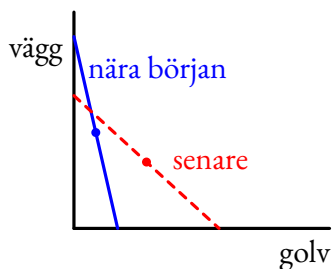


Obs: nedan lösningar är förslag: matematik handlar till stor del om resonemang och förklaringar, och det kan finnas många olika korrekta sätt att förklara något på.

Stegens mittpunkt

En 2 meter lång stega lutar mot en vägg och står på ett plant golv. När stegens topp glider ned längs väggen, glider stegens fot ut längs golvet.

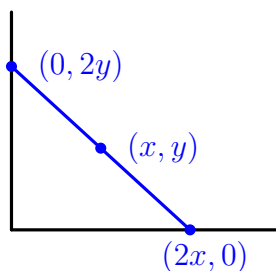
Vilken bana följer stegens mittpunkt?



Strategi: koordinatgeometri plus Pythagoras!

För att beskriva kurvan som mittpunkten följer, så kan vi försöka hitta ett samband mellan x och y för punktens koordinater (x, y) . Om kurvan gavs av t.ex. $y = 1 - x$ så skulle det vara en rak linje. Men vad är det faktiska sambandet?

Om stegens mittpunkt har x -koordinat x , då är bottenpunkten vid koordinaten $(2x, 0)$. Och om mittpunkten har y -koordinat y , då är topppunkten vid koordinaten $(0, 2y)$:



Vi vet att stegen har en längd på 2 m, som aldrig ändras: alltså gäller det för alla mittpunkter (x, y) under stegens fall att $(2x)^2 + (2y)^2 = 2^2$, enligt Pythagoras sats. Genom att dela med 4 ser vi att

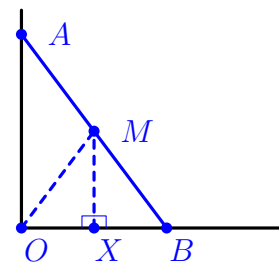
$$x^2 + y^2 = 1,$$

dvs. mittpunkternas koordinater uppfyller ekvationen för en cirkel av radie 1 och mittpunkt origo. (Att detta beskriver en cirkel kan ses via Pythagoras sats!)

Svar: mittpunkten följer en kvartscirkel från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.

Alternativ strategi: kongruenta trianglar!

Låt oss kalla mittpunkten för M , och ge namn till andra punkter enligt följande diagram.



I bilden så är trianglarna OXM och BXM kongruenta eftersom de båda är rätvinkliga, delar sidan XM och sidorna OX och BX är lika långa (eftersom M är mittpunkten på AB). Alltså är längderna av OM och BM lika, nämligen 1 m, eftersom M är mittpunkten på den 2 m långa stegen. Så mittpunkten M är alltid precis 1 m från hörnet!

Alltid delbart

Välj vilket heltal n du vill. Räkna ut $n^3 - n$. Varför är svaret alltid en multipel av 6?

Strategi: faktorisering och primtal!

Ett tal är delbart med 6 precis om det är delbart med både 2 och 3 — en trevlig aspekt av primtal. Så låt oss hålla utkik efter sådana faktorer. Vi börjar med att använda algebra:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1).$$

Talet är alltså en produkt av tre på varandra följande heltal $n-1$, n och $n+1$. Exakt ett av dessa tal kommer att vara en multipel av 3, och åtminstone ett av dem kommer att vara jämnt. Alltså är talet en multipel av både 3 och 2, och därmed en multipel av 6.

Om man har lärt sig om modulär aritmetik så finns det trevliga förklaringar via det också. För att verifiera att påståendet håller för alla n , räcker det t.ex. faktiskt att testa fem saker, nämligen att $n^3 - n \equiv 0 \pmod{3}$ för $n = 0, \pm 1$ och att $n^3 - n \equiv 0 \pmod{2}$ för $n = 0, 1$.

Riddare och lögnare

På en ö är varje person antingen en riddare, som alltid talar sanning, eller en lögnare, som alltid ljugar. På ön träffar du Mira och Sam.

Sam säger:

Mira är en lögnare.

Mira säger:

Vi är av olika sort.

Vilka typer är Mira och Sam?

Strategi: fallanalys!

I detta problem finns det bara två möjligheter för varje person, så en vettig strategi är att analysera dessa möjligheter.

Låt oss börja med att testa fallet där Sam är en riddare. Då är det sant att Mira är en lögnare. Men då måste Miras påstående vara falskt, vilket innebär att Mira och Sam är av samma sort. Detta motsäger att Sam skulle vara en riddare! Alltså är det inte möjligt att Sam är en riddare: det leder till en motsägelse.

Vi vet därmed att Sam är en lögnare. Alltså följer det från Sams påstående att Mira är en riddare. Vidare passar detta in med vad Mira säger.

Svar: Mira är en riddare och Sam en lögnare.

Gurktorkning

Ett parti gurkor väger först 100 kg. Då är 96% av vikten vatten. Efter en tid har gurkorna torkat, så att 95% av vikten är vatten.

Hur mycket väger gurkorna efter torkningen?

Strategi: leta efter det som är konstant!

Vattenhalten i gurkorna ändras, men inte mängden fast materia — och det kommer att hjälpa oss med lösningen.

Vid början vet vi att gurkorna är 96 kg vatten och 4 kg fast materia. Efter torkningen har vi fortfarande 4 kg fast materia, men nu vet vi att detta utgör 5% av den nya vikten V , eftersom vattnet nu utgör 95% av vikten. Alltså får vi ekvationen

$$4 = \frac{5}{100} \cdot V = \frac{1}{20} \cdot V,$$

vars lösning är $V = 80$.

Svar: gurkorna väger nu 80 kg.