu geben, in Lund zu wohnen. Aber es scheint so, dass die Entscheidung anders ausfällt: Uppsala. Nagell, der ja ein guter Freund von Viggo Brun ist, hat mir furchtbar nett geschrieben. Wenn ich dorthin komme, soll ich einen Arbeitsplatz im Institut bekommen. So muss ich warten, bis ich von der Behörde höre, was man verfügt, und bis alle Geldsachen geregelt sind. Mein Bruder (Christ Church, Oxford) versucht, ob er ein Permit für ein Geldsendung bekommt. Das erste Jahr in Norwegen hat mir das Balliol College in Oxford finansiert. – Wissen Sie etwas über Ihren Bruder F.? – v. Borbély ist einer meiner Schüler, der mir menschlich sehr nahe steht. Er ist riesig nett und klug. Sollte ich nicht nach Lund, sondern nach Uppsala kommen, hoffe ich trotzdem, dass man sich einmal sehen und sprechen kann. Es gibt so viel zu erzählen. Denn die letzten Jahre waren ja reich genug an Ereignissen. Ich hoffe, dass der Krieg nicht mehr allzulange dauert. Hinterher muss ich dann Versuchen, meine Sachen aufzusammeln, die verstreut sind in Schweden, Norwegen, Holland, England, Deutschland. Vor allem liegt mir an Manuskripten, die zum Teil fertig sind. In Trondheim hatte man so schöne Zeit zum ruhigen Arbeiten. Dazu so nette warmherzige Menschen. Ohne die Nazis dort war es ein behagliches Leben. Die letzte Zeit habe ich [mit] Zahlentheorie gearbeitet. Ich habe da die Ausdrücke

$$S_r(u,p) = \sum_{n=1,\sigma(p)}^{n} \frac{1}{\sigma^n} \quad (p = \text{Primzahl})$$

im Bereich von p^4 untersucht, worin $u \equiv 0(p)$ ist und (p) unter dem Summenzeichen bedeutet, dass nur die zu p teilerfremden ganzen Zahlen durchläuft. Ist n genau durch p^β teilbar, so gilt z.B. für jede ungerade Primzahl p und $r \equiv o(2)$ und jedes $gamma$ mit $a \leq gamma \leq s$:

$$S_r(u,p) \equiv 2\frac{n}{p^g amma} a_r + 2rnb_r + rna_{r+1} \pmod{p^{\beta+gamma}}$$

worn die Grössen a_t, b_t so erklärt sind. Ist $(lamda, p) = 1$ so sei $lamda'$ so erklärt durch

$$\begin{aligned} lamdalamda' &\equiv 1(p^g amma) \\ q &= \frac{1 - lamdalamda'}{p^g amma} \end{aligned}$$

$$a_t = \sum_{i=1,lamda(p)}^{\frac{p^\gamma-1}{2}} lamda^t, \quad b_t = \sum_{xi=1,lamda(p)}^{\frac{p^\gamma-1}{2}} qlamda^t$$

Die oben stehende Kongruenz gilt nur nicht, wenn $p = 3, r = 4(6)$ und $1 \not| gamma \leq S$ ist. Dann ist

$$S_r(u, 3) \equiv -\frac{n}{3} \pmod{3^{s+1}}.$$

Diese und ähnliche Kongruenzen sind nicht ganz leicht zu bekommen. Ich benutze Eigenschaften Bernoullischer Zahlen und Polynome. Es hängen diese Dinge zusammen mit den Untersuchungen von Hardy-Wright [68] auf S. 100 ff. beschreiben. Herzliche Grüsse und nochmals vielen Dank,

Ihr ergebener Ernst Jacobsthal.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz,

Your letter from 30 Jan made me extraordinarily happy and I am grateful to you for it. Your so active help is so kind and has deeply touched me! If the action that you have started succeeds, it will, along with the sum that I probably will receive from the government (the "socialstyrelsen"), suffice to give me a modest living. – I found your so nice letter awaiting me as I returned from Göteborg in the evening of 1 Feb. There I spoke to Prof. Hössjer, who indeed is a former student of yours. In Göteborg there is no chance. It has probably not yet been decided, whether I shall come to Lund or Uppsala. Miss T. Filseth is the former first secretary of Nansen Aid organization in Oslo und here the authority (the "socialstyrelsen") has applied her to take care the stateless refugees from Norway. She has made an application to get permission for me to live in Lund. But it seems that the decision is different: Uppsala. Nagell, who indeed is a good friend of Viggo Brun, wrote a very nice letter to me. If I were to come there I will get an office at the Institute. I must wait until I hear from the authority what resources are available and until all monetary things are settled. My Brother (Christ College, Oxford) tries to get a permit for sending money. The first year in Norway I was supported by Balliol College in Oxford. – Do you know anything about your brother F.? – v. Borbély[149]

[149]Samu [von] Borbély (1907 in Torda [now Turda, Romania] –1984 in Budapest), Hungarian mathematician, studied at the Technische Hochschule Charlottenburg in Berlin from 1926. In 1929 he was a student-assistant at the Applied Mathematics Department of R. Rothe and later at the Mathematics Department of G. Hamel. Obtained the diploma of Engineer-/ in 1933 and at the same time was appointed assistant. In 1924 he switched to the Institute of Aviation Technology of the school. In 1938 he obtained the title of Doctor of Engineering (Dr. Ing.) with his work on airfoil theory. In 1940 a position was offered to him att the University of Kolozsvár, where he hold various positions untlll 1944. An expert in aviation he was arrested 4 May 1944 by the Gestapo and tranported to Berlin. He was set free in the middle of September 1944. He returned to Kolozsvár in 1945, where

of Magdeburg. He became / member of the Hungarian Academy of Sciences in 1946, and ordinary member in 1979. Scientific interests: Mathematical physics, numerical and computerized integration. [86], p. 568-569. is one of my students who comes me close from the human point of view. He is extremely nice and very gifted. Were I not come to Lund but to Uppsala, I still hope that we will see each other and talk together. There is so much to tell. The last years have been exceedingly rich in events. I do hope that the war will not last too long more. Afterwards I have to try to assemble my belongings which are scattered in Sweden, Norway, Holland, England, Germany. The most I worry about my manuscripts, which are partly ready. In Trondheim one had a lot of time to work in peace. In addition all the nice warmhearted people around. Without the Nazis life there was so agreeable. Lately I have worked [with] number theory. There I have investigated the expressions

$$S_r(u,p) = \sum_{n=1,\sigma(p)}^{n} \frac{1}{\sigma^n} \quad (p = \text{prime number})$$

in the / of p^4, where $u \equiv o(p)$, and (p) under the summation sign means that runs through only relatively prime integers to p. If n is even and divible by p^β, then holds, e.g., for every odd prime number p and $r \equiv o(2)$ and each $gamma$ with $a \leq gamma \leq s$:

$$S_r(u,p) \equiv 2\frac{n}{p^\gamma}a_r + 2rnb_r + rna_{r+1} \pmod{p^{\beta+\gamma}}$$

where the quantities a_t, b_t are defined as follows. If $(lamda, p) = 1$, then $lamda'$ is so defined through

$$\begin{aligned} lamdalamda' &\equiv 1(p^\gamma) \\ q &= \frac{1 - lamdalamda'}{p^g amma} \\ a_t &= \sum_{i=1,lamda(p)}^{\frac{p^\gamma-1}{2}} lamda^t, \quad b_t = \sum_{xi=1,lamda(p)}^{\frac{p^\gamma-1}{2}} qlamda^t \end{aligned}$$

The above congruence is not valid only if $p = 3$, $r = 4(6)$ and $1 \not| gamma \leq S$. Then one has

$$S_r(u,3) \equiv -\frac{n}{3} \pmod{3^{s+1}}.$$

---

he became a professor at the Department of Mathematics and Geometry at the short-lived Bolyai University. He returned to Hungary and had a positions from 1949 to 1955 at the Technical University of Heavy Industry in Miskolc, from 1955 to 1977 a the Budapest Technical University, between 1960 and 1964 at the University Technical University.

These and analogous congruences are not entirely easy to obtain. I take care of properties of the Bernoulli numbers and /s. These things are connected with the investigations that Hardy-Wright [68] explain on p. 100 etc. Hearty greetings and once more many thanks,

Yours faithfully Ernst Jacobsthal.

2.57.3 Letter Alingsås, slott Nolhaga Feb 10, 1943

Lieber Herr Riesz,

Ich sprach heute mit Fräulein T. Filseth, die an der norwegischen Gesandtschaft angestellt ist und früher erste Sekretärin in der Nansenhilfe in Oslo war. Sie betraut hier im Lager im Auftrage der Behörde (die "Socialstyrelsen") alle Flüchtlinge und sorgt für Ihre Unterbringung. Sie hat an das Komitee für intellektuelle Flüchtlinge geschrieben und die Antwort bekommen, dass es praktisch aufgelöst ist, d.h. die Mittel sind wohl erschöpft. Das Lager wird hier im Februar aufgelöst. Dann soll ich nach Uppsala fahren. Die Sache ist etwas dunkel, da ich vorläufig nicht weiss, wie ich existieren soll. Immerhin sind alle möglichen Kreise mobilisiert worden. Vielleicht bekommt man da die nötigen Mittel zusammen. Wenn Sie Prof. Martin Nilsson kennen, erzählen Sie bitte dass ich hier bin. Mein Bruder Prof. Dr. Paul Jacobsthal (Christ Church, Oxford) ist ein Fachkollege von N. und hat telegraphisch Grüsse an N. mir aufgetragen. Mit vielen Grüssen,

Ihr ergebener Ernst Jacobsthal.

Translation from German:

Dear Mr Riesz, I spoke today to Miss T. Filseth, who is employed at the Norwegian Legacy and formerly was first secretary at the Nansen Aid in Oslo. Here she takes care of all refugees on behalf of the authority (the "Socialstyrelsen") and arranges their accomodation. She has written to the Commitee for intellectual refugees and got the reply that it is practically dissolved, i.e. the funds are probably exhausted. The camp here will be closed in February. Then I have to go to Uppsala. The situation is somewhat dismal as I so far do not know how I shall exist. Anyhow all possible ciricles have been mobilized. Perhaps one will be able to put together the neccessary funds. If you know Professor Martin Nilsson[150], tell him, please, that I am here. My brother Professor Dr.

[150]Martin Persson Nilsson (1874-1967) specialist of antiquity, history of religion and folkloric (1874-1967), the first professor in classical history and history of antiquity at LU (1909-39), its rector 1936-39. N. was also the initiator of the founding of the Swedish Institute in Rome (1925). His broad and many sided study of antiquity, mainly concentrate to Greek religion and religiosity, made him internationally famous. He was enormisly productive; his printed output comprises some 1 000 titles. [114] His text-book [111], first published in 1936, run numerous editions.

Paul Jacobsthal (Christ Church, Oxford) is a colleague of N., and that he has forwarded telegraphic greetings for N.. With many greetings,

Yours faithfully Ernst Jacobsthal.

2.57.4 Letter Alingsås Feb 14, 1943

Lieber Herr Riesz,

Ich bekam heute einen sehr netten und langen Brief von Herr Prof. H. Cramér. Er schreibt darin um den von Ihnen so freundlich inaugierten Plan wegen des Komitees für intellektuelle Flüchtlinge. Ich bin wirklich gerührt, dass sich so viele Menschen rühren, uns zu helfen. Was ich so an menschliche Nettigkeit und Güte und Freundlichkeit in Norwegen und Schweden erfahren und erleben durfte, hat etwas Versöhnnendes im Hinblick auf das, was ich zwischen 33 und 39 im dritten Reich zu sehen gezwungen war. Was ich neulich über das oben erwähnte Komitee von Fräulein Filseth hörte, sie scheint direkt einen Brief in dieser Sache bekommen zu haben – und was ich ihnen ja mitteilte, passt nicht zusammen mit dem was Cramér schrieb. Aber schliesslich müssen Sie und Cramér ja über diese Dinge besser orientiert sein. v. Borbély sandte mir vor wenigen Tagen die Arbeit der er mir gewidmet hat [18]. – Ich arbeite hier nun etwas, langweilige Dinge, die mich ein Kollege in Göteborg gebeten hat. Man merkt sonst hier im Schloss den Zustand der Auflösung: Die Anzahl der Menschen nimmt beständig ab, $\frac{dy}{dx} < 0$. Dr. Kuhn und ich waren wirklich die letzten erwachsenen Flüchtinge aus Norwegen, die ins Lager kamen. Nach uns kamen nur 3 Mysteriöse Flüchtlinge direkt von Berlin! In plombierten Güterwagen. Und dann noch ein junger Mann aus Lettland. Was diese reisende an Elend und Leid erlebt haben ist z.T. schrecklich, Angehörige verschleppt oder getötet; da sind Kinder, deren Eltern deportiert u.s.w. Aber abgesehen davon ist es auch interessant alle diese zusammengewürfelten Menschen zu sehen, so verschieden nach Bildung und Herkunft!

Leben Sie herzlich wohl!

Viele Grüsse Ihr ergebener Ernst Jacobsthal.

Noch eine Frage: Kennen Sie etwas über den Unterschied in der Lebensumkosten im Uppsala und Lund. Ist Lund wirklich so viel billiger? Ich bin ja ganz ohne Erfahrung. In Trondhem konnte ich bei bescheidenem Leben mit 150-170 Kr. auskommen. Und was rechnet man hier in Lund oder Uppsala? Wenn Sie mir darüber irgend eine Auskunft geben könnten, wäre ich Ihnen sehr dankbar! d. O.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz, I received today a very nice, and long letter Mr. Prof. H. Cramér. He writes there about the plan so kindly inaugurated by you regarding the Committee for Intellectual Refugees. I am really touched by that so many people are moved and help. What I have so much been possible to experience and witness in human kindness and goodness and friendliness in Norway and Sweden, saw something forgiving in view of that what I was forced to see in the Third Reich between 33 and 39. What I recently heard from Miss Filseth about the aforermentioned committee, she seems to have got directly to read a letter in this matter – and, what I told you, does not agree quite with what Cramér writes. After all, you and Cramér should be better informed about it. v. Borbély sent me, a few days ago, the paper that he dedicated to me [18]. – I work here now a lttle, boring things that a colleague in Göteborg asked me about. Otherwise, one notices here in the Castle the state dissolution: The number of people is steadily decreasing, $\frac{dy}{dx} < 0$. Dr. Kuhn and I were indeed [151] the last adult refugees from Norway that came to the camp. After us came only 3 mysterieus refugees directly from Berlin![152] In sealed wagons. And further a young man from Latvia. What thies travellers suffered in misery and hardship is in part chocking: Relatives deported or killed; there are children whose parents were deported etc. But besides this it is also interesting to watch all these people chequered together, so different in education and origin! May you live well!

