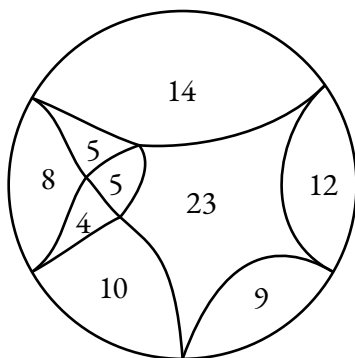


Obs: nedan lösningar är förslag: matematik handlar till stor del om resonemang och förklaringar, och det kan finnas många olika korrekta sätt att förklara något på.

Omkretstal

Varje område i cirkeln nedan har en omkrets som anges av talet som står i området. Vad är cirkelns omkrets?



Ej skalenlig!

Strategi: gör något som är i rätt riktning, och justera efteråt!

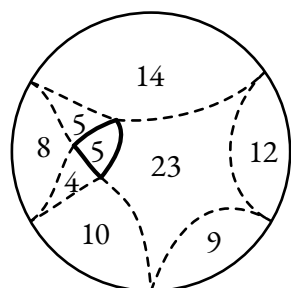
Om vi adderar omkretsarna för områdena som har en del av cirkelns omkrets på sig, dvs. tar

$$8 + 14 + 12 + 9 + 10 = 53,$$

då får vi fram ett tal som uppenbarligen är större än cirkelns omkrets. Vi börjar med det, och sedan justerar vi för att komma närmare svaret. Vad behöver vi subtrahera? Jo, de streckade streckorna nedan, för de inkluderades i vår beräkning $8 + 14 + 12 + 9 + 10$ när de egentligen inte skulle vara med.

Så vi subtraherar omkretsarna 4, 5, 23 för att räkna bort dessa streckade streckor:

$$8 + 14 + 12 + 9 + 10 - (4 + 5 + 23) = 21.$$



Men då har vi subtraherat även streckorna som är markerade med en extra tjock linje. Alltså får vi addera tillbaka in dessa längder, vars summa är 5 enligt talet i det området, för att få det slutliga svaret

$$\text{Svar: } 8 + 14 + 12 + 9 + 10 - (4 + 5 + 23) + 5 = 26.$$

Nollor

Hur många nollor slutar $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ med (när talet skrivs i bas 10)?

Strategi: primfaktorisering!

En av de viktigaste sakerna vi vet om positiva heltal är att de har unik primfaktorisering: varje heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k$$

av primtal p_i , som är unikt bestämda förutom ordningen på dem. Antalet nollor som ett tal slutar på i bas 10 är precis 'antalet faktorer 10 som finns i talet'. Eftersom $10 = 2 \cdot 5$, så är alltså antalet nollor i talet n lika med det minsta av talen a och b i primfaktoriseringen

$$n = 2^a 5^b q_1 q_2 \cdots q_r,$$

där talen q_i är primtal skilda från 2 och 5.

I vårt tal $n = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ så finns det uppenbarligen fler kopior av 2 än det finns av 5, så antalet 5:or i primfaktoriseringen är det som begränsar antalet faktorer 10. Hur många 5:or finns det? Varje multipel av 5, dvs.

$$5, 10, 15, 20, 25, \dots, 95, 100$$

bidrar med minst en faktor, och bland talen upp till 100 så bidrar varje multipel av 5 med *exakt en* faktor, förutom multiplarna av $5^2 = 25$ som bidrar med *två*. Antalet multiplar av 5 är $100/5 = 20$, och antalet multiplar av 25 är $100/25 = 4$. Alltså finns det exakt $20 + 4 = 24$ kopior av 5 i primfaktoriseringen av vårt tal n , och därmed är $n = 10^{24} \cdot m$ för något heltal m som inte är delbart med 5. Alltså:

Svar: talet slutar på 24 nollor.