Sicererly yours Ernst Jacobsthal.

One more question: Do you know anything about the difference in living costs in Uppsala and in Lund. Is Lund really much cheeper? I am without any experience. In

[151]Paul or Pavel Kuhn (1901-1984), Chech mathematician, student at the German University of Prague, became early interested in prime number theory, in 1921, took part in Christian Ehrenfels's seminar on this subject and got the impetus for his first publication, promotion 1926 [101]. As for many people, WW II upset the life of the Kuhns. His mother and sister died in KZ Buchenwald, while his wife Marta managed to escape before the beginning to the war. Kuhn saved himself to Norway where he got a job at TU. In 1942 he was – like Ernst Jacobsthal - obliged to flee to Sweden. The Kuhns were reunited in Uppsala in 1945. In Uppsala Kuhn was first an archhive worker, later Harald Cramér got him an employment as an actuarian at a superannuation fund. Purposefully, Kuhn continued his work in prime number theory, where he developed the "weighted sieve method". Kuhn is sometimes evoked in connection with the "elementary" proof of the prime number theorem, usually associated with Atle Selberg and Paul Erdös. In 1972 Kuhn quit his actuarian job and could with undiminished energy devote himself to mathematical research in the few years that remained him. [105].

[152]The identity of these "mystic refugees" has been disclosed. They were: 1) Kurt Lewin (b. 1918 in Berlin); 2) Joachim Marcuse (b. 1917 in Berlin); 2) Gerda Marcuse (b. 1923 in Berlin); the last two probably brother and syster. The first named made later a career in Sweden as a musician.

Trondheim I could, living modestly, make it with 150-170 Crowns. And what does one reckon here in Lund or Uppsala? *Idem.*

2.57.5 Letter Alingsås Feb 21 1943

Lieber Herr Riesz, man kann die Menschen nach verschiedenen Prinzipien in 2 Klassen einteilen, z. B. in die Kaffeetypen und die Biertypen. Ich gehöre zum Kaffeetypus, denn ich liebe im allgemeinen kein Bier. Ich glaube, dass der Biertypus hauptsächlich in Deutschland vorkommt. Eine andere Einteilungsprinzip ist die Eigenschaft ein guter oder schlechter Briefschreiber zu sein. Wenn Sie von sich behaupten, zur letzteren Kategorie zu gehören, so gehören wir in eine und dieselbe Klassse. Nun bin ich in den letzten Jahren durch den Zustand in den mich der Hitlerwahnsinn gebracht hat, darauf angewiesen gewesen gegen meine Neigungen viele Briefe zu senden. Dass Ihrem Bruder gut geht, freut mich vom ganzen Herzen! Man ist über jede solche Nachricht heute doppelt froh. – Haben Sie also vielen herzlichen Dank für Ihren lieben Brief und alle Ihre so freundliche Bemühungen. Prof Dahlberg in U. hat sich einmal auch der Sache angenommen, auch Dr. Kuhns. Ich hoffe, dass er nun seine Untersuchungen über die Brunsche Siebmethoden in U. vollendet. Er hat sich darauf spezialisiert. Eine Arbeit hat er in T. darüber veröffentlicht. Sie is nicht ganz in Ordnung, lässt sich aber in Ordnung bringen. Die Resultate sind ganz schön. Die Verallgemeinerung dieser Resultate steht noch aus. Er hatte sie fertig. Aber auch hier musste er nach Durchsicht meinerseits alles ändern. Im Prinzip ist alles in Ordnung, aber im Grunde sind diese sogenannten "elementaren" Methoden der Primzahltheorie recht kompliziert und es schleichen sich leicht Fehler ein, wenn man keine rechte Vorbildung hat. Ich denke, dass K. nun in U. ein einwandfreies Manuskript herstellen kann, da er seit dem Sommer an den Untersuchungen gearbeitet. Ich fahre hier definitiv am 27.2. morgens weg. Ich bleibe 3 Tage in Stockholm und gehe dann nach U. Von dort schreibe ich Ihnen meine neue Adresse [in U]. Diese Woche fahre ich noch eimal nach Göteborg, um mit Prof. Granholm (Brückenbau) einiges zu besprechen und um Prof. Nachmanson zu sehen. Es ist zu dumm, das ich alle Trondheimer Manuskripte zurücklassen musste, da sie zum grossen Teil druckfertig sind. Hat Ihnen Dr. Sigmund Selberg seine gute Doktorarbeit gesandt und *grüssen Sie ihn schön von mir.* (Sie brauchen mich nur als Erik zu bezeichnen!) Seine Adresse ist Dr. Sigmund Selberg, Øvre Bergsvingen, Trondheim. Die Arbeit behandelt die Verteilung quadratfreier Zahlen und enthält schöne Metoden und Resultate.

Herzlichen Gruss Ihr ergebener Ernst Erich Jacobsthal

Sollten Sie mal nach Stockholm kommen, lassen Sie es mich bitte wissen, dann könnte man sich dort treffen.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz, One can divide people according to various principles into 2 classes, e.g. into the coffee types and the beer types. I belong to coffee type, because I do not like in general beer. I think that the beer type is mainly spread in Germany. A different principle of division is the property to be a good or a bad writer of letters. When you claim to belong to the last category, then we belong to one and the same class. But in the last years I have been led through the state, into which the Hitler madness has brought me, against my inclinations, to send many letters. That your brother is doing well gives me enormous pleasure! One is doubly glad at such a piece of news. – Many hearty thanks for your kind letter and all your so friendly endeavours. Prof. Dahlberg[153] in U. has once also devoted himself to the method, and so Dr. Kuhn. I do hope that he now in U. will complete his investigations on the Brun sieve method. He has specialized himself on this. In T. he published a paper about it. It is not quite in order, but also here he had, after a revision from my side, to change all. The results are quite nice. The generalization of these resultats still remains. He had it ready. But, after checking by me, he had to change everything. In principle all is in order, but basically these so-called "elementary" methods in prime number theory are rather complicated and errors do slip in easily, if one has no good examples. I think that K. also in U. will be able to present an irrevocable manuscript, because it is told that he has worked all summer on these investigations. I depart definitively from here on 2 February, in the morning. I shall be 3 days in Stockholm and go then to U. From there I send you my new adress [in] U.. This week I go, once more, to Göteborg to discuss something with Prof. Granholm (bridge base), and to see Prof. Nachmanson[154]. It is silly that I had to leave behind all my Trondheim manuscripts, while they are in their main parts ready to be printed. Did Dr. Sigmund Selberg send you his excellent Ph.D. thesis, please, give *my very best regards to him*. (You need only refer to me as Erik!) His adress is Dr. Sigmund Selberg, Øvre Bergsvingen, Trondheim. The paper deals with the classification of square free numbers and contains beautiful methods and results.

[153]Gunnar Dahlberg (1893956), geneticist and statistician, physician, from 1936 director of the State Institute of Racial Biology and professor of racial biology at UU. During D's time as director of the Institute, it dismantled its openly rasistic vocabulary and its activities were instead directed mainly to statistical and medicial questions. D's great scientific and popular production concerns genetic, anthropologic and socio-medical questions, medical statistics etc.; among other things, one notices Arv och ras (1940, Heritage and race) and Raser och folk (with Joachim Israel 1955, Races and peoples). [114]. Dahlberg was, as a professor, succesor of Herman Lundborg (1868-1943), the illfamed and pro-Nazi professor of racial biology. Personal communication by Daniel Kallós.

[154]Ernst Nachmanson (1877-1943), MD and Ph.D, professor of classical languages GU.

Hearty greetings, Yours faithfully Ernst Erich Jacobsthal

Should you come some time to Stockholm, please, let me know, then we could meet there.

2.57.6 Letter Uppsala Mar 16, 1943

Anundsgt. 3 c/o Forsell Uppsala, Tel. 36553

Lieber Herr Riesz, nun bin ich seit 12 Tagen hier nach einem 5-tägigen Zwischenaufenthalt in Stockholm, während dessen ich auch Prof. Cramér auf seinem Institut besuchte. Ich sprach dort mit eine Menge von allten Bekannten, zum grossten Teil Norrwegern aus der Gesandtschaft. Nach mir ist noch der frühere Rektor der Techn. Hochschule in Trondheim mit seiner Familie über die Grenze gekommen. Mein Freund Prof. Tambs Lyche in T. ist nun den aus den Amt entlassen worden. Hoffentlich senden die Nazis ihn nicht aus dem Lager Falstad nach Deutschland. Es ist traurig alles dies mit ansehen zu müssen, ohne etwas dagegen tun zu können. Ich habe ein gutes Zimmer hier gefunden (durch die Norwegische hiesige Kolonie) und arbeite meist auf dem Institute, das ich mit der Strassenbahn in 15 Minuten erreiche. Zu Fuss ist es etwa 30 Minuten, da ich am äussersten Bande der Stadt in einem villenartigen Hause wohne. – Morgen will ich – soeben kommt Dr Kuhn, so muss ich einstweilen abbrechen. – 17.3. Also nun will ich fortsetzen. Ich hatte bisher für Prof. Granholm einige Kontrollrechnungen ausgeführt zu einer Arbeit über Hängebrücken, die er gerade im Druck hat. Es handelte sich darum gewisse trigonometrische Reihen durch geschlossene Ausdrücke auszuwerten. Seine Methoden sind ganz originell, aber vom Standpunkt der mathematischen Strenge nicht gerade angenehm. Mit den /reihen geht aber alles tadellos. Nun kann ich mich wieder eigenen Arbeiten widmen, so dass ich einige Vorträge halten kann. Wenn Sie eine Antwort auf die interessante Frage haben wollen, ob das alte Deutschland vom dritten Reiche im Grundcharakter sehr verschieden war oder ähnlich, so lesen Sie in der Märzausgabe der 50 öre Zeitschrift "Det bästa" S. 100 die linke Spalte daselbst. Ich war verblüft, als ich das las. – Sollten Sie einmal nach Stockholm kommen und das zeitig genug in voraus wissen, so wäre ich Ihnen sehr dankbar wenn Sie mich zeitig genug wissen liessen. So würde ich vielleicht die Möglichkeit haben, Sie dort zu sprechen. Es dauert ungefähr 5-6 Tage, wenn man an das "Socialstyrelsen" ein Reiseerlaubnis zuschreibt, bis man Antwort hat. So leben Sie einstweilen wohl!

Herzliche Grüsse Ihr E. Jacobsthal,

Translation from German:

Anund Street. 3 c/o Forsssell Uppsala, phone 36553

Dear Mr Riesz, since 12 days I am now here after a 5 day stopover at Stockholm, during which I also visited Professor Cramér at his Institute. I spoke about the legation, after me have arrived over the boarder also the former Rector of the Technical University in Trondheim with his family. My friend Professor Tambs Lyche in T. has been fired from his position. Hopefully, the Nazis won't send him from the camp at Falstad to Germany. It is sad to have to look at all this, not being able to do anything against it. Ich have found here a nice room (through the local Norwegian colony) and mostly work at the Institute, which I reach in 15 minutes. By foot it is some 30 minutes, as I live in the outskirts of the city in a residentail district. – Tomorow I will – right now comes Dr. Kuhn, so I must make a break. – Mar 17. So I will continue now. So far I have done some checking work for Professor Granholm[155], a paper on suspension bridges, which is right now in print. It is about evaluating certain trigonometric series by closed expressions. His methods are rather original, but from the point of view of mathematical rigour not directly agreeable. With the / series everything goes, however, irreproachably. Now I can again devote myself to my own work, in order to be able to give talks. If you want an answer to the interesting question, if the old Germany basically differred, or is similar to the Third Reich, please, read the March issue of the 50 öre[156] Magazin "Det bästa"[157] p. 100 the left column there. I was astouned when I read it. – If you should come one day to Stockholm and I know this early enough in advance, I would be very obliged to you to let me know it in good time.

Then I might have a chance to talk to you. It takes about 5-6 days when one writes the "socialstyrelsen" before one gets the reply . So live well meanwhile!

Yours faithfully, E. Jacobsthal.

[155]Hjalmar Granholm (19002), building technician, professor at CTH 19385. G. became 1929 the first Doctor of Technology in the building branch in Sweden. He started his own consulting engineering office in 1951 och took part at the creation of many important edifices in Sweden, such as the Consert House in Göteborg, the "Katarinahissen" (Cathrine Elevator), Statens historiska museum, Thulehuset, Södersjukhuset, Bonnierhuset och "Skatteskrapan" all in Stockholm), the older Svinesund bridge [connecting Sweden and Norway], the motorway bridge connecting the town Östersund with the island Frösön, and the Tingstad Tunnel under Göta älv in Göteborg.

As a researcher he wrote many epoch-maling papers on brick-, wood- and concrete constructions. He combined there experimental data from tests in the laboratoriy and in the field with elegant mathematical analyses, and developed practical dimensioning methods, taking care of non-linear properties of the material as well as time dependent effects. [114].

[156]1 Crown = 100 Öre.

[157]Swedish issue of "Reader's Digest".

2.57.7 Letter Uppsala Sep 25, 1943

Anundsgt. 3 Uppsala

Lieber Herr Riesz, Ich wollte Ihnen schon lange schreiben nach Ihrem so netten und freundlichen, wenn auch kurzen Besuch hier oben, konnte aber aus verschiedenen Gründen den innerer Hemmungen nicht den rechten Entschluss dazu fassen. Also nun soll es endlich geschehen. Ich hatte im Sommer eine Periode von Arbeitsunlust, z.T. bedingt durch die spannenden politischen Ereignisse auf dem Kriegstheater, aber nur zum Teil. Ich war etwas müde und kam aus der eigenen Arbeit etwas heraus, da ich wurde durch eine Arbeit für Prof. Cramér in Anspruch genommen. Nun geht es wieder besser. Ich war einige Male in Stockholm, einen sehr netten Tag verbrachte ich bei Cramérs. Nagell heiratet wieder, ich glaube heute. Für ihn und die Kinder ist es besser so. – Wie geht es Ihnen selbst und den Töchtern? Ist die zweite nun auch verheiratet? Grüssen Sie sie doch bitte recht herzlich von mir. Wenn est nicht so schrecklich weit von hier wäre, würde ich so gerne mal nach Lund kommen, um Sie zu besuchen. Man kann sich gut mit Ihnen fachwissenschaftlich unterhalten, so ganz anders als mit Nagell, dessen Gedanken immer wo anders sind. Das ist so schade. Von hier ist ein sehr netter deutscher Emigrant nach Lund gekommen, Herr K. Vogel. Er ist Journalist, war Redaktör an einer kommunistischen Zeitung in Berlin, stammt aus einer rheinischen Pastoren Familie und ist ungewönlich sympatisch. Er hat in Lund Archivarbeit. Er war nach Norwegen emigriert, dort vonr der Gestapo mehrfach arretiert und ist von der Gestapo direkt entflohen. Von ihm war neulich, ich glaube vom 22. August, in GHT ein langer und interessanter Artikel über Mussolinis erstes Konzentrationslager auf den Liparischen Inseln. Vogel hatte das Glück, durch einen Zufall dieses Lager zu entdecken und der Welt das mitzuteilen.[158] Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie Herrn Vogels etwas zu nützen könnten. Ich schrieb ihn, er möchte Sie doch mal besuchen. Erinnern Sie doch noch, dass ich Sie bei Ihrem Besuche nach einer Identität fragte, zwei Polynome betreffend. Sie wiesen mich auf eine Hausdorffsche Arbeit hin, die ich übrigens kennte, wie ich nachher feststellte. Apropos Hausdorff: Er soll sich nach einer Mitteilung von Hellinger, das ich möglich halte, mit seiner Frau das Leben genommen haben, um die Deportation zu entgehen. Nun zurück zu den Polynomen. Ich stellte hinterher die Sache klar. Es hängt zusammen mit Legendreschen Polynomen. Die

[158]The article could not have appeard on 22 August, because GHT did not appear on Sundays. Indeed, it appeared on Friday 17 Aug 1943 under the title "Möte med Mussolinis fångar. Hur vår tids första koncentrationsläger blev upptäckt." (Encounter with Mussolini's prisoners. How the first concentration camp of our time was uncovered.) Editor. Otherwise,the first concentration camps in Europe where created by Lenin and Trotsky in 1918. Suddenly all prisons in Russia were filled with inmates, so quickly new space had to be found.

Identität, um die es sich handelte, sah folgendermassen aus

$$\sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda} (1+t)^{2lamda} (1-t)^{2n-2lamda} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda} \binom{2n-lamda}{n-lamda} t^{2lamda}. \tag{2.1}$$

Der Ausdrück linker Hand stammt aus einem Minimumproblem aus dem Gebiet der Erbschaftsforschung. Nun ist ja bekanntlich

$$(1-z)^n P_n(\frac{1+z}{1-z}) = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda} z^l amda, \tag{2.2}$$

wo $P_n(z)$ das n-te Legendreschen Polynom bedeutet. Daraus folgt ohne Mühe, dass (2.1) im Grunde identisch ist mit folgender Formel

$$2^{2n} P_n(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})) = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda} \binom{2n-2lamda}{n-lamda} t^{2lamda}. \tag{2.3}$$

Diese Formel (2.3) ergibt sich unmittelbar aus

$$\frac{1}{1+2xy+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n.$$

wenn man $x = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ tut, da dann

$$\frac{1}{1-(t+\frac{1}{t})y+y^2} = (1-yt)^{-\frac{1}{2}} (1-\frac{y}{t})^{-\frac{1}{2}}$$

wird. Man hat also rechts alles nur in Potenzen nach y zu entwickeln, auszumultplizieren und die Formel

$$2^{2lamda} (-1)^l amda \binom{-\frac{1}{2}}{lamda} = \frac{2lamda}{lamda}$$

zu benutzen. Die Formel (2.3) ist nun identisch mit der bekannten Formel, die $P_n(\cos)$ in ein Cosinuspolynom entwickelt:

$$P_n(\cos) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda} \binom{2n-2lamda}{n-lamda} \cos(n-2lamda). \tag{2.4}$$

Die in der letzten Ausgabe von Pascals "Repetorium" [139], S. 1400 hierführ von E. Hilb angebene Formel (15) is fehlerhaft und durch die Formel (2.4) zu ersetzen. Mit (2.1) ist

übrigens gleichwertig die Formel

$$\sum_{lamda=0}^{n}\binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}(1-y)^{2lamda}(1+y)^{2n-2lamda}=2^{2n}\sum_{lamda=0}^{n}\binom{n}{lamda}^{2}y^{2lamd} \tag{2.5}$$

Aus der Identitäten (2.1), (2.5) ergeben sich natürlich viele Identitäten in Binomialkoeffizienten, die z.T. die direkt schwer beweisbar sein dürften und in der üblichen Formelsamlungen für solche Identitäten, z.B. Netto, "Kombinatorik", fehlen. z. B.

$$\begin{aligned}2^{2^n}\quad\sum_{lamda=0}^{n}\binom{n}{lamda}2^{2lamda}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad&=\\ =\sum_{lamda=0}^{n}\binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}3^{2lamda}\sum_{lamda=0}^{n}\binom{n}{lamda}^{2}3^{2lamda}\qquad&=\\ =\sum_{lamda=0}^{n}\binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}2^{2lamda}&\end{aligned}$$

u.z.w. Übrigens scheint auch diese Formel

$$\frac{x^m}{(1-x)^{n+1}}P_n(\frac{1+x}{1-x})=\sum_{lamda=0}^{\infty}\binom{lamda}{n}^{2}x^{l}amda\quad|x|<1 \tag{2.6}$$

unbekannt zu sein, aus der

$$\sum_{lamda=0}^{\infty}\binom{lamda}{n}^{2}x^{l}amda=\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}\sum_{lamda=0}^{n}\binom{lamda}{n}^{2}x^{l}amda\quad|x|<1 \tag{2.7}$$

folgt. Auch diese Identität enthält Relationen in Binomialkoeffizenten, die direkt nicht leícht zu erkennen sind.

Aus (2.3) folgt nun, dass die algebraische Gleichung

$$\mathfrak{G}_n(x)=\sum_{lamda=0}^{n}\binom{lamda}{lamda}^{2}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}x^{l}amda=0 \tag{2.8}$$

lauter verschiedene Wurzel hat, die alle auf dem Rande des Einheitskreises liegen. Direkt algebraisch lässt sich dies durch Induktion nach einiger Rechnung, wenn man folgende beide Sätze passend kombiniert:

Satz 1 *Dann und nur dann ist*

$$\sum_{lamda=0}^{n} a_l amda x^{n-lamda} = 0$$

eine K-Gleichung, d.h. eine, deren Wurzel alle im Inneren des Einheitskreises liegen, wenn auch

$$\sum_{lamda=0}^{n-1} a_l amda^{(1)} x^{n-1-lamda} = 0$$

eine solche ist und $|a_0| > |a_n|$ *ist. Dabei ist*

$$a_l amda^{(1)} = \overline{a_0} a_l amda - \overline{a_0} a_l amda a_{-1} - a_l amda \overline{a_{n-lamda}}.$$

Satz 2 *Dann und nur dann hat* $f(x) = \sum_{lamda=0}^{n} a_l amda x^{m-lamda} = 0$ *lauter (von einander verschiedene) Wurzeln vom absoluten Betrag 1, wenn die Koeffizienten der Bedingungen*

$$a_0 \overline{a_0 lamda} = \overline{a_l amda} a_{n-lamda} \quad (lamda = 0, 1, \ldots, n)$$

genügen und $f'(x) = 0$ *eine K-Gleichung ist .*

Wendet man nämlich den Satz 1 auf $\mathfrak{G}'_{n+1}(x) = 0$ an, so folgt nach einiger Rechnung

$$\sum_{lamda=0}^{n-1} a_l amda^{(1)} x^{n-1-lamda} = 16(n+1)\binom{2n}{n}\mathfrak{G}'_n(x).$$

Und hieraus ergibt sich mit / **??** der Induktionsbeweis.

Für eine normierte Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$, deren sämtliche Wurzel auf dem Rande des Einheitskreises liegen, gilt dass die triviale Abschätzung

$$|f(z)| \geq ||z| - 1| \tag{2.9}$$

Man muss weiter diese Abschätzung nach unten aber ersetzen durch eine andere, die so aussieht

$$|f(z)| \geq \sqrt[n-1]{\frac{\Delta}{n^{\frac{n}{2}}}} |1 - |z|^2|^{\frac{n}{2}}. \tag{2.10}$$

Hierin bedeutet in der Wurzel $\sqrt[n-1]{\frac{\Delta}{n^{\frac{n}{2}}}}$ der Ausdruck Δ nichts weiter als $\Delta = \sqrt{\mathcal{D}}$, worin $\mathcal{D}$ die discriminante des Polynoms is. Man kann (2.10) aus dem Hadamardschen

Determinantensatz gewinnen. Für das spezielle Polynom $f(z) = (z - z_1)^n$, $|z_1| = 1$, ist bei $z \neq 0$, $|z| \neq 1$ stets (2.10) besser als (2.9). Ist aber $f(z) \not\equiv (z - z_1)^n$, so ist

$$|\mathcal{D}| < n^n$$

und dann ist

$$0 < \sqrt[n-1]{\frac{\mathcal{D}}{n^{\frac{n}{2}}}} = \eta < 1$$

Dann ist für

$$\frac{1-\eta}{1+\eta} < |z| < \frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{2.11}$$

stets (2.10) nicht schlechter als (2.9) und ausserhalb des Ringes (2.11) ist es umgekehrt. Im Falle $n = 2$ etwa $f(z) = (z-z_1)(z-z_2)$, so gilt in (2.10) das Gleicheitszeichen längs des Orthogonalkreises durch z_1, z_2 zum Einheitskreis. Ausserhalb dieser Orthogonalkreislinie gilt stets das Zeihen $>$. Im Falle $n = 3$, $f(z) = (z - z_1)(z - z_2(z - z_3)$ gilt ausser in z_1, z_2, z_3 noch in 2 weiteren Punkten z_1', z_2', sonst überall $>$. Dagegen gilt in (2.10) bei $n > 4$ für $|z| \neq 1$ im Allgemeinen stets das Zeichen $>$, wenn man von gewissen Polynomen absieht.

Ich würde mich freuen, von Ihnen mal wieder zu hören.

Herzliche Grüsse Ihr Ernst Jacobsthal.

Translation from German:

Dear Mr Riesz, I wanted to write to you already a long time after your so nice and friendly, although short visit, but out of various reasons I could not adjust my inhibition to the right decision. Thus now it will finally be done. In the summer I had a period of mood for work, partly caused by the exiting political events on the theater of war, but only partly. I was a little tired and came somewhat away from my own work, because I was engaged by a job for Professor Cramér. Now it is again better. I was a few times in Stockholm, spending one very nice day at the Cramérs. Nagell will marry again, I believe today.[159] For him and the children it is better that way. – How are you yourśelf and how are your daughters? Is the second one also married now? Please, give hearty greetings to them from me. Had it not been so frightfully far from here, I would have liked to come to Lund some time to visit you. One can entertain oneself scientifically with you; it is quite different with Nagell whose thoughts are always somewhere else. This is a pitty. From here a very nice German emigrant has gone to Lund, Mr. K. Vogel. He is a journalist, was editor at a communist newspaper in Berlin, originates from a Rheinian pastor family and is unusually sympathetic. He has an archive job in Lund. He had emigrated to Norway,

[159] Nagell married on 24 Sept.

there he was arrested several times by the Gestapo and fled direcly from the Gestapo. By him there was, namely I believe, on 22 August, in GHT a long and interesting article about Mussolini's first concentration camp on the Liparian Islands. Vogel was lucky to discover this camp by chance and to tell the world about it. I would be grateful to you if you could do something of use for Mr. Vogel. I intend to write to him that he should visit you one day. Do you still remember that I asked you during your visit about an identity concerning two /s. You referred me to a paper by Hausdorff, which I by the way knew, as I established later. Apropos Hausdorff: According a message by Hellinger, which I consider as plausibel, he should have comitted suicide together with his wife, in order to avoid deportation.[160]

Now back to the /s. Afterwards I made the thing clear. It is connected with *Legendre /s*. The identity in question looked as follows

$$\sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda}(1+t)^{2lamda}(1-t)^{2n-2lamda} = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-lamda}{n-lamda}t^{2lamda}, \tag{2.1}$$

The expression in the / arises from a minimum problem in the area of legacy research. Now it is well-known that

$$(1-z)^n P_n(\frac{1+z}{1-z}) = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda} z^l amda, \tag{2.2}$$

where $P_n(z)$ is the n-th Legendre /.

From here follows, without trouble, that (2.1) basically is identical with the following formula

$$2^{2n} P_n(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})) = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}t^{2lamda}. \tag{2.3}$$

This formula (2.3) is obtained immediatelly from

$$\frac{1}{1+2xy+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n.$$

setting $x = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$, because then

$$\frac{1}{1-(t+\frac{1}{t})y+y^2} = (1-yt)^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{y}{t})^{-\frac{1}{2}}.$$

[160]Felix Hausdorff (1868-1942), famous German mathematician. Perhaps his best known work is his book "Grundzüge der Mengenlehre" (Foundation of Set Theory). Being Jewish, like his wife, strong measures where taken against them, and in 1941 he was scheduled to go to an internment camp but managed to avoid being sent. Together with his wife, and his wife's sister, he committed suicide on 26 January. [110].