Att kunna prata om "antalet faktorer av 5 i ett tal" på detta sätt går tack vare satsen om unik primfaktorisering, som – p.g.a. hur central den är – kallas för *aritmetikens fundamentalsats*. Det finns andra talsystem där den inte gäller!

Fellappade lådor

Det finns tre lådor med frukt. Till lådorna hör tre etiketter:

- Äpplen
- Päron
- Blandat (äpplen och päron)

Etiketterna har blandats ihop och satts på fel lådor, så att ingen låda har rätt etikett.

Du får öppna *en* låda och ta ut *en* frukt, utan att se eller känna något annat i lådan.

Hur kan du göra för att avgöra vilka etiketter som hör till vilka lådor?

Strategi: utnyttja symmetri och undersök det som bryter symmetrin!

I problemet spelar äpplen och päron exakt samma roll: om vi byter plats på orden "äpplen" och "päron", så förändras inte situationen alls – det finns en *symmetri* mellan dessa. Därför finns det ingen anledning att i förväg välja lådan märkt "Äpplen" snarare än lådan märkt "Päron". Den enda etikett som bryter symmetrin är alltså "Blandat", så det är naturligt att analysera just den lådan.

Vi vet att lådan märkt "Blandat" *inte* är blandad, eftersom varje etikett sitter fel. Låt oss säga att vi öppnar den och får fram ett äpple. Då vet vi att detta måste vara lådan med äpplen (eftersom den inte är blandad). De andra två lådorna måste alltså innehålla päron och blandad frukt. Lådan märkt "Päron" kan inte vara lådan med päron, eftersom även den etiketten sitter fel. Alltså måste den lådan vara den blandade, och den märkt "Äpplen" måste vara lådan med päron.

Tack vare symmetrin mellan äpplen och päron så vet vi att samma resonemang fungerar om vi istället hade plockat upp ett päron ur "Blandat"-lådan, med rollerna för äpplen och päron omväxlade. Alltså kan vi genom att plocka ut en frukt ur denna låda alltid avgöra vilken etikett som hör till vilken låda.

Svar: ta ut en frukt från lådan "Blandat".

Pingismatcher

Tre vänner, A, B och C, spelar pingismatcher mot varandra i formatet vinnaren står kvar. När de har spelat färdigt har A spelat 9 matcher, B 13 matcher och C 16 matcher. Vem förlorade den näst sista matchen?

Strategi: leta extremfall!

Den här frågan kan först verka omöjlig att besvara, eftersom vi inte får någon direkt information om spelordningen. En bra sak att leta efter då är något som är 'extremt' om situationen, som 'läser' upplägget. Vi får försöka lista ut hur våra tal är extrema.

Eftersom varje match spelas av två personer, så är det totala antalet spelade matcher

$$\frac{9 + 13 + 16}{2} = 19.$$

Nu sticker A:s antal matcher ut lite: 9 är väldigt lågt när det spelades 19 matcher totalt och det bara finns tre spelare. Hur få matcher kan man egentligen spela under dessa förhållanden?

En spelare kan inte stå över två matcher i rad: om man står över en match, så måste man spela nästa, eftersom förloraren byts ut och vinnaren står kvar. Alltså spelar varje person minst varannan match.

Vilket är då det minsta antal matcher en person kan spela under totalt 19 matcher? För att spela så få matcher som möjligt måste man stå över den första matchen och sedan spela varannan match, nämligen matcher nummer

$$2, 4, 6, \dots, 18.$$

Det blir precis 9 matcher. Detta är bara möjligt om man förlorar varje gång, eftersom en vinst skulle göra att man också måste spela nästa match och alltså komma upp i fler matcher.

Alltså är 9 det minsta möjliga antalet matcher. Eftersom A har spelat exakt 9 matcher, måste A ha spelat matcherna 2, 4, ..., 18 och förlorat varje gång.

Den nästa sista matchen är match nummer 18, och den som förlorade den var:

Svar: person A.