Thus one has, to the right, to expand all in powers of y, to carry out the multplication and to apply the formula

$$2^{2lamda}(-1)^{l}amda\binom{-\frac{1}{2}}{lamda} = \frac{2lamda}{lamda}.$$

Formula (2.3) ist now identical with the known formula for expanding $P_n(\cos)$ in a cosine /:

$$(P_n(\cos) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda} \cos(n-2lamda). \quad (2.4)$$

In the last edition of Pascal's "Repetorium" [139], p. 1400 this formula (15), given by E. Hilb, is incorrect and has to be replaced by (2.4). Besides (2.1) is equivalent to the formula

$$\sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda}(1-y)^{2lamda}(1+y)^{2n-2lamda} = 2^{2n} \sum_{lamda=0}^{n} (\binom{n}{lamda})^2 y^{2lan} \quad (2.5)$$

From the identities (2.1), (2.5) there follow of course several identities in binomial /s, which in part may be difficult to prove directly and lack in the usual collections of formulae for such identities, e.g. Netto, "Kombinatorik".

$$2^{2^n} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda} 2^{2lamda} \qquad =$$

$$= \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda} 3^{2lamda} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{n}{lamda}^2 3^{2lamda} \quad =$$

$$= \sum_{lamda=0}^{n} \binom{2lamda}{lamda}\binom{2n-2lamda}{n-lamda} 2^{2lamda}$$

etc. Besides, the following formula

$$\frac{x^m}{(1-x)^{n+1}} P_n(\frac{1+x}{1-x}) = \sum_{lamda=0}^{\infty} \binom{lamda}{n}^2 x^{l}amda \quad |x|<1 \qquad (2.6)$$

seems to be unknown, from which follows

$$\sum_{lamda=0}^{\infty} \binom{lamda}{n}^2 x^{l}amda = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \sum_{lamda=0}^{n} \binom{lamda}{n}^2 x^{l}amda \quad |x|<1. \qquad (2.7)$$

Also this identity contains relations in binomial /s, which are not easy to recognize directly.

From (2.3) it follows now that the algebraic equation

$$\mathfrak{G}_n(x) = \sum_{lamda=0}^{n} \binom{lamda}{lamda}^2 \binom{2n-2lamda}{n-lamda} x^l amda = 0 \qquad (2.8)$$

has nothing but distinct roots that all are situated on the boundary of the unit circle. Directly algebraically one can show this by induction after some calculation, by combining suitably the following two theorems:

Theorem 1 *The equation*

$$\sum_{lamda=0}^{n} a_l amda x^{n-lamda} = 0$$

has nothing but distinct roots $\Longleftrightarrow$ $/itisaK-equation, i.e.anequationallrootsofwhichlieintheinteri$
0is such an equation and it holds $|a_0| > |a_n|$. Here

$$a_l amda^{(1)} = \overline{a_0} a_l amda - \overline{a_0} a_l amdaa_{-1} - a_l amda\overline{a_{n-lamda}}.$$

Theorem 2 *The equation* $f(x) = \sum_{lamda=0}^{n} a_l amda x^{m-lamda} = 0$ *has nothing but distinct roots of modulus 1* $\Longleftrightarrow$ $/the/ssatisfytheconditiona_0\overline{a_0 lamda} = \overline{a_l amdaa_{n-lamda}}$ $(lamda = 0, 1, \ldots, n)$and $f'(x) = 0$ is a K-equation.

Namely, when one applies / **??** to $\mathfrak{G}'_{n+1}(x) = 0$ it follows after some calculation that

$$\sum_{lamda=0}^{n-1} a_l amda^{(1)} x^{n-1-lamda} = 16(n+1)\binom{2n}{n}\mathfrak{G}'_n(x).$$

And from here one obtains the induction proof with / **??**.

For a normalized equation $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$, with all roots on the boundary of the unit circle, holds the trivial estimate

$$|f(z)| \geq ||z| - 1| \qquad (2.9)$$

One must, however, replace this estimate from below by another, which looks like this:

$$|f(z)| \geq \sqrt[n-1]{\frac{\Delta}{n^{\frac{n}{2}}}} |1 - |z|^2|^{\frac{n}{2}}. \qquad (2.10)$$

Here the expression Δ in the root $\sqrt[n-1]{\frac{\Delta}{n^{\frac{n}{2}}}}$ means nothing else but that $\Delta = \sqrt{\mathcal{D}}$, where $\mathcal{D}$ is the discriminant of the /. One can derive (2.10) from

Hadamard's determinant theorem. For the special / $f(z) = (z - z_1)^n$ and $|z_1| = 1$, $z \neq 0$, $|z| \neq 1$, equation (2.10) is always better than (2.9). But if $f(z) \not\equiv (z - z_1)^n$, then

$$|\mathcal{D}| < n^n$$

and so

$$0 < \sqrt[n-1]{\frac{\mathcal{D}}{n^{\frac{n}{2}}}} = \eta < 1$$

For

$$\frac{1-\eta}{1+\eta} < |z| < \frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{2.11}$$

/ (2.10) is not worse than (2.9) and outside the ring (2.11) it is the opposite. In the case $n = 2$, say, $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, holds in (2.10) the sign of equality along the orthogonal circle to the unit circles through z_1, z_2. Outside this orthogonal circle line holds always the sign $>$. In the case $n = 3$, $f(z) = (z - z_1)(z - z_2(z - z_3)$ holds, except in z_1, z_2, z_3, in 2 more points z_1', z_2' the sign in (2.10), otherwise everywhere $>$. On the contrary, one has in (2.10) if $n > 4$ for $|z| \neq 1$ in general always the sign $>$, if one disregards certain /s. I would be happy to hear from you again, hearty greetings,

Yours faithfully Ernst Jacobsthal .

2.57.8 Letter Uppsala Mar 24, 1944

Anundsgt. 3 Uppsala

Lieber Herr Riesz, meine Gedanken sind in diesen Tagen viel bei Ihnen gewesen, um an Ihre Sorgen um Ihre Familie in Ungarn teilzunehmen. Um Ihnen das zu sagen, schreibe ich diese Zeilen. Man kann nur hoffen, dass die Entwicklung des Krieges soweit vorgeschritten ist, um im Verein mit dem Widerstand des ungarischen Volkes die Pläne, die Hitler vorhat, zum Scheitern zu bringen. Meine innigsten Wünsche gelten Ihnen und den Ihrigen! Ich sah gestern das letzte Telegramm, dass Sonntag Abend noch aus Budapest abging und in Stockholm ankam. Hoffentlich geht es Ihnen und Ihren Töchtern gut! Ich war neulich in Stockholm, um Dr. Kallós zu konsultieren. Sonst arbeite ich mit einigen Vorträgen, die im Mai oder schon im April getragen sollen, Zahlentheorie.

Herzliche Grüsse Ihnen und den Ihrigen. Ihr Ernst Jaconbsthal.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz, My thoughts have, in these days, been with you, to share with you your worry about your family in Hungary.[161] And I write these lines in order to tell it. One can only hope that the development the war has proceeded that far that, together with the resistance of the Hungarian people, the plans, that Hitler nourishes, will fail. My most intimate wishes concern you and your loved ones! Yesterday I saw the last cable that Sunday evening still left Budapest and reached Stockholm. I do hope that all is well with you and your daughters! I was recently in Stockholm in order to consult Dr. Kallós[162]. Otherwise I work on some talks that will be delivered in May or already in April, number theory.

Hearty greetinsg to you and your loved ones, Yours faithfully Ernst Jaconbsthal.

2.57.9 Letter Uppsala Aug 11, 1945

Salagt. 36A Uppsala

Lieber Herr Riesz, ich habe eine Ewigkeit nichts von Ihnen gehört. So will ich Ihnen mal schreiben, um Sie aus Ihrer Schweigsamkeit herauszulocken. Seit wir uns das letzte Mal nächtlicher weise hier trafen, ist ja das Rad der Weltgeschichte in immer schnellerem Tempo gerollt und wir stehen nun vor einer Zeit, in der die Zeitungen und das Radio wieder von wohltuender Langeweile sein werden. Aber die Trümmern und das materielle Elend und nochmehr das menschliche Leid, das diese Jahre des Grauen zurücklassen, sind grauenvoll und unvorstellbar. Mich beschäftigt oft die Frage: was haben Sie von Ihrer Familie daheim gehört? Einige haben ja direkt oder indirekt positive Nachrichten bekommen. Viele sind aber noch immer in Ungewissenheit. Unter den Flüchtlingen hier sind eine ganze Reihe Ungarn,

[161] All this refers the occupation of Hungary by the Germans. This led to severe measures against the Hungarian Jews, until then these had been allowed to live in relative freedom. The operations involved were led by none less than Adolf Eichmann.

[162] Paul Kallós (1902-1988), Hungarian physician, came together with his German wife Liselotte to Sweden in 1934. Their son Daniel Kallós was born in 1937. In 1939 the family moved to Stockholm. They became Swedish citizens in 1944 and moved then to Helsingborg where both parents practiced medicin. Paul Kallós had tight contacts with LU and was made a Honorary Doctor of Medicin there in 1989. Daniel Kallós began to study at University in 1955. In 1986 he became a professor of pedagogics at UmU and worked in this capacity until his retirement in 2002. Together with Hans Wallin – professor of mathematics there – he successfully introduced mathematical didactics in Umeå.

die aus den KZ hierher gerettet sind. Ich bekam neulich von einer Dame, die ich persönlich nicht kenne, einer Frau Hedvig Liebermann einen Brief. Sie war Lehrerin in Mathematik und Physik in Kolozsvár und befreundet mit meinen Schüler Samu v. Borbély, der dort an der Universität wirkte. Sie wusste von ihm, dass ich in Schweden war, und wollte wissen, was aus ihm geworden sei, nachdem die Deutschen ihn selbst ins KZ gespert hatten. Frau Liebermann ist aus dem Lager Bergen-Belsen hierher gerettet worden. Frau Liebermann schrieb neulich in einem zweiten Briefe an mich: "Da ich gerne wieder arbeiten möchte, wäre ich Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir mathematische Bücher in deutscher, französischer oder englischen Sprache senden würden. Besonders interessiert mich Differential- und Integralgleichungen." Wäre es nicht möglich, das Sie Frau Hedvig Liebermann als Archivarbeiter für Ihr Institut anforderten zwecks Katalogisierungsarbeit, dann hätte Frau L. nebenbei Gelegenheit, zu arbeiten, da ihr ja dann die Bücher zur Hand wären. Wir hatten hier für diesen Zweck einen aus Dänemark gekommenen Flüchtling. Lassen Sie sich mal die Sache wohlwollend durch den Kopf gehen. Man soll diesen armen Leuten, die so gemartert waren, eher helfen als den etwas zweifelhaften (!) baltischen Flüchtlingen. Sollte es nicht gehen, so lassen Sie es mir bitte wissen. Wo stecken Sie eigentlich? Sind Sie auf dem Lande? Falls ja und in etwa hier oben, könnte man sich da nicht sehen? Von meiner Frau weiss ich wenig. Über die Herren der aus Berlin via Moskau hierher gekommenen schwedischen Gesandtschaft weiss ich nur, dass meine Frau die Kämpfe in Berlin überstanden hat. Ich hoffe aber via Paris bald näher zu hören. Ich habe heute Einreiseerlaubnis nach Norwegen erhalten, weiss aber nicht, wenn ich reise. So schnell geht es nicht. Ausserdem sind die Wohnverhältnisse in Trondheim so unübersichtlich, dass man nicht in diese ungewisse Verhältnisse hineinreisen kann. Möglicherweise fahre ich erst zu Besuch, um alles zu ordnen, und komme dann zurück. Das ist alles noch ganz ungewiss.

Schreiben Sie mir recht bald und lassen Sie mich wissen, ob Sie etwas über ihren Bruder Friedrich und Ihre anderen Angehörigen wissen. Wie geht es Ihren Töchtern?

Herzliche Grüsse. Ihr Ernst Jacobsthal.

Ich habe kein Telefon!

Translation from German:

It is ages since I heard from you. So I entice you away from your silence. Since we met here last time in nightly conditions, the wheel of world history has rolled in always faster speed and in front of us there will now be a period when the newspapers and the radio again will be about salultary boredom. But the ruins and the material misery and even more the human suffering that these years of agony postpone, are horrible und unimaginable. I am often occupied by the question: what have you heard of your family at home? For some have got directly or indirectly positive news. But many are still in uncertainty. Among the refugees here there are still quite many Hungarians that were rescued from KZ. Recently I got a letter from a lady whom I do not know personally, a Mrs. Hedvig Liebermann. She was a teacher in mathematics and physics in Kolozsvár and is a friend of my pupil Samu v. Borbély, who worked there at the university. From him she knew that I was in Sweden, and wanted to know what had happened to him after the Germans had put him in the KZ. Mrs. Liebermann was rescued from the camp Bergen-Belsen to here in Sweden. Mrs. Liebermann wrote namely in a second letter to me: "As I would like again work, I would be most grateful to you, if you could send me mathematics books in German, French or Englisch language. In particular, I am interested in differential and integral equations." Would it be possible that you hired Mrs. Hedvig Liebermann as an archive worker at your Institute for cataloguing work, then Mrs. Liebermann would also get a possibility to work, because then she could have access to the books. Here we had for this job a refugee from Denmark. Please, let this thing go kindly through your head. One should help these wretched people, who have waited so long, rather than helping the somewhat dubious (!)[163] Baltic refugees. If it would not work, please, let me know. Where are you really? Are you in the country? If yes and up here, could we then not see each other? About my wife I know little. Through the gentlemen of the Swedish legacy that came here from Berlin via Moscow I know only that my wife survived the fighting in Berlin. But I hope to hear soon more via Paris. Today I got the entry permit to Norway, but I do not know when I shall go. It does not go so fast. Besides the housing siuation in Trondheim is rather poorely arranged, so that one cannot go there in these uncertain conditions. Perhaps I go first for a visit, to arrange everything, and come back then. Nothing is quite clear yet.

Please, write to me quite soon and let me know if there is anything known about your brother Friedrich and your other relatives. How are your daughters?

Hearty greetings, Yours faithfully Ernst Jacobsthal.

2.57.10 Letter Uppsala Jul 22, 1946

Salagt. 36A Uppsala, Tel. 32426 (Ekwall)

[163] My exclamation mark.

Lieber Herr Riesz, das war neulich bei Ihrer Frau Tochter furchtbar nett. Sie endlich einmal gemütlich wiedersehen. Vielen herzlichen Dank, dass Sie dazu aus Saltsjöbaden herüberkamen. Beinahe hätte ich Sie vorgestern besucht; ich war in Lillängen und wollte eigentlich mit Herrn Dr. Schwabacher, der als Numismatiker am Historischen Museum arbeitet und den ich besuchte, nach Saltsjöbaden fahren, aber in letzter Minute wurde umdisponiert, und so waren wir abends beim Architekten Herrn Forbat. Inzwischen habe ich neue Post aus Berlin gehabt, die eine ganze Menge Personalia enthielt. Bieberbach sitzt nach dieser Meldung in Haft bei den Amerikanern. Geppert hat sich mit Familie beim Einzuge der Russen das Leben genommen. Die frühere Technische Hochschule in Berlin, die jetzt den Namen Technische Universität trägt, hat mich offiziell bei mir angefragt, ob ich bereit sei eine Professur zu übernehmen. Geantwortet habe ich noch nicht. Denn mir greut vor der Rückkehr, trotzdem ich so gerne endlich nach sieben jähriger Trennung von meiner Frau wieder mit ihr vereinigen sein möchte. – Dass ich erst heute an Sie schreibe, hat einen sehr einfachen Grund: Ich habe wieder ein Faulheitsperiod, nach vielen Monaten intensiver Arbeit; und so keine Lust, mich mit Dingen zu beschäftigen, über die ich bis zum Überdruss nachgedacht habe. Aber ich hatte Ihnen versprochen, und so habe ich mir heute einen Ruck gegeben und die Manuskripte hervorgeholt. Ich setze $f(x+1)-f(x)=\Delta f(x)$ und allgemeiner

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\Delta_h f(x).$$

Die allgemeine Eulersche Formel lautet dann

$$f^r(x)=\sum_{\rho\pm}\frac{(-h)^{\rho-1}}{\rho}\Delta_h^\rho f(x). \tag{2.1}$$

Für den Fall $h=1$ benutzt Frobenius [42] den Entwicklungssatz für Polynome

$$F(z+x)=\sum_\nu \binom{z}{\nu}\Delta_h^\nu P(x). \tag{2.2}$$

(Differentiation nach z, dann $z=0$ oder auch $\mathfrak{F}(z+x)=F(x+B+1)-F(x+B)$ in Verbindung mit

$$\binom{B}{n}=\frac{(-1)^n}{n+1}.)$$

Setzt man

$$\phi_n(z,n) = h^n \binom{\frac{z}{n}}{n} = \frac{z(z-n)(z-2n)\ldots}{n!}, \quad \phi_0(z,n) = 1. \tag{2.3}$$

so gibt für jedes Polynom der Entwicklungssatz:

$$\mathfrak{F}(z+x) = \sum_{n=0} \phi_\nu(z,h)\Delta_h^\nu \mathfrak{F}^(x) \tag{2.4}$$

Für $h = 1$, gibt (2.4) die Formel (2.2), für $h \to 0$ die Taylor'sche Formel. Aus (2.4) folgt nun leicht (2.1).

Man kann (2.1) unabhängig vom allgemeinen (2.2) und (2.3) zeigen; z.B. indem man (2.1) für die Klasse der Polynome x^n oder die Klasse der Polynome $\binom{x}{n}$ zeigt. Für $f(x) = x^{m+1}$ und $m = 0$ ist ja (2.1) trivial. Von da aus geht der Induktionsbeweis ganz einfach unter Benutzung der Gleichung

$$\frac{\Delta_h^\rho x^{m+1}}{\rho} = x\frac{\Delta_h^\rho x^m}{\rho} + h\Delta_h^\rho x^m + \Delta_h^{\rho-1} x^m. \tag{2.5}$$

Für die Klasse der Polynome $\binom{x}{n}$ ist aber

$$\binom{x}{n}' = \binom{x+B}{n-1} = \sum_h^{n-1} \binom{x}{n-1-k}\binom{B}{k} =$$

woraus mit $\binom{B}{k} = \frac{(-1)}{k+1}$ sofort (2.1) folgt. (Für $h = 1$.) Was der Formel (2.1) mit Restglied angeht, so gilt folgender Satz.

Satz 3 *Ist $f(x)$ an der Stelle x differenzierbar und an den Stellen $x+hmx+2hm\ldots, x+nh$ stetig, so gilt*

$$f'(x) = \sum_{lamda=1}^{n} \frac{(-h)^{lamda-1}}{lamda}\Delta_h^l amda f(x) + (-h)^n \lim_{z\to 0}\{\Delta_{hz}^n \Delta_z f(x)\}. \tag{2.6}$$

Ist speziell $f(x)$ ein Polynom und versteht man unter n seinen Grad, dann ist $\Delta_z f(x)$ ein Polynom von z vom Grade $n-1$, also $\Delta_{hz}^n \Delta_z f(x) \equiv 0$ und man hat so (2.1).

Man kann (2.6) sehr leicht ableiten wenn man die Formel

$$\sum_{lamda=1}^{n} \binom{n}{lamda} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{2.7}$$

benuzt, (2.7) scheint nicht bekannt zu sein. Die Formel findet sich weder bei Markoff (Differenzenrechnung) noch bei Lacroix, *Traité*, III §937 (Édition seconde 1819) S.69. Auch nicht bei Euler, *Mémoire de l'Academie de Berlin* 1763, gedruckt 1770, gelesen 1766, S.223/224.

Das in (2.6) gegebene Restglied als Limes kann in andere Formen übergeführt werden. Für ganze Funktionen $f(x)$ kann man (2.6) so schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{lamda=1}^{n} \frac{(-h)^{lamda-1}}{lamda} \Delta_h^l amda f(x) + R_n \\ R_n &= \frac{n!(-h)^n}{2\pi i} \frac{n!(-h)^n}{2n!} \int_{\bigcirc} \frac{f(x)d\xi}{(\xi-x)^2(\xi-x-h)\dots(\xi-x-nh)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Integration erstreckt im positiven Sinne auf einen geschlossenen Weg, der $x, x+h, \dots, x+nh$ im Inneren enthält. Oder auch

$$R_n = \frac{n!(-h)^n}{2\pi i h} \int_{\bigcirc} \frac{f(x+hz)dz}{z^2(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \tag{2.9}$$

(Einfach geschlossener Weg, der $z = 0, 1, 2, \dots m$ im inneren enthällt.)

Aus (2.8), (2.8) folgt natürlich für Polynome alles. Hier wie in der Theorie der Bernoullischen Zahlen spielen die $\Delta^\nu x^n$ und speziell die $\Delta^\nu 0^n$ eine erhebliche Rolle, wie ja seit alterher bekannt ist. Die expliziten Ausdrücke für diese höhreren Differenzen sind Summen, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, also nur schwer für Abschätzungen zu brauchen sind. Man kann aber diese Differenzen durch Summen von lauter positiven Zahlen darstellen. Es gilt z.B. die Formel

$$\Delta^\nu 0^\nu = \sum_{lamda_1+lamda_2+\dots+lamda_n=\nu \, lamda_t \geq 1} = \frac{\nu!}{lamda_1! lamda_2! \dots lamda_n!}. \tag{2.10}$$

Aus (2.10) folgt

$$\begin{aligned} \Delta^p 0^\nu &\leq \frac{\nu! \binom{\nu-1}{p-1}}{([\frac{\nu}{p}])^p (1+[\frac{\nu}{p}])^{lamda}}; \qquad \nu \geq h \quad lamda = \nu - p[\tfrac{\nu}{p}] \\ \Delta^p 0^\nu &\geq \binom{\nu-1}{p-1} \frac{\nu!}{(\nu-p+1)!}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Diese Abschätzungen sind i.A besser als die, die man aus einer anderen Darstellung der $\Delta^p 0^n$ als Summe positiver Zahlen erhält, nähmlich der Darstellung

$$\Delta^\nu 0^\nu = p! W_{p-\nu}(1, 2, \dots, p). \tag{2.12}$$

Hierein bedeutet $W_{p-\nu}$ die $(p-\nu)$-te symmetrische Wronskische Funktion von $1, 2, \ldots, p$. Die r-te symmetrische Wronskische Funktion sind bekanntlich durch

$$W_r(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_p=r} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_p^{a_p}$$

erklärt.

Die Eulersche Formel führt zu einer bemerkenswerten Darstellung von $\binom{x}{n+1}$

$$\binom{x}{n+1} = p! \sum_{lamda=1}^{n+1} \frac{c_{lamda,n+1}}{lamda1} x^l amda, \quad n \geq 0 :$$

$$c_{lamda,n+1} = (-1)^{lamda+n+1} \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l amda=n+1;\, \nu_k \geq 1} \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l amda} \tag{2.13}$$

Bedeutet also $f_l amda^{(n)}$ die $lamda$-te symmetrische Grundfunktion von $1, 2, 3 \ldots, n$, so folgt aus (2.13), dass folgende Gleichung gilt:

$$f^{(n)}_{n-lamda} = \frac{(n+1)!}{(lamda+1)!} \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{lamda+1}=n+1;\, \nu_k \geq 1} \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{lamda+1}}. \tag{2.14}$$

Siegels Arbeit, von den ich neulich sprach, ist [156]. Die Verschärfung von

$$(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq x_1 x_2 \ldots x_n$$

lautet so: Es sei $n \geq 2$, $x_k > 0$ und $\Delta = \prod_{k<\ell}(x_k - x_\ell)^2 > 0$

$$P(t) = P_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (\frac{t+k}{n-k})^{n-k-1};$$

$$Q(t) = Q_n(t) = \prod_{k=1}^{n-1} (-1 + \frac{n-k}{t+k+1});$$

μ sei die kleinste positive Wurzel der algebraischen Gleichung

$$P_n(\mu) = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{n-1} \Delta^{-1}.$$

Dann

$$(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq x_1 x_2 \ldots x_n Q_n(\mu).$$

Das ist alles für heute. Sehr viele herzliche Grüsse.

Ihr E. J.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz,

it was really very nice to finally see you again at the house of your daughter. Many hearty thanks that you came for this over from Saltsjöbaden. I was about to visit you yesterday; I was at Lillängen and together with Herrn Dr. Schwabacher[164], who works as a numismatist at the Historical Museum and whom I was visiting, we wante to go to Saltsjöbaden, but in the last minute this was changed, und so we where in the evening at the home of Architect Mr. Forbat [165]. In the meantime I have got new mail from Berlin containig a lot of personalia. According to this message Bieberbach[166] is imprisoned by the Americans. Geppert[167] and [59]). I had myself an "iteration period" (from

[164]Wilhelm Heinrich Schwabacher (1897-1972), German-Swedish numismatist, took part in WW I until 1918, defended the thesis "Tetradrachmerprägung von Selinut" (Coining of tetra dracmas of Selinut). Scholarly works: Augsburg 1927-1930, Erlangen 1930-1931, . . . , British Museum 1938, National Museum Copenhagen 1939-1943. Docent of auxiliary tools in antique history, / numismatics, at SU 1952-1964, curator at Stockholm Historical Museum 1959-1963. As a link in the so-called "Wiedergutmachung" (compensation) of victims of Nazism, he was given the title of professor in 1959.

[165]Fred Forbat (1897-1972) was born in Pécs, Hungary. He was educated as an architect in Budapest and Munich. After having finished his studies in 1920, Forbat was employed in Walter Gropius' architect's office at the Bauhaus in Weimar. Due to the political situation, Forbat decided to emigrate to Sweden in 1938. During the 1940's and 1950's he concentrated on urban planning, and was appointed Professor of Urban Planning at KTH in 1959. http://user.tninet.se/∼apb338p/Collection/html.

[166]Ludwig Bieberbach (1886-1982.) German mathematician, studies in Heidelberg and Göttingen, Ph.D. in 1910, professor first at Franfurt am Main and then at Berlin(1921-1945) He was author of numerous research papers and books. (In the mid 1950's, when I studied mathematics at LU, for instance, his differential geometry book part of the curriculum. I am of the opinion that several other of his books still deserves to be read.) He worked on space groups, thereby solving the 18th of Hilbert's problems. In function theory, he became famous for the *Bieberbach Conjecture* for the /s of univalent (schlicht) / functions in the disk, first stated in 1916, solved only in 1984 by the American Louis de Branges. The name Bieberbach became smeared by his most active association with the Nazis. He became a working Party member and was responsible to the dismissal of Edmund Landau and Issai Schur. He tried to create a typical German *Deutsche Mathematik* (intuition instead of formalism) and started a journal with that name. What happened to him at the end of the war, we have just learnt. Estranged from job at Berlin, I guess that he lived from the royalties of his many books. Incidentally, I saw a glimpse of him during a reception at the Nordic Mathematical Congress in Helsinki in 1957.

[167]Harald Geppert (1902-1945), German mathematician, Ph.D. in Breslau (now Wrocław in Poland, then Germany) under A. Kneser, was a professor at Giessen 1930940, at Berlin

1982 or so, together with some colleagues and extending over several years); it was in this connection that we hit upon the name Geppert (probably Tomas Claesson first mentioned him) and we wrote also a survey article containing a rather extensive bibliography of means [5]. As Bieberbach, Geppert got involved with the Nazis, the extent of this is unknown to me, I know only is that he took part in a sort of "summer school" in Party management in 1940, [59] representing material presented on this occasion. comitted suicide together with his family upon the entry of the Russians. The former Technische Hochschule (University) , that now carries the name Technical University, has asked me officially whether I was prepared to take over a professorship. I have not yet replied. Because I dread to return, despite the fact that after a seven year of separation from my wife, I would like to be united with her. – What I write to you only today has a very simple reason: I have again a period of lazyness, after many months of intensive work; and so no envy to busy myself with things which I have though over ad nauseam. But I had promised you, and so I gave myself a jerk today and fetched the manuscripts. I put $f(x+1) - f(x) = \Delta f(x)$ and more generally

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \Delta_h f(x).$$

The general Eulerian formula reads then

$$f^r(x) = \sum_{\pm} \frac{(-h)^{\rho-1}}{\rho} \Delta_h^\rho f(x). \tag{2.1}$$

In the case $h = 1$, Frobenius Georg Frobenius (1849-1917), mathematician, prodessor at the Berlin Academy, mostly remenbered for his work in group theory. [61]. uses an expansion theorem for /s

$$F(z+x) = \sum_{\nu} \binom{z}{\nu} \Delta_h^\nu P(x). \tag{2.2}$$

1940945. In Berlin he acted as main editior of the common editorial office of JFM and the Zbl. Geppert's mother tonge was Italian, and he nourished a tight contact with Italian mathematicians, / in the / of algebraic geometry. His sister Maria-Pia (1906-1997) was likewise a mathematician. She became a professor at Frankfurt in 1951 and was appointed professor in medical biometry at Tübingen in 1964. She has 3 items in MR.

This is as many as her brother Harald, who, however has also the score 27 in Zbl. Turning now to the latters mathematics, Harald Geppert was very much concerned with work of Gauss (sorry, Gauß!). In particular, he translated som unpublished work of the latter into German, which appeared in the Oswald "Classics" series [44]. This involved Gauss's geometric-arithmetic mean (AGM). Geppert worked also on other means and their iteration (see [53],[54] (these two concern Borchard's generalization of the AGM to 4, rather just two elements as in [44]),[55], [56],[57],[58] with Archibald (Raymond Clare Archibald (1875-1955), US mathematician

(Differentiation / z, then $z = 0$ or also $\mathfrak{F}^{(r)}(e)(z+x) = F(x+B+1) - F(x+B)$ in connection with

$$\binom{B}{n} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Setting

$$\phi_n(z,n) = h^n \binom{\frac{z}{n}}{n} = \frac{z(z-n)(z-2n)\dots}{n!}, \quad \phi_0(z,n) = 1. \tag{2.3}$$

gives for each /:

$$\mathfrak{F}(z+x) = \sum_{n=0} \phi_\nu(z,h) \Delta_h^\nu \mathfrak{F}(x) \tag{2.4}$$

For $h = 1$, (2.4) gives formula (2.2), for $h \to 0$ Taylor's formula. From (**??**) follows now readily (**??**).

One can prove (2.1) independently of the general (2.2) and (**??**); e. g. by proving (**??**) for the class of /s x^n oder the class of /s $\binom{x}{n}$. For $f(x) = x^{m+1}$ and $m = 0$, (**??**) is of course trivial. From there the induction proof goes rather easily using the equation

$$\frac{\Delta_h^\rho x^{m+1}}{\rho} = x \frac{\Delta_h^\rho x^m}{\rho} + h \Delta_h^\rho x^m + \Delta_h^{\rho-1} x^m. \tag{2.5}$$

For the class of /s $\binom{x}{n}$ holds, however,

$$\binom{x}{n}' = \binom{x+B}{n-1} = \sum_h^{n-1} \binom{x}{n-1-k} \binom{B}{k} =$$

from which with $(k) = \dfrac{(-1)}{k+1}$ follows at once (**??**). (For $h = 1$.) Concerning the formula (2.1) with reminder term, there holds the following.

Theorem 3 *If $f(x)$ is differentiable at the point x and continuous at the points $x + hmx + 2hm \dots, x + nh$, it holds*

$$f'(x) = \sum_{lamda=1}^{n} \frac{(-h)^{lamda-1}}{lamda} \Delta_h^l amda f(x) + (-h)^n \lim_{z \to 0} \{\Delta_{h_z}^n \Delta_z f(x)\}. \tag{2.6}$$

In particular, if $f(x)$ is a / und n is its degree, then $\Delta_z f(x)$ is a / of z of degree $n-1$, so that $\Delta_{h_z}^n \Delta_z f(x) \equiv 0$ und this gives (2.1).

It is very simple to derive (

The reminder terms given in (2.6) as limit can be brought into other forms. For entire functions$f(x)$ one can write 2.6) as

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{lamda=1}^{n} \frac{(-h)^{lamda-1}}{lamda} \Delta_h^l amda f(x) + R_n \\ R_n &= \frac{n!(-h)^n}{2\pi i} \frac{n!(-h)^n}{2n!} \int_{\bigcirc} \frac{f(x)d\xi}{(\xi-x)^2(\xi-x-h)\dots(\xi-x-nh)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

The integration extended in positive sense on a closed path, containing $x, x+h, \dots, x+nh$ in its interior. Or also

$$R_n = \frac{n!(-h)^n}{2\pi i h} \int_{\bigcirc} \frac{f(x+hz)dz}{z^2(z-1)(z-2)\dots(z-n)} \tag{2.8}$$

(A closed path, containing $z = 0, 1, 2, \dots m$ in its interior.)

From (2.7), (**??**) follows, of course, everything for /s. Here as in the theory of Bernoulli numbers a considerable rôle is played by the $\Delta^\nu x^n$ and / the $\Delta^\nu 0^n$, as is well known since antiquity. The explicit expressions for these higher differences are sums whose terms have alternating signs, thus only with difficulty may be used for estimates. But one can represent these differences by sums of sheer positive numbers. It holds e.g the formula

$$\Delta^\nu 0^\nu = \sum_{lamda_1+lamda_2+\dots+lamda_n=\nu . lamda_t \geq 1} \frac{\nu!}{lamda_1! lamda_2! \dots\ lamda_n!}. \tag{2.9}$$

From (2.10) it follows

$$\begin{aligned} \Delta^p 0^\nu &\leq \frac{\nu! \binom{\nu-1}{p-1}}{([\frac{\nu}{p}])^p (1+[\frac{\nu}{p}])^{lamda}}; \qquad \nu \geq h \quad lamda = \nu - p[\tfrac{\nu}{p}] \\ \Delta^p 0^\nu &\geq \binom{\nu-1}{p-1} \frac{\nu!}{(\nu-p+1)!}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

These estimates are, in general, better than the ones that one obtains from another representation of the $\Delta^p 0^n$ as a sum of positive numbers, to with the representation

$$\Delta^\nu 0^\nu = p! W_{p-\nu}(1, 2, \dots, p). \tag{2.11}$$

Here $W_{p-\nu}$ denotes the $(p-\nu)$-th / Wronskian function of $1, 2, \dots, p$. The r-te / Wronskian function is, as is well known, defined as

$$w_r(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{a_1+a_2+\dots+a_p=r} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_p^{a_p}.$$

The Eulerian formula leads to a remarkable representation of $\binom{x}{n+1}$

$$\binom{x}{n+1} = p! \sum_{lamda=1}^{n+1} \frac{c_{lamda,n+1}}{lamda1} x^l amda, \quad n \geq 0 :$$

$$c_{lamda,n+1} = (-1)^{lamda+n+1} \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l amda=n+1;\, \nu_k \geq 1} \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l amda} \tag{2.12}$$

Thus, if $f_l amda^{(n)}$ denotes the $lamda$-th symmetric principal function of $1, 2, 3 \ldots, n$ it follows from (2.12) that the following equation is valid:

$$f^{(n)}_{n-lamda} = \frac{(n+1)!}{(lamda+1)!} \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{lamda+1}=n+1;\, \nu_k \geq 1} \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{lamda+1}} \tag{2.13}$$

Siegel's paper, that I spoke of recently, is [156]. The sharpening of

$$(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq x_1 x_2 \ldots x_n$$

reads thus: Let $n \geq 2$, $x_k > 0$ and $\Delta = \prod_{k<\ell}(x_k - x_\ell)^2 > 0$

$$P(t) = P_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (\frac{t+k}{n-k})^{n-k-1};$$

$$Q(t) = Q_n(t) = \prod_{k=1}^{n-1} (-1 + \frac{n-k}{t+k+1});$$

let μ be the
smallest positive root of the algebraic equation g

$$P_n(\mu) = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{n-1} \Delta^{-1}.$$

Then

$$(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq x_1 x_2 \ldots x_n Q_n(\mu).$$

This is all for today. Very many hearty greetings,

yours faithfully E. J.

2.57.11 Letter Uppsala Aug 24, 1947

Salagt. 36A Uppsala, Tel. 424165
ab 31.8, N.T.H. Trondheim

Lieber Herr Riesz, herzlich willkommen daheim! Und dann: einen herzlichen Abschiedsgruss, bevor ich am 30. 8. Schweden vorläufig verlasse, um nach Trondheim überzusiedeln. Ich hatte schon im Frühlingssemester dort Vorlesungen gehalten und siedle nun ganz dorthin über, um meine Tätigkeit dort fortzusetzen. Nachdem ich Anfang Juli nach Trondheim zugesagt habe, bekam ich Ende Juli die Nachricht aus Berlin, dass ich dort zum Professor ernannt bin. Meine Frau soll via Schweden nach Norwegen kommen. Die Einreise nach Schweden hat sie schon. Die Erlaubnis für Norwegen ist beantragt. Ostern hatte ich sehr netten Besuch in Trondheim: Hedvig L. Das endete mit der Hochzeit am 13.8.! Ich wohnte übrigens bei Ihrer Tochter Margit. Sobald meine Frau hier eintrifft, komme ich hierher um sie zu treffen, da ich meine Einreiseerlaubnis nach Schweden geordnet habe. Irgendwann werden wir uns hoffentlich wieder treffen! Herzliche Grüsse.

Ihr ergebener Ernst Jacobsthal.

Translation from German:

Dear Mr. Riesz, heartily wellcome home! And then a hearty farewell greeting because on 30 August I will, temporarily, leave Sweden, in order to go to Trondheim. I had already hold lecturens in the spring semester and now I move there for good, in order to continue my activities there. After that I had accepted to go to Trondheim, I got in the beginning of July the news from Berlin that I had been appointed Professor there. My wife will come to Norway via Sweden. She has already a permit for entering Sweden. The permit for Norway has been applied for. For Easter I had a very nice visit in Trondheim: Hedvig L. It ended with the wedding on 13 August! By the way, I stayed with your daughter Margit[168]. As soon as my wife arrives here, I shall come here in order to meet her, as no permit for entering Sweden has been arranged. Some time we are, hopefully, going to meet again! Hearty greetings.

Yours faithfully, Ernst Jacobsthal.

[168] In the original there is, erroneously written Birgit. Twins are difficult to discern!

Bibliography

[1] David R. Adams – Lars Inge Hedberg, Function spaces and potential theory. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 314.) Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[2] Tyuzi Adati: Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan, Faculty of Science, Tokyo (3), 20 245 -266, (1938),

[3] Svenska adelns ättartavlor. (Geneological Tables of Swedish Nobility.)

[4] B. Almer, Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes. (French, On some problems in the theory of / /s of two / variables.) [J] Ark. för Mat., Astron. och Fys. 17, Nr. 7, 70 S. (1922). Published: 1922.

[5] Jonatan Arazy – Tomas Claesson – Svante Janson – Jaak Peetre: Means and their iterations. In: Jon R. Stefanson (ed.), Proc. of the Nineteenth Nordic Congress of Mathematicians, Reykjavík, 1984, pp. 191-212. Icelandic Math. Soc., Science Inst., University of Iceland, Reykjavík, 1985.

[6] A. Arwin: Om Fermat's s.k. stora sats och några därmed sammanhängande undersökningar. (Swedish, On Fermat's so-called last theorem and some investigations related to it.) Thesis, Lund, 1915.

[7] A. Arwin: Über Kettenbrüche. I, II. (German, On Continuous Fractions.) Ark. för Mat., Astron. och Fys. 12, Nr. 25, 23 S. (1917); 13, Nr. 5, 6 S.

[8] Valentin Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group. Ann. of Math. (2) 48, (1947). 568–640.

[9] Edwin E. Beckenbach and Richard Bellman: Inequalities. (Ergebnisse der mathematik und ihrer Grenzgebiete 30.) Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelbergm 1951.

[10] Curt Ragnar Benckert: Marbe's grupper. Ark. för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 12. N:o 22. 1917.

[11] Curt Ragnar Benckert: En variant av Eratosthenes' såll. (Swedish, A variant of the sieve of Eratosthenes.) Ark. Mat. Astr. Fys. 29B, (1943). no. 13, 5 pp.

Write an infinite multiplication table in the form of a matrix with elements $a_{ik} = (i-1)(k-1)$. This matrix contains all positive integers except primes. In similar ways the author constructs tables containing all numbers of the form $4n-1$, $6n-1$, and $12n-1$.

Reviewed by W. Feller.

[12] Viktor Bergström: Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz. (A new proof of a theorem of E. Steinitz.) Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1930), 148-152.

[13] Viktor Bergström: Beiträge zur Theorie der enlichdimensionalen Moduln und der Diophantischen Approximationen. (Contributions to the theory of finite dimensional moduls and Diophantic approximations.) In: Meddelanden Mat. Sem. Univ. Lund 2, 1-96(1935).

[14] Arne Beurling: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math. 81, (1948).

[15] H. J. Bhabha: On a class of relativistic wave-equations of spin $3/2$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. 34 (1951), 335–354.

[16] Lennart Bondesson – Jan Grandell – Jaak Peetre; The Life and Work of Olof Thorin (1912-2004). Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Physics. Mathematics (to appear)

[17] Samu von Borbély: [Hungarian title,] Über einen speziellen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelsströmung. Advisor; *Rudolf Rodhe*. Ph.D. thesis Technische Universität Berlin, 1938.

[18] Samu von Borbély; Title of German summary: Ueber die näherungsweise hydrodynamische Bestimmung des Geschosswiderstandes. Matematikai és Fizikai Lapok (1943), xyz-XYZ.

[19] Gunnar Blom: En blind matematiker. (A blind mathematician.) Elementa 84 (2002).

[20] T. J. I'A. Bromwich: Quadratic forms and their classification by means of invariant-factors. Reprint of the 1906 edition. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 3. Hafner Publishing Co., New York, 1971.

[21] Frans de Brun: Rotation kring en fix punkt. (Swedish, Rotation about a fixed point.) Stockh. Öfv. 1893. 455-468. Published: 1893 Reviewer: Brodén, Dr. (Lund).

[22] Frans de Brun; Bidrag till Weierstrass' teori för algebraiska funktioner. (Swedish, A Contribution to Weierstrass's theory of algebraic functions.) Upsala. 84 pages. Published: (1895). Reviewer: Brodén, Dr. (Lund).

[23] Frans de Brun; Sur le mouvement d'un point matériel, sollicité par une force centrale. (Swedish) Stockh. Öfv. 56, 107-112. Published: (1899) Reviewer: Lampe, Prof. (Berlin).

[24] Frans de Brun: Rotation kring fix punkt. II. (Swedish, Rotation about a fixed point.) Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 4, Nr. 5, 4 S. Published: (1908). Reviewer: Mattson, Dr. (Vesterås).

[25] Frans de Brun: Rotation kring fix punkt. III. (x)(Swedish, Rotation about a fixed point.) Arkiv för Mat., Astron. och Fysik 6, Nr. 5, 10 S. Published: (1910).

[26] Viggo Brun – J.O. Stubban, J. O. – J. E Fjeldstad– R. Tambs Lyche, R – K. E. Aubert – W. Ljunggren, – E. Jacobsthal: On the divisibility of the difference between two binomial coefficients. Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, pp. 42–54. Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952.

[27] Henri Cartan: Sur les fondements de la théorie du potentiel. (Foundations of potenial theory.) Bull. Soc. Math. France 69, 71-96 (1941).

[28] Winston Churchill: A history of the English-speaking Peoples. Volume 1. The Birth of Britain. Cassell, London. First cheap edition April 1962.

[29] Stig Comét: Une application des nombres complexes à un problème de la géométrie élémentaire. (An application of complex numbers to a problem of elementary geometry.) Proc. [Förhandlingar] Roy. Physiographic Soc. Lund 11 (1941). no. 9, 11 pp.

[30] Edward Thomas Copson; Some applications of Marcel Riesz's integrals of fractional order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 61 (1943). 260–272

[31] Harald Cramér; Mathematical methods of statistics. Reprint of the 1946 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[32] Tomas Cramér: Harald Cramér och traditionen. Bromma : Släktfören. Cramér, 1997.

[33] Karl Dickman: Om maximiantalet konsekutiva summander till ett helt tal. (On the maximum number of consecutive addends of an integer.) 8. Skand. Mat. Kongr., Stockholm, 1934, 385-388. Published: 1934.

[34] Thorild Dahlgren: Sur le théorème de condensation de Cauchy. (On the /t of condensationof Cauchy.) Kungl. Fysiografiska Sällslapet i Lund förhandlingar. Lund universitets årsskrift. Andra avdelningen. Medidicin och natuvetenskapliga ämnen. Publication : Lund [1918]

[35] Den Store Danske Encylclupædi. (The Big Danish Encyclopedia.) Gyllendal.

[36] P.A.M. Dirac: Quantum Electrodynamics. 4-th Edition, Clarendon Press, Oxford.

[37] Yngve Domar: Matematisk forskning under Stockholms högskolas första decennier. Föreläsning den 29 september 1978 i samband med Stockholm universitets 100-årsjubileum. (Mathematical reasearch during the first decades of Stockholm's University. Lecture on 29 September 1978 in connection with the 100-th anniversary of Stockholm's University.)

[38] Christian Ehrenfels: Das Primzahlengesetz entwickelt und dargestellt auf Grund der Gestalttheorie. (German) Leipzig: O. B. Reisland, VII u. 116 S. 8° (1922). Published: 1922 Reviewer: v. Schrutka, Prof. (Wien).

[39] Pierre Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor. (French, Trigonometric series and Taylor series.) Acta Math. 30, 335-400. Published: (1906) Reviewer: Weltzien, Prof. (Zehlendorf).

[40] Nils Erik Fremberg: A study of generalized hyperbolic potentials with some physical applications. Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 7, (1946). 1–100. (Reviewer: E. T. Copson.)

[41] Avner Friedman: Foundations of modern analysis. Dover, 1982.

[42] Ferdinand Georg Frobenius: Über die Bernoullischen Zahlen. (On Bernoulli numbers) Sitzungsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften 809-847 (1910).

[43] László Filep, Szemelvények Riesz Frigyesnek Riesz Marcellhez irrott leveleiböl (Extracts from the /ence of Frigyes Riesz to Marcel Riesz). Müzali Szemle (Historia Scientiarum). Tudománytörténeti külonkiadás (Special Issue in History of Sciences) 1 (2004), 26-38.

[44] Carl Friedrich Gauß: Bestimmung der Anziehung eines elliptichen Ringes. Nachlass zur Theorie der arithmetisch-geometrischen Modulfunktion. Überetzt und herausgeben von Dr. Harald Geppert. (Determination of the attraction of an elliptic ring. Remains on the Theory of the arithmetic-geometric Module function. Translated and edited by Dr. Harald Geppert.) Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 225. Akademische Verlagsgesellaschaft. Leipzig, 1927.

[45] Lars Grding: On a class of linear transformations connected with group representations. Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 6, (1944). 1–125. (Reviewer: D. E. Littlewood)

[46] Lars Grding: Note on continuous representations of Lie groups. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 33 (1947), 331–332.

[47] Lars Grding: On a lemma by H. Weyl. Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar [Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund] 20 (1950), 250–253.

[48] Lars Grding: Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants. (/'s problem for / elliptic partial /s.) *C. R. Acad. Sci. Paris* 230 (1950), 1030-1032.

[49] Lars Grding: Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math. 85, (1951). 1–62. (Reviewer: F. John.)

[50] Lars Grding: C. Hyltén-Cavallius avliden. SDS. 1977

[51] Lars Grding: Lax's construction of parametrices of fundamental solutions of strongly hyperbolic operators. Its prehistory and posthistory. Wave motion: theory, modelling, and computation (Berkeley, Calif., 1986), 60–73, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 7, Springer, New York, 1987.

[52] Lars Grding: Matematik och matematiker. Matematiken i Sverige före 1950. Lund University Press, Lund, 1994.

English translation (by the author): Mathematics and mathematicians. Mathematics in Sweden before 1950. (History of Mathematics 13.) American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 1998.

[53] Harald Geppert: Zur Theorie des Borchardtschen Mittels. I. (German, To the theory of the Borchardt mean.) J. f. M. 161, 21-40 (1929). Reviewer: Fueter, Prof. R. (Zürich)

[54] Harald Geppert: Die Uniformisierung des arithmetisch-geometrischen Mittels. (German, The uniformization of the arithmetic-geometric mean.) Jahresbericht D. M. V. 38, 73-82 (1929)., Reviewer: Fueter, Prof. R. (Zürich)

[55] Harald Geppert: Die Uniformisierung des arithmetisch-geometrischen Mittels. (German, (The uniformization of the arithmetic-geometric mean.) Jahresbericht D. M. V. 38, 73-82 (1929)., Reviewer: Fueter, Prof. R. (Zürich)

[56] Harald Geppert: Über iterative Algorithmen. I. (German, On iterative algorithms.) Math. Ann. 108 (1933), no. 1, 197–207.

[57] Harald Geppert: Über iterative Algorithmen. II. (German) Math. Ann. 107 (1933), no. 1, 387–399.

[58] Harald Geppert – R.C. Archibald: Gauß's Disquisitiones arithmeticae and the French Academy of Sciences. Scripta math. 3, 285-286 (1935). Reviewer: Lorey, W.; Prof. (Frankfurt).

[59] Harald Geppert: Wie Gauss zur elliptischen Modulfunktion kam. (German, (How Gauss came to the elliptic modular function.) Deutsche Math. 5, (1940). 158–175.

[60] Google.

[61] Siegfried Gottwald – Hans-Joachim Ilgauds – Karl-Heinz Schlote: Lexikon bedeutender Mathematiker. Bubliographischrs Institut Leipzig.

[62] Johannes Hagne: Användning av satsen om dubbelförhållandet på en cirkel för hyperbolisk måttbestäning. (Applicaton of the theorem about cross ratio for hyperbolic measurement.) Thesis for the degree fil.lic. UU, 19

[63] K.-G. Hagstroem: Erik Stridsberg. ScandActuarTidskr. (1951), 98-101.

[64] Vagn Lundsgaard Hansen: Jakob Nielsen (1890–1959). Math. Intelligencer 15 (1993), no. 4, 44–53.

[65] G. H. Hardy: A theorem concerning Taylor's series. (English) Quart. J. 44, 147-160. Published: (1913) Reviewer: Faber, Prof. (München).

[66] G. H. Hardy – E. M. Littlewood: Some problems of Diophantine Approximation. Acta 37 (1914), 155-239.

[67] G. H. Hardy – Marcel Riesz: The general theory of *Dirichlet*'s series. (English) Cambridge University Press. Published: 1915 Reviewer: Hamburger, H.; Prof. (Berlin).

[68] G. H. Hardy – G. H.; Wright, E. M.: An introduction to the theory of numbers. 3rd ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1954.

[69] Walter W. Harlock: Svensk-engelsk ordbok. Skolupplaga (Swedish-English Dictionary. School edition.) Norstedts, Stockholm 1949.

[70] Sven H. Hilding: Linear methods in the theory of complete sets in Hilbert space. Ark. Mat. Astr. Fys. 35A, (1948).

[71] G. H. Hardy: Gösta Mittag-Leffler, 1846-1927. (English) Proceedings Royal Soc. London (A) 119, V-VIII (1928). Published: 1928

[72] G. H. Hardy - J. E. Littlewood: Some problems of diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series. (English) Nat. Acad. Proc. 2, 583-586. Published: 1916.

[73] G. H. Hardy - J. E. Littlewood: Some problems of diophantine approximation. I. The fractional part of $n^k\Theta$. II. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions. Acta Math. 37, 155-191, 193-239. Published: 1914

[74] Edwin Hewitt: So far, So Good: My Life Up to Now. Mathematcal Intelligencer 12 no. 1 (1990).

[75] Einar Hille: Note on a Power Series Considered by Hardy and Littlewood. J. London Math. 4 (1929), 176-182.

[76] Einar Hille: Sur le problème abstrait de Cauchy. (French, Om the abstract theory of Cauchy.) C. R. Acad. Sci. Paris 236, (1953). 1466–1467. (Reviewer: K. Yosida.) 46.3X

[77] Einar Hille – Ralph S. Phillips: Functional analysis and semi-groups. Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

[78] Einar Hille – J. D. Tamarkin: On the Characteristic values of linear integral equations. Acta 57 (1931), 1-76.

[79] Carl Hyltén-Cavallius in memoriam (1924-1977). Uts Utskicket, 2007. English translation in preparation.

[80] Brynolf Holmkvist: Über die beziehungen zwischen lineären und ternären Formensystemen. (Om the relations between linear and ternary formen systems.) Thesis, Lund 1898.

[81] Ivan Holmkvist: Über $(2-2)$-deutige Correspondenzen der elliptischen und hyperelliptischen Curven" (Om $(2-2)$-valued correspondences of elliptic and hyperelliptic curves.) Lund, 1890.

[82] Hopf: Die Relativitätstheorie. (The Theory of Relativity.) Julius Springer, Berlin 1931.

[83] MR0076151 (17,853d) Hörmander, Lars On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94 (1955), 161–248.

[84] MR0087848 (19,420e) Lars Hörmander - Jacques-Louis Lions: Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. (French) Math. Scand. 4 (1956), 259–270.

[85] Horváth, Jean: L'œuvre mathématique de Marcel Riesz. I-II. (The mathematical work of Marcel Riesz. I-II.) Translated from the Hungarian by Agnèse Kahane. Proceedings of the Seminar on the History of Mathematics, 3, pp. 83–121, Inst. Henri Poincaré, Paris, 1982-83.

[86] János Horváth (Editor): A of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century I. Springer Berlin Heidelberg New York 2006.

[87] Huvudstadsbladet: Dödsfall (Deaths). 29 Ma 1988.

[88] Ido. Wikipedia.

[89] Heinz Jacobinski: Über die Automorphismen einer quadratischen Form. (German) Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar [Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund] 19, (1949). no. 8, 17 pp.

[90] Heinz Jacobinski: Verzweigungsgruppen und Verzweigungskörper. (German) J. Reine Angew. Math. 208 1961 113–143.

[91] Heinz Jacobinski: Two remarks about hereditary orders. 1970 Papers from the "Open House for Algebraists" (Aarhus, 1970) pp. 36–46 Mat. Inst., Aarhus Univ., Aarhus

[92] Heinz Jacobinski: Lattices over orders. Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1970), pp. 85–88. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[93] Heinz Jacobinski: Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de reseaux indecom-. posables. (French, On the commutative orders with a finite number of indecomposanle lattices.) Acta Math. 118 (1967), 1-31.

[94] Heinz Jacobinski: Unique decomposition of lattices over orders. Proceedings of the International Conference on Representations of Algebras (Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974), Paper No. 15, 9 pp. Carleton Math. Lecture Notes, No. 9, Carleton Univ., Ottawa, Ont.

[95] Ture Johannisson: Ett språkligt signalement. (A linguistic description.) Göteborg: Univ.; Stockholm: Almlvist & Wicksell (distr.). 1973. (Kungsbacka: Elander.)

[96] Nils Juringius: Recherches sur les fonctions symétriques. (French) 80 p. Lund, Impr. Håkan Ohlson.

[97] Ture Johannisson: Ett språkligt signalement. (A linguistic description.) Göteborg: Univ.; Stockholm: Almlvist & Wicksell (distr.). 1973. (Kungsbacka: Elander.)

[98] Toyojiro Kameda: On the reduction of frequency curves. ScandActuarTidskr. 11, 112-118 (1928). Published: 1928 Reviewer: Riebesell, P.; Prof. (Hamburg)

[99] A.I. Khinchin: Mathematical foundations of statistical mechanics. Translated from the Russian by G. Gamow. Dover Series in Mathematics and Physics. New York, 1949.

[100] Bo Kjellberg: On certain integral and harmonic function Thesis, Uppsala 1948.

[101] Paul Kuhn: Über die Gestalt der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung gewisser singulärer Punkte. (German, On the Form of Integral Curves of an Ordinary Differential / of thr First Orde in the Neigbourhoodn of Certain Singular Points.) 22 S. mit Taf. (Maschinenschrift.) Frankfurt, Naturwiss. Diss. Published: (1925).

[102] Paul Kuhn: Zur Viggo Brun'schen Siebmethode. Norske Vid. Selsk. Forhdl., Trondheim, Kongl. norske Videnskabs Selskabs Forhandlinger 39 (1942), 145-147.

[103] Börje Kullenberg: A Stark Effect of Hydrogeneic Fine-Structure. A Study Based on the Ionized helium line 4686. Thesis, Lund, 1938.

[104] Jan Lanke – Osvald Lundquist – Hans Risberg: Lärobok i differential/er. Lösningsmetoder och exempel. (Text-book in Differential /s. Methods of Solutions and Examples.) Lund, 1928, new edition 1943.

[105] K. Lanner: Paul Kuhn död. (Paul Kuhn Dead.) UNT 1964.

[106] Folke Lannér: On Complexes with Transitive Groups of Automorphisms. Comm. Sém., Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 11, (1950). 71 pp.

[107] Alfred Liljeström: Teknikens naturvetenskapliga grunder. Uppfinningarnas bok. (Scientific Foundations of Technology. The Book of Inventions.) Norstedt, Stockholm,1935.

[108] Ülo Lumiste – Helmut Piirimäe, Sven Dimberg – en befrämjare av Newtons lära vid Tartu universitet p 1690-talet. Swedish translation by Jaak Peetre och Staffan Rodhe. Normat No. 4 (2005), 155-172; No. 1, (2006), 18-26, No. 2, 61-74.

[109] Harry Malmheden: A class of hyperbolic systems of linear differential equations. Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 8, (1947). 1–116. (Reviewer: E. T. Copson.)

[110] MacTutor: The MacTutor History of Mathematics Archive.

[111] Martin P:son Nilsson: Forntidens historia. (History of Antiquity.) Stockholm, 1936.

[112] S. Minakshisundaram – Åke Pleijel: Some Properties of the Eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian Manifolds. Canadian J. Math. 1, (1949). 242–256. (Reviewer: S. Bochner)

[113] JFM55.0184.04
Alexander M. Ostrowski: Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. (German) [J] Acta Math. 53, 181-266. Published: 1929.

[114] Nationalencyklopedin och Språkdata. (Swedish National Encyclopeadia.) Web version.

[115] Nordisk familjebok. (Nordic Familjy Book.) Uggleupplagan. 38. Supplement. Riksdagens bibliotek. - Öyen. Tillägg /

[116] Norstedts stora svensk-engelska ordbok. (Norstedt's Big Swedish-English Dictionary.) Thrd edition, 2000.

[117] John von Neumann – Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior. Reprint of the 1980 edition [Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; MR0565457]. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.

[118] Åke Ohlmarks: Sveriges studenter. (Sweden's Students.)

[119] A. Pais - G. E. Uhlenbeck: On Field Theories with Non-Localized Action. Physical Rev. (2) 79, (1950). 145–165.

[120] Jaak Peetre: Marcel Riesz in Lund. In: Function spaces and applications. Proceedings, Lund, 1986. Lecture Notes in Mathematics 1302, pp. 1-10. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo, 1988.

[121] Jaak Peetre: On the Development of / – Instead of a HistoryThree Letters. Edited and/or translated by Jaak Peetre In: / Spaces, Interpolation Theory and Related Topics. Proceedings of the Interntaional Conference in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday. Lund, Swedem, August 17-22, 2000. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2002, p. 39-48.

[122] Jaak Peetre - Tomas Claesson: Index of the Gösta Mittag-Leffler separate collection. Part I. Small boxes. Part II. Big Boxes. Technical Reports, Lund, 1996-2002.

[123] Jaak Peetre: Några mytomaner (Some Mythomaniacs). Available in the coffee room at the Mathematics Department Lund.

[124] Jaak Peetre: Early Encounters with Mathematics, Especially with /, mainly 1954-1965. Scientific autobiography. In preparation.

[125] Jaak Peetre - Peter Lindqvist: Comments on Erik Lundberg's 1879 Thesis – Especially on the Work of Göran Dillner and his Influence on Lundberg, Memorie del Istituto Veneto 31 (2004), 5-141.

[126] Jaak Peetre: Olof Thorin (1912-2004) as an Analyst. In preparation.

[127] Jaak Peetre Carl Hyltén-Cavallius in memoriam (1924-1977). Utskicket.

[128] Jaak Peetre (editor): Correspondence of Gösta Mittag-Leffler with Marcel Riesz and Andries Mac Leod. In preparation

[129] Henrik Petrini: Om de till ekvationen $DF = 0$ hörande ortogonala koordinatsystemen. (On the Orthogonal Coordinate Systems Belonging to the / $DF = 0$.) Thesis, Uppsala, 1900.

[130] Henrik Petrini: Les dérivées premières et secondes du potentiel. (French. First and Second Derivatives of a Potential.) Acta. Math. 31, 127-332. Published: (1908) Reviewer: Wangerin, Prof. (Halle a. S.)

[131] Henrik Petrini: La densité d'une masse électrique en équilibre. (Swedish, Density of an Electric Mass in Equilibrium.) Ark för Mat., Astron. och Fys. 13, Nr. 8, 23 S. Published: 1917 Reviewer: Krafft, Dr. (Münster i. W.)

[132] Henrik Petrini: Allmänna metoder vid geometriundervisningen. (General Methods in the Teaching of Geometry.) Elementa 12 (1928-29), p.65; p.128; p.193.

[133] Henrik Petrini: Un fondement tout rationnel de la géométrie. (French. A Completely rational Foundation of Geometry) 8. Skand. Mat. Kongr. Stockholm 1934, 50-74. Published: 1934 Reviewer: Feigl, G.; Prof. (Breslau)

[134] Henrik Petrini: Précis d'un exposé des principes de la géométrie. (French, A Surway of the Principles of Geomtry.) Ark. Mat. Astr. Fys. 27 A, (1940). no. 10.

[135] Erik Philip: Alfred Liljeström In Memorial. SvD. Tuesday 13 January 1953.

[136] S. Pincherle: Sur les fonctions déterminantes. (On Determinant /s.) Ann. de l'Éc. Norm. (3) 22, 9-68 (1905).

[137] Åke Pleijel: Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations. (French; Asymptotic Propeeties of Eigenfunctions and Eigenvalues of Certain Vibration Problems.) Ark. Mat. Astr. Fys. 27A, (1940). no. 13, 101 pp. (Reviewer: R. Courant.)

[138] Åke Pleijel: Nils Erik Fremberg in memoriam. (Swedish, Nils Erik Fremberg In Memoriam.) Nordisk Mat. Tidskr. 1, (1953). 7–9.

[139] Erich Pascal - Ernesto Salkowski, [1881-1943]: Repertorium der höheren Analysis. (Repertorium of Higher Analysis.) Dritter Teilband. Unter Mitwirkung von E. Bessel-Hagen, H. Hahn, E. Hilb, G. Hoheisel, E. Kamke, J. Lense, L. Lichtenstein, A. Plessner, W. Sternberg, A. Walther herausgegeben von **E. Salkowski**. (German.) Leipzig, B. G. Teubner. 2. Aufl. XII, p. 1025-1598. Published: 1929.

[140] Frigyes (Frederick) Riesz: Sur l'intégrale de Lebesgue. (French, On the Integral of Lebesgue.) Acta Math. 42, 191-205 (1919-20). Published: 1919 Reviewer: Rademacher, Prof. (Breslau),

bibitemfr19b Frigyes (Frederick) Riesz: Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern. (German, On Power Series with Preescribed Beginning Terms.) Acta Math. 42, 145-171 (1919-20). Published: 1919 Reviewer: Szász, Prof. (Frankfurt am Main).

[141] Marcel Riesz: Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires. (French, On the maxima of bilinear Forms and on Linear Forms.) Acta Math. 49, 465-497. Published: (1927) Reviewer: Schmidt, Robert; Prof. (Kiel)

[142] Marcel Riesz: L'integrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. (French, The Riemann-Liouville Integral and Cauchy's Problem. *Acta* 81 (1949), 1-223.

[143] Marcel Riesz: Court exposé des propriétés de la mesure de Lebesgue. (French, A Short Presentation of the Proprities of Lebesgue Measure. Ann. Soc. Pol. Math. 25 (1952), 298-308.

[144] Marcel Riesz: Collected papers. Edited by Lars Grding and Lars Hörmander. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo, 1988.

[145] Hans Rudberg: Un rapport entre quelques méthodes de sommation. (French.) Ark. Mat. Astr. Fys. 30A, (1944). no. 10, 15 pp.

[146] Hans Rudberg: On the theory of relativistic diffusion. The compactification of a Lorentz space. Dissertation. Lund 1957.

[147] Cl.-G. Runquist: Ett falskt kombinationslås. Språkutredning i Helandermålet. (A Faulse Combination Lock. A Linguistic Analysis in the Helander Case.) Runquists, förlag, Malmö, 1958.

[148] Lennart Sandgren: A vibration problem. Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 13 (1955), 1–84.

[149] SDS.

[150] Issai Schur: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veränderlichen. (German, Remarks on the Theory of Bounded Bilinear Forms in Infnitely Many Variables.) J. für Math. 140, 1-28. Published: (1911)

[151] C. E. Sjöstedt: Le axiome de paralleles de Euclides a Hilbert: Un probleme cardinal in le evolution del geometrie. (Interlingua) [The parallel axiom from Euclid to Hilbert: A cardinal problem in the evolution of geometry] Excerpts in facsimile from the principal original works, with interpage translation into Interlingua, and with two appendices on Interlingua. Introduction and commentary by C. E. Sjöstedt Interlingue-Fundation, Uppsala; Bokförlaget Natur och Kultur, Stockholm 1968

[152] Svenska akademiens ordlista över svenska språket. (List of Words in Swedish Language of the Swedish Academy.) Svenska Akademien, 1998.

[153] Sigmund Selberg: Über die Verteilung einiger Klassen quadratfreier Zahlen, die aus einer gegebenen Anzahl von Primfaktoren zusammengesetzt sind. (German, On thr / of square free numbers which are put together by a given number of prime numbers.) Doctoral thesis. Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I 1942, Nr. 5, 49 S. Published: 1942

[154] Sigmund Selberg: Ernst Jacobsthal. (Memorial speech at the Common meeting 5th of April 1965.) (Translated from the Norwegian by Jan Kristian Haugland at the request of Keith Matthews.)

[155] Ernst S. Selmer, Ralph Tambs Lyche in memoriam. (Norwegian. English summary.) Normat 39 (1991), no. 1, 1–3, 56.

Det Kongelige Norske Videnskaps Selskabs Forhandlinger Bind 38 (1965) Nr 16.

[156] Carl Ludwig Siegel, The Trace of Totally Positive and Real Algebraic i Integers. Ann. of Math. (2) 46, (1945). 302–312.

[157] Svenska släktkalendern 2007. (Swedish. Swedish Family Calender.) Editor Magnus Bäckmark. Almqvist & Wicksell International. Stockholm, 2007.

[158] Johan Frederik Steffensens papirer. (The papers of Johan Frederik Steffensen.) Arkivet. Institut for Matematiske Fag. København Universitet.

[159] Johan Frederik Steffensen; JFM 58.1183.04 On Stieltjes' integral and its applications to actuarial questions. (English.) Journal Institute of Actuaries 63, 443-485. Published: 1932.

[160] Erik Stridsberg; Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. (French,On some Arithmetic Properties of Certain Transcendental /s. *Acta* 33, 233-292 (1910). Reviewer: Fueter, Prof. (Basel)

[161] Arild Stubhaug: In the Sign of Conviction; a biography of Gösta Mittag-Leffler. Atlantis, 2007.

[162] Svenskt biografiskt lexikon. (Swedish Biographic Dictionary.) Computer version.

[163] Ralph Tambs Lyche: En monotont voksende kontinuering funksjon som ikke er deriverbar i noe intervall. (Norwegian, A Monotonously Increasing Contnous Function which is Differentiable in Any Interval. Normat 5 (1957), 139-142.

[164] Oswald Teichmüller:, Operatoren im Wachsschen Raum. J. Reine Angew. Math. 174 (1935), 74-124. Reprinted in Gesammelte Abhandlungen. Collected papers. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1982. pp. 1-52.

[165] Olof Thorin; An identity in the collective risk theory with some applications. Skand. Aktuarietidskr. 1-2 (1968), 26–44.

[166] JFM 48.0450.03 Arvid Uhler: Sur les séries zétafuchsiennes. Thése. (French.) Lund: Gleerupska Univ.-Bokh., 57 S. 4° (1921). Published: 1921. Reviewer: Bieberbach, Prof. (Berlin).

[167] Vem är det? Svensk biografisk handbok (Swedish. Who Is This? Swedis Biographic Handbook). Norsteds Förlag Stockholm/.

[168] Vertreibung der jüdischen Wissenschaftler nach 1933. (German, On the Expelling of Jewish Scientists after 1933,) Internet.

[169] Arne Wahlgren: Om de singulära punkterna till differentialekvationer av första ordningen och andra graden. (On the singular points of /s of the first and the second degree.) Thesis, Uppsala, 1903.

[170] Sven Wennberg: Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. (German, Om the Theory of / Series.) Diss. Uppsala, 66 S. 8°. Published: 1920 Reviewer: Landau, Prof. (Göttingen.)

[171] † Hermann Weyl; Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I. II. III. (The theory of representations of continous semi-simple group/s by linear /s. I. II. III.) Math. Z. 23, 271-309; 24; 328-376, 377-395. Suplement Math. Z. 24 (1926), 789-791.

[172] Wikipedia: The free encyclopedia.